משוואות ריבועיות

1. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$, $\frac{\Delta}{4}=\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$
2. וייטה למשוואה ריבועית: $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.
3. פתרונות המשוואה הריבועית: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$. <u>תמיד</u> ישנם שני שורשים.
4. שני שורשים ממשיים $\Leftrightarrow \Delta\ge 0$ שני שורשים ממשיים שונים $\Leftrightarrow \Delta>0$ שני שורשים ממשיים שווים $\Leftrightarrow \Delta=0$
5. שני שורשים לא ממשיים (מרוכבים) $\Leftrightarrow \Delta<0$ שני שורשים שוני סימן $\Leftrightarrow x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$
6. שני שורשים חיוביים $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\ge 0\\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}>0\end{cases}$, שני שורשים שליליים $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\ge 0\\ x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0\end{cases}$
7. במיקום שורשים, יש לנרמל את המשוואה וכך פשוט יותר לחקור אותה.
8. כאשר ישנו מקדם $a\ne 1$ ל x^2 , לא לשכוח לבדוק מקרה ליניארי של המשוואה.
9. כאשר יש ערך מוחלט במשוואה ריבועית, לדוגמה $(m-1)x^2+2(m-3)|x|+m^2-9=0$, יש לסמן $t=|x|$, לחקור לפי t ולהשליך על x .
10. משוואה דו-ריבועית, $ax^4+bx^2+c=0$, יש לסמן $t=x^2\ge 0$, לחקור לפי t ולהשליך על x בהתאם.
11. כנ"ל במקרה של $ax+b\sqrt{x}+c=0$ - יש לסמן $t=\sqrt{x}\ge 0$ לחקור לפי t ולהשליך על x בהתאם.

אינטגרלים

1. שטח בין שתי פונקציות: $S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|$
2. נפח סיבוב בין שתי פונקציות: $V=\pi\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)^2dx$
3. כאשר בתחום האינטגרל המסוים הפונקציות נחתכות, יש להפריד את התחום.

קומבינטוריקה ובינום

1. k צירופים מתוך n , ללא חשיבות לסדר: $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. בחירת k עצמים מתוך n , **עם** חשיבות לסדר: $V_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$. מקרה פרטי ש $k=n \leftarrow$ תמורה של n עצמים - $P_n=n!$.
3. $C_n^1=n$ $\quad C_n^0=C_n^n=1$ $\quad C_n^k=C_n^{n-k}$ $\quad C_n^{n-2}=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$
4. תמורות של n עצמים במעגל עם סימטריה: $P_n'=(n-1)!$
5. סכום שורת פסקל: $(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$
6. סכום האיברים במקומות הזוגיים = סכום האיברים במקומות האי-זוגיים:

$$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+\cdots-C_n^n=0^n$$

$$C_n^0+C_n^2+\cdots+C_n^{2k}=C_n^1+C_n^3+\cdots+C_n^{2k+1}$$

לוגריתמים

1. $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$, כאשר $b>0$ וגם $1 \neq a > 0$ כי $1^x = 1$.
2. סימונים: $\log_e = \ln$, $\log_{10} = \log$
3. מעבר בסיס: $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$
4. מקרה פרטי של העברת בסיס: $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$
5. $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y)$
6. $\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$
7. $a\log_b(x) = \log_b(x^a)$
8. $\log_b(x^a) = a\log_b|x|$, כאשר $a = 2n+1$ לא צריך את הערך המוחלט.
9. באי-שוויונים מעריכיים ולוגריתמיים: כאשר הבסיס $0<a<1$, אז $a^x > a^y$ מתהפך כיוון האי-שוויון: $x<y$.
כאשר הבסיס $a>1$, אז $a^x > a^y$ נשמר כיוון האי-שוויון: $x>y$.
דוגמא נוספת: $\log_a x < \log_a y$ וגם $0<a<1$ אז $x>y$
$\log_a x < \log_a y$ וגם $a>1$ אז $x<y$.
10. באי-שוויונים מעריכיים ולוגריתמיים יש לזכור לבדוק את המקרה שהבסיס הוא 1.

חקירת פונקציות

1. אסימפטוטות אנכיות: $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ ישנה אסימפטוטה אנכית ב x_0 (מועמדים ל x_0 - נקודות אי הגדרה וקצוות תחומי הגדרה)
2. אסימפטוטות כלליות מהצורה $y = ax+b$: $a = \lim_{x\to\infty^{\pm}} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x\to\infty^{\pm}}\left(f(x) - ax\right)$
3. כלל לופיטל: כאשר הגבול המתקבל הוא מצורה של $\frac{\infty}{\infty}$ או $\frac{0}{0}$, אזי:
$\lim_{x\to x_0,\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0,\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. גם גבולות מהצורה $0\cdot\infty$ ניתן להביא לצורה של $\frac{\infty}{\infty}$ או $\frac{0}{0}$.

פולינומים

1. השארית של חלוקת $p(x)$ ב $(x-a)$ שווה לערך הפולינום ב a : $r = p(a)$
2. $p(a) = 0 \Leftrightarrow (x-a)\big|p(x) \Leftrightarrow$ a הוא שורש של $p(x)$.
3. $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a(x-x_1)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$
4. לפולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים קומפלקסים
5. אם $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ אז $a_i = b_i \left(\forall 0 \le i \le n\right)$
6. וייטה עבור פולינום מסדר n : $\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, $\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$
7. יהי $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \left(\forall 0 \le i \le n, a_i \in \mathbb{R}\right)$
אזי: א) אם $\frac{p}{q}$ שורש ממשי שלו, אז $\begin{cases} p \mid a_0 \\ q \mid a_n \end{cases}$ ב) אם z_0 שורש שלו, גם $\overline{z_0}$ שורש שלו – לזכור את ההוכחה.
8. אם מבוקש טרינום $x^2 + Bx + C$ ששורשיו z_0 ו $\overline{z_0}$ אז צורתו: $x^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0) + \left|z_0\right|^2$
9. מקדם a_k של פולינום המפותח סביב x_0 : $a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}$
10. נרמול פולינום – חלוקתו ב a_n כדי שמקדם x^n יהיה 1.

מספרים מרוכבים

1. $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$, $i^2=-1$ $\qquad a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c;b=d$
2. מודול: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$; זהו אורך הווקטור z - <u>תמיד</u> ממשי. חיובי עבור כל וקטור חוץ מ $\vec{0}$.
3. ארגומנט של z : $\arg(z)=\theta$ כך ש $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$.
4. $\bar{z}=a-bi$, $|\bar{z}|=|z|$, $\theta_z=-\theta_{\bar{z}}$
5. תוצאות חשובות:

$z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$	$z\cdot\bar{z}=\|z\|^2$	$\|z\cdot w\|=\|z\|\cdot\|w\|$	$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$	$\overline{z^n}=(\bar{z})^n$
$z-\bar{z}=2i\operatorname{Im}(z)$	$\overline{z\pm w}=\bar{z}\pm\bar{w}$	$\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$	$\left\|\dfrac{z}{w}\right\|=\dfrac{\|z\|}{\|w\|}$	$\|z^n\|=\|z\|^n$

6. $z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)=rcis\theta$
7. $z_1\cdot z_2=r_1r_2cis(\theta_1+\theta_2)\qquad \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}cis(\theta_1-\theta_2)$
8. דה-מואבר: $z^n=r^ncis(n\theta)$
9. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}cis\left(\dfrac{\theta+2\pi k}{n}\right),k=0,1,...,n-1$
10. $|z-(a+bi)|$ מתאר את מרחק $a+bi$ מ z
11. כאשר מדובר על שורשי היחידה $w_k=\sqrt[n]{1}$, גדלי כל שורשים אלו הם 1. ולכן $|w_k|^2=w_k\cdot\overline{w_k}=1\rightarrow\overline{w_k}=\dfrac{1}{w_k}$ (הצמוד גם נגדי).

סדרות ואינדוקציה

1. מציאת a_n כאשר נתון $S_n(n)$: $a_n=S_n-S_{n-1}$
2. נובע מ (1) ש עם $S_n(n)=zn^2+wn$ אז מדובר בסדרה חשבונית.
3. <u>לא ניתן</u> להוכיח באינדוקציה אי שוויון כשבצידו האחד מספר קבוע – יש להיעזר באינדוקציה אחרת.
4. לעיתים ניתן להוכיח טענה גם לא בעזרת אינדוקציה, בעיקר גם ביטויים טריגונומטריים – יש לפשט את הביטוי.

וקטורים

1. מציאת היטל נקודה $P(x_1,y_1,z_1)$ על מישור: יש להרכיב ישר מהנקודה $P(x_1,y_1,z_1)$ ומהנורמל למישור ולחתוך אותו עם המישור.
2. מציאת היטל נקודה $P(x_1,y_1,z_1)$ על ישר $\ell:(x_0,y_0,z_0)+\alpha[a,b,c]$: לבטא את ההיטל ע"י $M(x_0+\alpha a,y_0+\alpha b,z_0+\alpha c)$ ולדרוש $[a,b,c]\bullet\overrightarrow{MP}=0$.
3. שטח פירמידה הנוצר ע"י $\vec{v},\vec{u},\vec{w}$, הוא $\left|\dfrac{1}{6}\vec{v}\bullet(\vec{u}\times\vec{w})\right|$ כי מקבילון מורכב משתי מנסרות שוות נפח שמורכבות כ"א מ-3 פירמידות שוות נפח.
4. ישרים $\ell_1=M_1+\alpha\vec{v}$ ו $\ell_2=M_2+\beta\vec{u}$ מקבילים $\Leftrightarrow$ $\vec{v}=a\cdot\vec{u}$ וגם M_1 לא על ℓ_2 .
5. ישרים $\ell_1=M_1+\alpha\vec{v}$ ו $\ell_2=M_2+\beta\vec{u}$ מתלכדים $\Leftrightarrow$ $\vec{v}=a\cdot\vec{u}$ וגם M_1 על ℓ_2 .
6. ישרים $\ell_1=M_1+\alpha\vec{v}$ ו $\ell_2=M_2+\beta\vec{u}$ נחתכים $\Leftrightarrow$ $\vec{v}\neq a\cdot\vec{u}$ וגם קיימת M_3 על ℓ_2 וגם על ℓ_1 .
7. ישרים $\ell_1=M_1+\alpha\vec{v}$ ו $\ell_2=M_2+\beta\vec{u}$ מצטלבים $\Leftrightarrow$ $\vec{v}\neq a\cdot\vec{u}$ ולא נחתכים.