מבוא לעיבוד אינפורמציה קוונטית 236990

נכתב ע"י – יותם מיכאלי

אקסיומות קוונטים:

1. תיאור ע"י ווקטור במרחב הילברט:

$$|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle = \sum_i \alpha_i |i\rangle$$

אורטונורמאליות של מצבים עצמיים: $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_i^j$

בסיס החישוב: $|0\rangle = \binom{1}{0}, |1\rangle = \binom{0}{1}$

בסיס הדמרד: $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}, |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$

בסיס בל: $|\phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle \pm |11\rangle], |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle \pm |10\rangle]$

סינגלט: $\frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle - |10\rangle]$, טריפלט: $|00\rangle, |11\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}[|01\rangle + |10\rangle]$

חפיפה: $\langle \phi | \psi \rangle = \left[\sum_j \beta_j^* \langle j|\right]\left[\sum_i \alpha_i |i\rangle\right] = \sum_i \beta_i^* \alpha_i$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

<u>מצב טהור</u> – מטריצת הצפיפות ניתנת ללכסון למדידה ודאית, $\mathrm{tr}(\rho^2) = 1$

<u>מצב מעורב</u> – מספר האברים השונים מ- 0 אחרי לכסון – צבר מינימלי.

<u>טרנספורמציות הרמיטית</u>: $A^\dagger = A$

ערכים עצמיים ממשים, (iA אנטי הרמיטי)

אקספוננט של הרמיטי הוא אוניטארי. $U = \exp(iA)$

<u>טרנספורמציות אוניטריות</u>: $\psi' = U\psi,\ \ U^\dagger U = I$

ניתן להיכתב $U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ערכים עצמיים על מעגל היחידה $e^{i\varphi}$

משמר נורמה (ומכפלה פנימית) – $\det(U) = 1$

שורות (ועמודות) מהווים בסיס אורטונורמאלי.

משמרות חפיפה: $\langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi' | \psi' \rangle$

יכולות להיות פאסיביות (מעבר בסיס), אקטיביות (התפתחות).

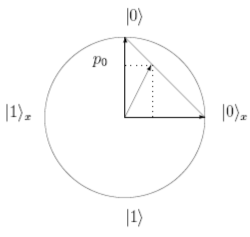
2. התפתחות בזמן: $\mathrm{H}|\psi\rangle = i\hbar\partial_t|\psi\rangle$

ולכן לכל המערכת: $|\psi_{(t)}\rangle = \sum_j \alpha_j e^{-iE_j t/\hbar} |\psi_{j(0)}\rangle$

3. לאחר מדידה המערכת במצב עצמי בהסתברות $p_i = |\alpha_i|^2$.

4.חיבור מערכות הפועלות במרחבים שונים: $|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$

מצב שלא יכול להיכתב כמכפלה טנזורית – מצב שזור.



כדור פואנקרה:

מצב טהור על המעטפת - יחיד.

מעורב – אינסוף צברים.

מצבים אורטוגונאלים על ציר.

מצב כללי - $\frac{1}{2}[1 + \mathbf{r}\cdot\hat{\sigma}] = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

מטריצת הצפיפות $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ - מתאים למצבים מעורבים.

ערך תצפית: $\sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = tr(A\rho) = \langle \psi | A | \psi \rangle$

<u>אינפורמציה:</u>

אינפורמציה עצמית: $\log_2 \frac{1}{p_i} = -\log_2 p_i$

אנטרופיה: $H = \sum_i -p_i \log_2 p_i$

מטבע הוגן H=1 שנים H=2 לא הוגן $H = h(p) = h(1-p)$

השינוי באנטרופיה אם למדנו את Y:

$$H(X|Y=y) = \sum_x -p(x|y)\log_2 p(x|y)$$

אנטרופיה מותנת: $H(X|Y) = \sum_y P(y) H(X|Y=y)$

בייס: $P(x,y) = P(x|y)p(y) = P(y|x)p(x)$

השינוי באנטרופיה מקבלת Y:

$$0 \le I(X,Y) = I(Y,X) = H(X) - H(X|Y) \le \log|\overbrace{\Sigma}^{abc}|$$

$$I(x,y) \le S(\rho) - \sum_x p_x S(\rho_x) \qquad S(\delta) = -tr(\delta\log(\delta))$$

<u>ערוצי תקשורת:</u>

BSC – בינארי סימטרי – p שגיאה : $I = 1 - h_2(p)$ אחידה

BEC – מחיקה בינארי – p למחיקה: $I = 1 - p$ כניסה אחידה

קיבולת הערוץ : $C = \max_{P(X)} I(X,Y)$ - P(X) התפלגות הקלט

ניתן להקטין את השגיאה בערוץ אם לא עוברים את הקיבולת

כל עוד מתקיים $R \cdot \log|\Sigma| < C$ ניתן: $Rn \to n,\ error \to \varepsilon$

<u>אינפורמציה:</u>

סיכוי לנכון/טעות $p_c = \langle \phi_0 | \psi_0 \rangle, p_e = \langle \phi_1 | \psi_0 \rangle$

ניתן לשכפל מצבים אורטוגונאלים ע"י C-NOT $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$

אין אפשרות לשכפל מצבים לא אורטוגונאלים נקבל סתירה בשימור החפיפה בין ההתחלה לסיום.

הנאמנות של מצב- $F = |\langle \psi | \psi' \rangle|^2 = \langle \psi | \rho' | \psi \rangle$

אנו לא אומרים שהמערכת קורסת לאחר מדידה אלה מקבלים תוצאה זו ע"י trace-out של תת מערכת.

מדידה חלקית- $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{ij} \alpha_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B$

בוב מודד $\psi_{AB} = \sum_j p_j^{1/2} |\phi_j\rangle_A |j\rangle_B, \quad p_j = \sum_i |\alpha_{ij}|^2$

התעלמות מתת המערכת הנמדדת-

$$\rho_A = \sum_j \langle j|_B \rho_{AB} |j\rangle_B = \sum_j p_j^{1/2} |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$$

$$\rho_A = \begin{pmatrix} a_{00,00}+a_{01,01} & a_{00,10}+a_{01,11} \\ a_{10,00}+a_{11,01} & a_{10,10}+a_{11,11} \end{pmatrix} \rho_B = \begin{pmatrix} a_{00,00}+a_{10,10} & a_{00,01}+a_{10,11} \\ a_{01,00}+a_{11,10} & a_{01,01}+a_{11,11} \end{pmatrix}$$

במצב שהוא מכפלה טנזורית (פריק) מתקיים

$$\sum_j p_j\left[\rho_j(A)\otimes\rho_j(B)\right], \alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10} \Leftarrow \binom{\alpha}{\beta}\otimes\binom{\gamma}{\delta} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix}$$

<u>אי-ודאות</u> $(\Delta x \cdot \Delta p \ge \hbar/2)$

$$\Delta A = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2, \quad \Delta A \Delta B \ge \tfrac{1}{2}|\langle \psi | AB - BA | \psi \rangle|$$

EPR – ע"י הנחה של ריאליות ולוקאליות מגיעים לבעיה בתורת הקוונטים (שינוי מה שמודדים). התשובה יש ריאליות רק לאחר המדידה ואין ערך מוכן מראש.

טלפורטציה - $\Psi_{init} = \binom{\alpha}{\beta}_{A'} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|01\rangle - |10\rangle\right]_{AB}$

$$\Psi = \frac{1}{2}\left[|\phi_+\rangle\binom{-\beta}{\alpha} + |\phi_-\rangle\binom{\beta}{\alpha} + |\psi_+\rangle\binom{-\alpha}{\beta} + |\psi_-\rangle\binom{-\alpha}{-\beta}\right]$$

מודדים בבל וצריך עדיין להעביר 2 ביטים קלאסיים איך לסובב ניתן לשלוח 2 ביט קלאסיים ע"י טרנספורמציה $I,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$.

ע"פ חסם חולבו בקיוביט ניתן לשמור בנאמנות 1 ביט.

שערים לוגים:

$\sigma_x - NOT$

פאזה כללית - $U_\phi = \sigma_z^\theta = \begin{pmatrix}1 & \\ & \exp(i\phi)\end{pmatrix}$

סיבוב - $R_\theta = \begin{pmatrix}Cos\theta & Sin\theta\\ -Sin\theta & Cos\theta\end{pmatrix} \quad (\det = 1)$

הדמרד - $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z+\sigma_x)$ $\left.\begin{array}{l}|0\rangle\to|+\rangle\to|0\rangle\\|1\rangle\to|-\rangle\to|1\rangle\end{array}\right\}$

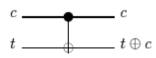
ניתן לרישום: $H|x\rangle = \sum_i (-1)^{i\cdot x}|i\rangle$

מספר ביטים: $H_n|0\rangle = \sum|i\rangle,\ H_n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\otimes\dots\otimes\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

ניתן לרישום: $H_n|x\rangle = \sum_i(-1)^{x\cdot i}|i\rangle$

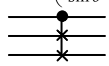
C-NOT $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&&1\\&&1&\end{pmatrix}$

(C-C-NOT - טופולי)



דויטש- Deutsch - $C-C-\begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & i\cos\theta\end{pmatrix}$

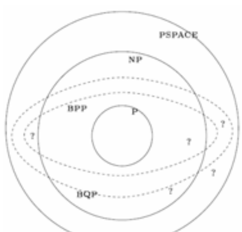
פרדקין C-swap -



FAN-OUT

כדי להפוך אורקל פאזה לאורקל קוונטי או להפך מוסיפים H לפני ואחרי הכניסה הנוספת.

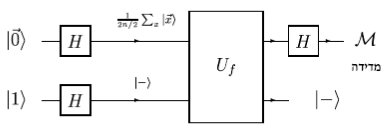
סיבוכיות:



P- חישוב בזמן פולינומיאלי.
NP- ניתן לוודא בזמן פולינומיאלי.
BPP- מותר מטבע וצריך 2/3 נכון.
PSPACE- מקום פולינומיאלי.
BQP- קוונטי, זמן פולינומיאלי, 2/3 נכון.

$P\subseteq BPP\subseteq BQP\subseteq PSPACE$, השאלה $BQP\neq BPP$?

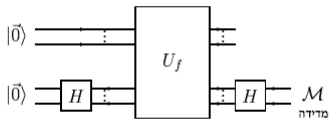
דויטש-ג'וזה DJ – הבדלה בין פונקציה מאוזנת, אפסה :



קלאסית צריך $2^{n-1}+1$ (או רק O(n)), קוונטית 1.

אנו מודדים את y ו- $y=0\to f_0,\ y\neq0\to f_{balanced}$

בעיית סימון – פונקציה 1 → 2, מצא את s



$$f(x)=f(y)\Leftrightarrow y=x\oplus s$$

קלאסית צריך $2^{n-1}+1$, קוונטית $O(\log_2 n)$-פער אקספוננט

לא פרקטי,אורקל ללא מימוש יעיל, לא מוכיח $BPP\neq BQP$.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{y,z\in S1}\left[(-1)^{z\cdot y}+(-1)^{(z\oplus s)\cdot y}\right]|y\rangle|f(z)\rangle$$

נוכל למדוד רק y המקיימים $s\cdot y=0$

אלגוריתם הפיקטור של שור

<u>טרנספורם פורייה קוונטי – QFT</u>

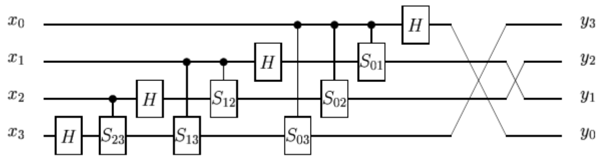
מחשב קוונטי טוב בלמצוא מחזור של פונקציה $f_{(x)}=f_{(x+jr)}$.

הגדרה – $|x\rangle \xrightarrow{QFT} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}\sum_y e^{i2\pi xy/2^n}|y\rangle$ (הכללת הדמרד).

יעילות:

$$xy/2^n = y_{n-1}(0.x_0)+y_{n-2}(0.x_1x_0)+\dots+y_0(0.x_{n-1}\dots x_0)$$

$$|x\rangle\to\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\left[|0\rangle+e^{2\pi i(0.x_0)}|1\rangle\right]\otimes\dots\otimes\left[|0\rangle+e^{2\pi i(0.x_{n-1}\dots x_1x_0)}|1\rangle\right]$$



$$S_{jk} = \begin{pmatrix}1&\\&\exp(i\pi/2^{k-j})\end{pmatrix} \qquad H=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|0\rangle+e^{2\pi i/(0.x_0)}\right]$$

סה"כ $\frac{1}{2}n(n+1)$ שערים.

אם נדרוש רגיסטר מספיק גדול $(2^n>N^2)$ נקבל בסיכוי גבוהה y העונה: $|y\cdot2^{-n}-d/r|\le2^{-n-1}$.

נמצא ע"י עיגול של $y/2^n$ את r (אם gcd(d,r)=1) –

$$\frac{5}{12}=\frac{1}{12/5}=\frac{1}{1+\frac{2}{5}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\triangleq[2,2,2]$$

<u>חישוב יעיל של $a^x \bmod N$ –</u>

$$a^x\bmod N = \left[a^{2^{n-1}}\right]^{x_{n-1}}\left[a^{2^{n-2}}\right]^{x_{n-2}}\dots\left[a^{2^1}\right]^{x_1}\left[a^{2^0}\right]^{x_0}\bmod N$$

הקבועים בסוגרים יחושבו מראש $a^{2^j}=\left[n^{2^{j-1}}\right]^2$ ($\bmod N$).

מציאת הפקטורים ע"פ המחזור – $a^r\bmod N=1$

$$a^r-1=(a^{r/2}+1)(a^{r/2}-1)=0=kN=k_pk_qN_pN_q$$

דרישות:

- a זר ל-N כדי שלא יתקיים $a^j=0$
- r זוגי
- N יתחלק בין הסוגרים (סיכוי גדול)

<u>הבחנה בין שני מצבים לא אורטוגונאלים</u>

אליס שולחת - $\left|\psi_{0,1}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \pm\sin\theta \end{pmatrix}$

בוב מגדיר - $\left|\overline{\psi_{0,1}}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \mp\sin\theta \end{pmatrix}$,

בוחר באקראי בסיס - $\left\{\left|\psi_0\right\rangle, \left|\overline{\psi_0}\right\rangle\right\}, \left\{\left|\psi_1\right\rangle, \left|\overline{\psi_1}\right\rangle\right\}$

מדידה של נגדי מתפרשת כנכון ושל מקורי כלא ידוע.

A\B	0	?	1	
0	$\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$	$\frac{1}{2}\cos^2 2\theta$	0	0.5
1	0	0.5	0	0.5
	$\frac{1}{2}\sin^2 2\theta$	$\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2\theta\right)$	0	

דרך שניה : בוב מוסיף עוד Qbit במצב $|0\rangle$

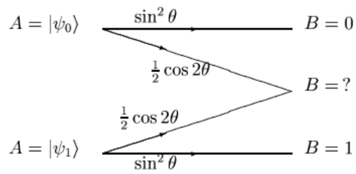
$$|00\rangle \rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}|00\rangle + \frac{\sqrt{|\cos 2\theta|}}{\cos\theta}|11\rangle$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_a \otimes \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \pm\sin\theta \end{pmatrix}$, מבצע טרנספורמציה $\quad |01\rangle\rightarrow|01\rangle \quad |10\rangle\rightarrow|10\rangle$

$$|11\rangle \rightarrow \frac{\sqrt{|\cos 2\theta|}}{\cos\theta}|00\rangle - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}|11\rangle$$

מקבל: $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ \pm\sin\theta \\ 0 \\ \sqrt{|\cos 2\theta|} \end{pmatrix}$, מדידה של $0,1$ – $2\sin^2\theta$, ? – $\cos 2\theta$

לבוב יש $I = 2\sin^2\theta$ אינפורמציה זמינה.



<u>אי שוויון בל</u>

$$E(\alpha\beta) - E(\alpha'\beta) + E(\alpha'\beta') + E(\alpha\beta') \le 2$$

ע"י סיבוב של הסינגלט ומדידה נפרדת של a, a' כאשר ניתן למדוד רק אחד מהם כל פעם $\left(\alpha = (-1)^{\langle\psi\rangle}, \alpha' = (-1)^{\langle H\psi\rangle}\right)$ מקבלים סתירה חוק הסטטיסטי.

כל טרנספורמציה אוניטרית יכולה להירשם כ-2 מעניינת.

$$U_1 = \frac{1}{C}\begin{pmatrix} a^* & b^* & \\ b & -a & \\ & & \sqrt{|a|^2+|b|^2} \end{pmatrix} \quad U = U_1 U_2 U_3 = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{1}{C}\begin{pmatrix} a'^* & & c'^* \\ & \sqrt{|a'|^2+|c'|^2} & \\ c' & & -a' \end{pmatrix} \quad U_3 = \frac{1}{C}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e''^* & f''^* \\ & h''^* & j''^* \end{pmatrix}$$

<u>אלגוריתם החיפוש של גרובר:</u>

קיימת פונקציה עבורה $f_x = \begin{cases} 1 & x\in\{X\} \\ 0 & else \end{cases}$, $f\,|x\rangle|0\rangle = |x\rangle, |f(x)\rangle$

1. הפעל הדמרד על 0 באורך n ביטים.
2. חזור $T = \frac{\pi}{4}\sqrt{N}$ פעמים (שונה עבור $r > 1$).
   א. הפעל U_f
   ב. הפעל הדמרד H_n
   ג. הפוך פאזה של מצב $|0\rangle$
   ד. הפעל הדמרד H_n
   ה. הפוך פאזה גלובלית (רק מפשט הוכחה)
3. מדוד בבסיס החישוב

$$|k\rangle \cong \left|\psi_r\right\rangle = \left(-H\left(I - 2|0\rangle\langle 0|\right)H\left(I - 2|k\rangle\langle k|\right)\right)^T H|0\rangle$$

$Q = \begin{pmatrix} 1-\frac{2}{N} & 2\frac{\sqrt{N-1}}{N} \\ -2\frac{\sqrt{N-1}}{N} & 1-\frac{2}{N} \end{pmatrix}$ - סיבוב ב $\omega \approx \frac{2}{\sqrt{N}} \Leftarrow \quad T\omega = \frac{\pi}{2}$

עבור r כללי $\omega = 2\sqrt{r/N} \quad P_r(T) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega T)$

<u>תקשורת – תיאום פגישה:</u>

אליס ובוב מבצעים יחד גרובר

1. חזור שלוש פעמים
2. אליס מכינה n+1 ביטים במצב $H_n|0\rangle_n \otimes |0\rangle$
3. חוזרים $t \in \{0..\sqrt{N}\}$ אקראי על:
   א. אליס : $|x\rangle|0\rangle \rightarrow |x\rangle\left|f_A(x)\right\rangle$
   ב. בוב : $|x\rangle|a\rangle \rightarrow (-1)^{a \wedge f_B(x)}|x\rangle|a\rangle$
   ג. אליס : $|x\rangle|a\rangle \rightarrow |x\rangle\left|a \oplus f_A(x)\right\rangle = |x\rangle|0\rangle$
   ד. אליס : מפעילה הדמרד.
4. אליס מודדת את הרגיסטר
5. אם מדדה זמן פנוי שולחת קלאסית לבוב.

סיבוכיות תקשורת של $O\left(\sqrt{N}\log_2 N\right)$

<u>מתמטיקה:</u>

<u>הזווית בין שני וקטורים כלשהם:</u> $\cos\gamma = \cos\theta_0\cos\theta + \sin\theta_0\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_0)$

<u>זהויות מעולם המרוכבות:</u>

$$\left|r_1 e^{i\alpha} - r_2 e^{i\beta}\right|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2\cos(\alpha - \beta)$$

$\sin(ix) = i\sinh(x) \qquad \cos(ix) = \cosh(x)$

$$\left|\int_\beta^\alpha e^{ix}dx\right|^2 = \left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

<u>Trigonometric Identities :</u>

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$
$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$
$\tan(90-\alpha) = \cot\alpha$
$\cot(90-\alpha) = \tan\alpha$
$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(180-\alpha) = -\tan\alpha$
$\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$
$\tan\alpha\cdot\cot\alpha = 1$
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
$1 + \tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$
$1 + \cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan(2\alpha) = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$
$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$
$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$
$\sin\alpha\cos\beta = 1/2(\sin(a+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
$\sin\alpha\sin\beta = 1/2(\cos(a-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$
$\cos\alpha\cos\beta = 1/2(\cos(a+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha + \tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$
$\tan(\alpha-\beta) = (\tan\alpha - \tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta$
$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2$

<u>סכומי טורים:</u>

$$\sum_{n=A}^{B} a_n = \frac{(B - A + 1)(a_A + a_B)}{2}$$

$$\sum_{n=A}^{B} q^n = q^A\left(\frac{1 - q^{B-A+1}}{1 - q}\right)$$

$$\sum_{l=0}^{L} (-1)^l(2l + 1) = (-1)^L(L + 1)$$