דף נוסחאות מבוא לבקרה לביוטכנולוגיה

פונקצית תמסורת :

$$G(S)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

הגדרות בסיסיות :

סדר של פונקצית תמסורת – סדר הפולינום במכנה (החזקה הכי גבוהה של פולינום המכנה).
אפסים- שורשים של פולינום המונה.
קטבים – שורשים של פולינום המכנה.
משוואה אופיינית – השוואה לאפס של מכנה פונקצית התמסורת.

הגבר סטטי:

$$K_{SS}=\lim_{s\to 0} G(S)$$

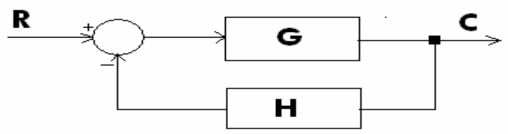
ערך התחלתי וסופי של אות המוצא ע"פ פונקצית תמסורת (נכון עבור שורשים ממשיים בלבד !!!) :

$$Y(\infty)=\lim_{s\to 0}\left[s\bullet Y(S)\right] \qquad Y(0)=\lim_{s\to\infty}\left[s\bullet Y(S)\right]$$

עבור אות כניסה $x(t)=A\bullet u(t)$ ערך סופי של אות המוצא מוגדר ע"י :

$$Y(\infty)=K_{SS}\bullet A$$

פונקצית תמסורת של מערכת בחוג סגור



$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)\cdot H(s)}$$

פונקציות תמסורת סטנדרטיות

פיגור מסדר ראשון : $G(s)=\dfrac{K_{ss}}{1+\tau S}$ כאשר: K_{ss} - הגבר סטטי של המערכת

$\tau[\sec]$ - קבוע זמן, ($\tau=t$ - הזמן שלוקח למוצא המערכת להגיע ל- 63% מהערך הסופי).

5τ -Setting time

2 פיגורים מסדר ראשון מחוברים בטור:

$$G(s)=\frac{K_{ss}}{(1+\tau_1 S)(1+\tau_2 S)}$$

כאשר אות הכניסה הוא $x(t)=A\bullet u(t)$:

$$Y(s)=\frac{AK_{ss}}{S\bullet(1+\tau_1 S)(1+\tau_2 S)}\Rightarrow y(t)=A\bullet K\bullet\left(1-\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_1}}+\frac{\tau_2}{\tau_1-\tau_2}e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)$$

פיגור מסדר שני :

$$\frac{C(s)}{R(s)}=G(s)=\frac{b_0}{a_2\cdot S^2+a_1\cdot S+a_0}=\frac{K\bullet\omega_n^{\,2}}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^{\,2}}$$

K - הגבר סטטי של המערכת $= K_{ss}=\dfrac{b_0}{a_0}$, $\omega_n\left[\dfrac{rad}{\sec}\right]=\sqrt{\dfrac{a_0}{a_2}}$ - תדר טבעי של המערכת,

$\xi=\dfrac{a_1}{2\cdot\sqrt{a_2\cdot a_0}}$ - מקדם הריסון של המערכת (גודל חסר מימד).

משוואה אופיינית : $S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^{\,2}=0$

קשרים בין פרמטרים במערכת מסדר שני

$T_p = \dfrac{\pi}{\omega_d}$	$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$	$\theta = arc\cos(\xi)$ **לשים לב טוב שמחשבים ברדיאנים ולא במעלות**
$T_s = \dfrac{4}{\xi \bullet \omega_n}$	$T_r = \dfrac{\pi-\theta}{\omega_d}$	$T_d = 2T_p$
M_o שגיאת המערכת P_o שגיאה באחוזים	$\xi = \left[1+\left(\dfrac{\pi}{\ln\left(\dfrac{M_o\%}{100\%}\right)}\right)^2\right]^{-0.5}$	$M_o = \dfrac{Y_p - Y_{ss}}{Y_{ss}} \cdot 100\% = e^{\frac{-\pi \bullet \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cdot 100\%$

קריטריון Routh

משוואה אופיינית נתונה ע"י : $1+GH(S)=0$

אם ידועה פונקצית תמסורת בחוג פתוח GH אז משוואה אופיינית נתונה ע"י : $GH = \dfrac{B}{C} \Rightarrow 1+GH = B+C$

<u>תנאי הכרחי</u> המשוואה האופיינית חייבת להיות מלאה וכל המקדמים חיוביים אחרת המערכת לא יציבה.

<u>טבלת Routh</u> :

S^n	A_0	A_2	A_4	מקדמי הפולינום במקומות זוגיים
S^{n-1}	A_1	A_3	A_5	מקדמי הפולינום במקומות אי- זוגיים
S^{n-2}	C_1	C_2	C_3	
$\cdot$	D_1	D_2	D_3	
S^0	A_n			

$$C_1 = \frac{A_1 \bullet A_2 - A_0 \bullet A_3}{A_1} \qquad D_1 = \frac{C_1 \bullet A_3 - A_1 \bullet C_2}{C_1}$$

$$C_2 = \frac{A_1 \bullet A_4 - A_0 \bullet A_5}{A_1} \qquad D_2 = \frac{C_1 \bullet A_5 - A_1 \bullet C_3}{C_1}$$

<u>תנאי מספיק עבור יציבות המערכת</u>

מע' תהייה יציבה כאשר כל המקדמים בעמודה הראשונה חיוביים .אם אחד המקדמים הוא אפס והשאר חיוביים זה מצב של סף יציבות .

הגדרות ומושגים כלליים לגבי בדיקת יציבות מערכת

יציבות- סדר שני- הכרחי מספיק שהמקדמים חיוביים. כלומר הקטבים שליליים.

מסדר שלישי ומעלה הכרחי שהמקדמים חיוביים אך לא מספיק.

עמודת ראוט- כל העמודה חיובית- מערכת יציבה

מספר החלפות סימן ככמות מספר השורשים החיוביים- לא יציב.

אפס בעמודת ראוט- כלומר או גבול היציבות או לא יציב. אם מעל האפס ומתחתיו יש אותו סימן אז לפולינום זוג קטבים על הציר המדומה. אם הסימנים שונים זה מעיד על חילוף סימן- אי יציבות. מחליפים באפסילון וממשיכים לפתור.

שורת אפסים בעמודת ראוט- יוצרים פולינום חזקות שהחזקה הגבוהה ביותר היא S בחזקת מקדם השורה שמעל שורת האפסים. וקבועיו הם הקבועים של השורה שמעל שורת האפסים. (יש ירידה של 2 חזקות לכל איבר). גוזרים את הפולינום לפי S, מחליפים את שורת האפסים במקדמי הפולינום שנוצר וממשיכים.

עזרים מתמטיים

קשרי אוילר :

$$\cosh(t)=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\qquad \sinh(t)=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\qquad \cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2j}\qquad \sin\theta=\frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

מציאת הגבר סטטי ($K_{S.S.}$) עם כניסת מדרגה בגובה יחידה:

$$K_{S.S.}=\lim_{t\to\infty}\left(y(t)\right)=\lim_{S\to 0}s\cdot Y(S)=\lim_{S\to 0}s\cdot G(S)\cdot\frac{1}{S}=\lim_{S\to 0}G(S)$$

מציאת קבוע הזמן (τ), מציבים 3 נקודות מגרף נתון ועושים ממוצע בין התוצאות שמתקבלות:

$$\tau=\frac{t}{\ln\left[\dfrac{Y_{S.S.}-y(0)}{Y_{S.S.}-y(t)}\right]}$$

התמרות לפלס של כניסות שונות

סוגי כניסות	התמרת לפלס של הפונקציה	תיאור הפונקציה כתלות בזמן
מדרגה	$\frac{1}{S}$	$0\Rightarrow t<0$ $1\Rightarrow t\ge 0$
ריצה/מהירות	$\frac{1}{S^{2}}$	t
פונקצית הלם של דיראק ($\delta(t)$)	1	1

התמרת נגזרות :

$$L\{f'(t)\}=s\cdot F\left(S\right)-f(0)$$

$$L\{f''(t)\}=s^{2}\cdot F\left(S\right)-s\cdot f(0)-f'(0)$$

בעיות מיכלים :

מיכל עם ספיקה נכנסת וספיקה יוצאת דרך ברז	חוק שימור המסה	ספיקה נכנסת q_{in}	ספיקה יוצאת q_{out}	$q_{out}(s)=\frac{1}{A\cdot R\cdot s+1}\cdot q_{in}(s)$	I	קבוע הזמן של התהליך: $\tau=AR$
			מפלס הנוזל h	$h(s)=\frac{R}{A\cdot R\cdot s+1}\cdot q_{in}(s)$		

בעיות חום :

מערכת טרמית. חימום הנוזל במיכל דרך הדפנות. מבחוץ פנימה	חוק שימור אנרגיה	טמפרטורת הסביבה $T_0(t)$	טמפרטורת הנוזל במיכל $T_l(t)$	$T_l(s)=\frac{1}{\frac{m\cdot C_p}{h\cdot A}\cdot s+1}\cdot T_o(s)$	I	קבוע הזמן של התהליך: $\tau=\frac{m\cdot C_p}{h\cdot A}$

בעיות לחץ :

מיכל לחץ פניאומטי עם לחץ נכנס ויציאה לאטמוספירה	חוק שימור המסה	לחץ גז ניכנס $p_{in}(t)$	לחץ גז במיכל $p_o(t)$	$p_o(s)=\frac{R_{out}}{C\cdot R_{out}\cdot R_{in}\cdot s+(R_{out}+R_{in})}\cdot p_{in}(s)$	I	R_{in} התנגדות בכניסה R_{out} התנגדות ביציאה C קיבול פניאומטי קבוע הזמן של התהליך: $\tau=\frac{C\cdot R_{out}\cdot R_{in}}{R_{out}+R_{in}}$

שגיאות עקיבה

סוג כניסה	כניסה הצגה פרמטרית	קבוע שגיאה	שגיאה במצב מתמיד	אחוז שגיאה במצב מתמיד
כניסת מדרגה (מיקום)	$r(t)=R_0$	$K_p=\lim\limits_{s\to 0} G_{OL}(s)$	$e_{pss}=\dfrac{R_0}{1+K_p}$	$e_{pss}\%=\dfrac{100\%}{1+K_p}$
כניסת ריצה	$r(t)=R1\cdot t$	$K_v=\lim\limits_{s\to 0} S\cdot G_{OL}(s)$	$e_{vss}=\dfrac{R_1}{K_v}$	$e_{vss}\%=\dfrac{100\%}{K_v}$
כניסת תאוצה	$r(t)=\frac{1}{2}R\cdot t^2$	$K_a=\lim\limits_{s\to 0} S^2\cdot G_{OL}(s)$	$e_{ass}=\dfrac{R_2}{K_a}$	$e_{ass}\%=\dfrac{100\%}{K_a}$

TYPE	מדרגה	ריצה/מהירות	תאוצה
0	$\dfrac{1}{1+K}$	∞	∞
1	0	$1/K$	∞
2	0	0	$1/K$

$$T=\frac{2\Pi}{\omega_n}\to T_d=\frac{2\Pi}{\omega_d}=\frac{2\Pi}{\omega_{n}\cdot\sqrt{1-\xi^2}} \qquad T=\frac{2\Pi}{\omega_n}\to T_d=\frac{2\Pi}{\omega_d}=\frac{2\Pi}{\omega_{n}\cdot\sqrt{1-\xi^2}}$$

דיוק וחישוב שגיאות

שגיאת המערכת מוגדרת כ : $e(s)\equiv r(s)-c(s)$ כאשר אין צורך לדעת את השגיאה הרגעית אלא את השגיאה במצב מתמיד.

$$e_{ss}=e(\infty)=\lim_{t\to\infty}\left[e(t)\right]=\lim_{s\to 0}\left[S\bullet E(S)\right]$$

<u>מערכת עם משוב יחידה :</u>

<u>חישוב באופן ישיר</u>:

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0}\left[S\bullet E(S)\right]=\lim_{s\to 0}\left[S\bullet\frac{R(S)}{1+G(s)}\right]=\lim_{s\to 0}\left[S\bullet R(s)\left(1-\frac{C}{R}(s)\right)\right]$$

כאשר :

R_0 - גובה המדרגה $\qquad$ R_1 - גודל השיפוע ($r(t)=R_1*t=\frac{R_1}{S^2}$) $\qquad$ $r(t)=\frac{1}{2}R_2*t^2=\frac{R_2}{S^3}$ - R_2

$$K_P=\lim_{s\to 0}[G(s)] \qquad K_V=\lim_{s\to 0}[S\bullet G(s)] \qquad K_a=\lim_{s\to 0}[S^2\bullet G(s)]$$

שיטות להקטנת השגיאה :

1. הגדלת סוג המערכת (הוספת אינטגרטורים)
2. לעלות ככול שניתן את מקדמי השגיאה ע"י העלאת ההגבר.

א. <u>מערכת עם משוב לא יחידה</u> : $e(\infty)=\lim\limits_{s\to 0}\left[S\bullet R(s)\left(1-\frac{C}{R}(s)\right)\right]$

ניתן להשתמש בטבלת שגיאות רק לאחר הפיכת המערכת למערכת בעלת משוב יחידה.

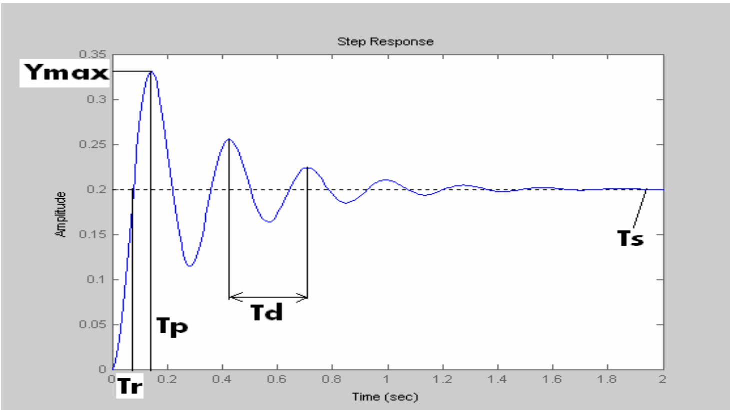
סוגי בקרים

C(s)	סוג בקר
$\frac{K_I}{S}$	אינטגרלי
K_p	פרופורציונלי
$K_D \cdot S$	דיפרנציאלי
$K + \frac{K}{S}$	PI
$K_P + K_P S + \frac{K_P}{S}$	PID

השפעת יחס הריסון על תכונות המערכת

$\xi > 1$ - ריסון יתר – על קריטי- במקרה זה השורשים של המשוואה האופיינית הם ממשיים שליליים ושונים. ניתן לכתוב את פונקצית התמסורת כ שני פיגורים מסדר ראשון בטור . התגובה הדינאמית של המערכת היא ללא תנודות.

$0 < \xi < 1$ - ריסון נמוך –תת קריטי- במרה זה השורשים הם מרוכבים וצמודים מצד שמאל של הציר המדומה. התגובה הדינאמית היא עם תנודות מתרסנות .



$\xi = 1$ - ריסון קריטי, שורשי המכנה ממשיים וזהים, והתגובה תהיה אקספוננמיאלית דואכת ומהירה.

$\xi = 0$ - מערכת ללא ריסון- שורשים מרוכבים ללא חלק ממשי תגובת sin cos שלא דועכת.

להוסיף y(t) לכל זטה.

T_d – זמן המחזור של התנודות, T_p – זמן השיא הראשון, T_r – הזמן עד הפעם הראשונה שאות המוצא מגיעה לערך הסופי, T_s- Setting time.

הגדרות ריסון

ריסון תת-קריטי $0 < \zeta < 1$

במקרה כזה יהיו לפונקציית התמסורת שני קטבים מרוכבים וצמודים:

$$P_1 = -\zeta \cdot \omega_n + j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$
$$P_2 = -\zeta \cdot \omega_n - j \cdot \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$$

התגובה במקרה של ריסון תת-קריטי:

$$\boxed{y(t) = K \cdot A \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\omega_n \cdot \zeta \cdot t} \cdot sin(\omega_d \cdot t + \phi)\right]}$$

ריסון יתר $\zeta > 1$

במקרה כזה יהיו לפונקציית התמסורת שני קטבים (שורשים של המכנה) ממשיים ושונים:

$$P_1 = \omega_n \cdot \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$
$$P_2 = \omega_n \cdot \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

התגובה במקרה של ריסון יתר (מחושבת לפי הקטבים):

$$\boxed{y(t) = K \cdot A \cdot \left[1 + \frac{1}{P_1 - P_2} \cdot \left(P_2 \cdot e^{p_1 \cdot t} - P_1 \cdot e^{p_2 \cdot t}\right)\right]}$$

ללא ריסון $\zeta = 0$

במקרה כזה יהיו לפונקציית התמסורת שני קטבים מרוכבים ללא חלק ממשי:

$$P_1 = j \cdot \omega_n$$
$$P_2 = -j \cdot \omega_n$$

התגובה במקרה ללא ריסון:

$$\boxed{y(t) = K \cdot A \cdot \left[1 - sin\left(\omega_n \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

ריסון קריטי $\zeta = 1$

במקרה כזה יהיו לפונקציית התמסורת שני קטבים ממשיים זהים:

$$P_1 = P_2 = -\omega_n$$

התגובה במקרה של ריסון קריטי:

$$\boxed{y(t) = K \cdot A \cdot \left[1 - (1 + \omega_n \cdot t) \cdot e^{\omega_n \cdot t}\right]}$$