טענות והגדרות חישוביות חלק א'

טענה: בעיית העצירה איננה ניתנת לפיתרון.

הגדרה: *מכונת טיורינג* (מ"ט) היא שביעייה: $M=(Q,q_0,F,\Sigma,\Gamma,\text{ъ},\delta)$ כך ש:

- Q: קבוצה סופית שאיבריה נקראים מצבים
- $q_0\in Q$: נקרא מצב תחילי
- $F\subseteq Q$: קבוצה של מצבים סופיים
- Σ: קבוצה סופית שאיבריה נקראים אותיות. Σ נקראת א"ב הקלט.
- Γ: קבוצה סופית שנקראת א"ב עבודה ($\Sigma\subseteq\Gamma$).
- $\text{ъ}\in\Gamma\backslash\Sigma$: נקרא רווח.
- δ: פונקצית המעברים: $\delta:(Q\backslash F)\times\Gamma\text{-->}Q\times\Gamma\times\{L,R,S\}$

הגדרה: *קונפיגורציה היא שלשה:* $C=(\alpha,q,i)$ כאשר $\alpha\in\Gamma^*$ ומשמעותה שהמכונה נמצאת במצב q, הראש מעל התא ה-i, ותוכן הזיכרון הוא: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3...\alpha_m,\text{ъ},\text{ъ},\text{ъ}...$.

הגדרה: *הקונפיגורציה התחילית* של מ"ט M על קלט X היא $(X,q_0,1)$.

הגדרה: *קונפיגורציה סופית* היא קונפיגורציה שבה $q\in F$.

הגדרה: *צעד חישוב* - אם המכונה M נמצאת בקונפיגורציה $C=(\alpha,q,i)$ ואם $q\notin F$ ו- $\delta(q,\alpha)=(p,b,d)$, אזי בצעד החישוב הבא נמצאת המכונה בקונפיגורציה $C'=(\alpha',q',i')$ כאשר:

$$q'=p$$

$$\alpha'=\alpha_1,\alpha_2...\alpha_{i-1},b,\alpha_{i+1}...\alpha_m$$

$$i'=\begin{cases} i & | \quad d=s \\ i+1 & | \quad d=R \\ \max(1,i-1) & | \quad d=L \end{cases}$$

הגדרה: *הפלט של מ"ט* M על קלט X: אם החישוב של M על X מסתיים בקונפיגורציה (α,q,i), אזי הפלט הינו: $\alpha_1...\alpha_{i-1}$.

הגדרה: *מודל של חישוב* הוא אוסף של אובייקטים שלכל אחד מהם מתאימה פונקצייה שהוא מחשב. 2 מודלים יקראו שקולים אם אוסף הפונקציות שהם מחשבים זהה.

טענה: לכל $k\geq 1$, מודל מ"ט עם k סרטים שקול למודל מ"ט רגיל.

התזה של צ'רץ': כל מודל כללי וסביר של מ"ט שקול בכוחו לכוחה של מ"ט.

כללי: מודל חזק לפחות כמו מ"ט.

סביר: מודל שבו לכל אובייקט תיאור סופי.

הערה: ניתן לקודד מ"ט M כמחרוזת בינארית. דבר זה יסומן כ $<M>$. בהינתן מחרוזת בינארית, קל לבדוק האם היא מהצורה $<M>$.

קונבנציה: כאשר נדבר על קידודים של מכונות, נגדיר כל מחרוזת שאינה מהצורה $<M>$ כקידוד של מכונה אותה נכנה M_{stam}, *שעוצרת מייד על כל קלט במצב סופי 3.*

הגדרה: *מ"ט לזיהוי שפות היא מ"ט רגילה שבה:* $F=\{q_{acc},q_{rej}\}$. נאמר שמ"ט כנ"ל מקבלת קלט X, אם M עוצרת עבור הקלט X במצב q_{acc}, ונאמר שמ"ט כנ"ל דוחה קלט X, אם M עוצרת עבור הקלט X במצב q_{rej}.

אבחנה: לא מקבלת $\neq$ דוחה. לא דוחה $\neq$ מקבלת.

הגדרה: *השפה של מכונה* M} מקבלת את x|x}= L(M).
אומרים ש-M מכריעה את השפה L(M), אם בנוסף היא עוצרת תמיד.

הגדרה: נקבע $\Sigma=\{0,1\}$
R={L|ניתנת להכרעה L}
RE={L|קיימת מ"ט שמקבלת את L}
CO-RE={L|$\bar{L}\in$RE}

אבחנות: $R\subseteq RE$, $R\subseteq CO\text{-}RE$, $R=RE\cap CO\text{-}RE$

תכונות של המחלקות:
1. R סגורה למשלים: $L\in R\Rightarrow \bar{L}\in R$ (RE לא סגורה למשלים).
2. R סגורה לאיחוד: $L_1,L_2\in R\Rightarrow L_1\cup L_2\in R$
3. R, ו-RE סגורות לחיתוך $L_1,L_2\in R\Rightarrow L_1\cap L_2\in R$
4. R, ו-RE סגורות לשרשור

דוגמאות לשפות במחלקות:
R: Σ^*, $\varnothing$, כל שפה רגולרית, כל שפה סופית, בהינתן גרף האם הוא קשיר...
RE: כל שפה שב-R, שפות שכרגע אינן ידועות להיות ב-R, שפה של כל אוטומט.

הגדרה: תהיינה $L_1, L_2\subseteq\Sigma^*$ שפות.
פונקציה $f:\Sigma^*\to\Sigma^*$ נקראת *רדוקציה* מ- L_1 ל- L_2 אם היא מקיימת:
1. f מלאה (מוגדרת על כל קלט $x\in\Sigma^*$)
2. f ניתנת לחישוב (קיימת מ"ט שמחשבת אותה)
3. תקפות: $x\in L_1\Leftrightarrow f(x)\in L_2$
אם קיימת f כנ"ל נאמר ש- L_1 ניתנת לרדוקציה ל- L_2, ונסמן: $L_1\le L_2$

טענה: $L_D\le L_U\le HP$

תכונות של רדוקציות:
1. $L\le L$ כל שפה היא רדוקציה לעצמה.
2. $L_1\le L_2\Rightarrow \bar{L}_1\le\bar{L}_2$ אותה f שמהווה רדוקציה ל $L_1\le L_2$, מהווה רדוקציה ל $\bar{L}_1\le\bar{L}_2$.
3. $L_1\le L_2\le L_3\Rightarrow L_1\le L_3$ רדוקציה היא יחס טרנזיטיבי.

משפט הרדוקציה:
נוסח 1: תהיינה $L_1, L_2\subseteq\Sigma^*$ שפות המקיימות $L_1\le L_2$ אזי:
א. $L_2\in R\Rightarrow L_1\in R$
ב. $L_2\in RE\Rightarrow L_1\in RE$
ג. $L_2\in CO-RE\Rightarrow L_1\in CO-RE$
נוסח 2: תהיינה $L_1, L_2\subseteq\Sigma^*$ שפות המקיימות $L_1\le L_2$ אזי:
א. $L_1\notin R\Rightarrow L_2\notin R$
ב. $L_1\notin RE\Rightarrow L_2\notin RE$
ג. $L_1\notin CO-RE\Rightarrow L_2\notin CO-RE$

טענה: קיימת שפה שאינה ב-RE (ומכאן שגם אינה ב-R).

<u>הגדרה</u>: *תכונה של שפות* ב-RE היא קבוצת שפות $S\subseteq RE$.
תכונה S היא *טריוויאלית* אם $S=\emptyset$ או $S=RE$.
סימון: עבור תכונה S מוגדרת שפה: $L_s=\{<M>|L(M)\in S\}$.

<u>אבחנה</u>: S טריוויאלית <= $L_s\in R$

<u>משפט רייס (RICE)</u>: S תכונה לא טריוויאלית של שפה ב- RE <= $Ls\notin R$.
עבור RE: S תכונה לא טריוויאלית של שפה ב-RE כך ש $\emptyset\in S$ <= $Ls\notin RE$.

<u>הגדרה</u>: *סיבוכיות קולמגורוב* - מספר המצבים המינימלי של מ"ט שעבור הקלט הריק ε, מוציאה לפלט את x ($x\in\{0,1\}^*$).
מסומן כ $k(x)$.

<u>אבחנות</u>:
1. $k(x)\leq x+1$
2. לכל מספר טבעי n קיימת מחרוזת x כך ש- $k(x)\geq n$.

<u>משפט</u>: הפונקציה: $f=k(x)$ אינה ניתנת לחישוב.

<u>הגדרה</u>: עבור פונקציה f נגדיר *שפה L_f* בצורה הבאה: $L_f=\{(x,y)|y=f(x)\}$.

<u>משפט</u>: 1. f פונקציה ניתנת לחישוב <=> $L_f\in RE$.
2. f פונקציה <u>*מלאה*</u> וניתנת לחישוב <=> $L_f\in R$.

<u>טענה</u>: $L_f\notin RE$ <= f לא ניתנת לחישוב.

<u>הגדרה</u>: *מ"ט אי דטרמיניסטית* מוגדרת כמו מ"ט רגילה פרט לפונקצית המעברים אשר מוגדרת כ- $\delta: Q\times\Gamma\rightarrow(Q\times\Gamma\times\{R,S,L\})^2$
כלומר, לכל קונפיגורציה קיימות שתי קונפיגורציות עוקבות.

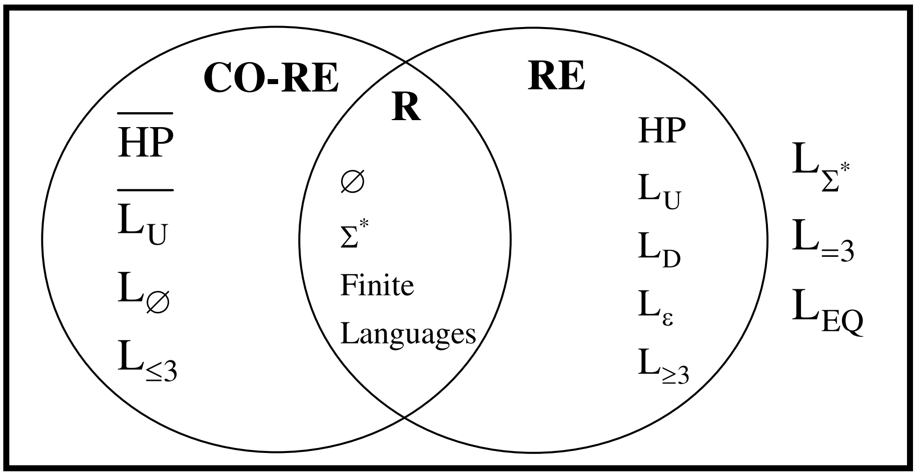
<u>הערות</u>:
1. מ"ט רגילה היא מקרה פרטי של מ"ט אי-דטרמיניסטית כאשר שתי הקונפיגורציות העוקבות שוות זו לזו.
2. קונפיגורציה מוגדרת כמו במ"ט רגילה.
3. מ"ט אי-דטרמיניסטית עם מספר סרטים שקולה למ"ט אי-דטרמיניסטית רגילה.

<u>הגדרה</u>: מ"ט אי-דטרמיניסטית M *מקבלת* קלט X אם קיים מסלול חישוב שבו המכונה עוצרת ב q_{acc}.

<u>משפט</u>: מודל מ"ט אי-דטרמיניסטית שקול למודל מ"ט רגילה, כלומר אוסף השפות המתקבלות ע"י מ"ט אי-דטרמיניסטית שווה לאוסף השפות המתקבל ע"י מ"ט רגילה (דטרמיניסטית).

תמונת העולם:

מרחב השפות: (כולן מעל א"ב {0,1})



ריכוז שפות:

בעיית העצירה/שפת העצירה (Halting Problem): HP={<M>,<X> | M עוצרת על X}

השפה האוניברסלית: L_u={<M>,<X> | M מקבלת את X}

שפת האלכסון - כל המכונות המקבלות את הקידוד של עצמן: L_D={<M> | M מקבלת בריצתה את המחרוזת <M>}

כל המכונות המקבלות כל קלט: $L_{\Sigma^*} = \{< M > | L(M) = \Sigma^*\}$

כל המכונות אשר מקבלות את ε: $L_\varepsilon = \{< M > | \varepsilon \in L(M)\}$

כל המכונות אשר לא מקבלות אף קלט: $L_\varnothing = \{< M > | L(M) = \varnothing\}$

כל המכונות המקבלות אותם קלטים: $L_{EQ} = \{(< M_1 >, < M_2 >) | L(M_1) = L(M_2)\}$

כל המכונות המקבלות 3 או פחות קלטים: $L_{\le 3} = \{< M >: | L(M) | \le 3\}$

כל המכונות המקבלות בדיוק 3 קלטים: $L_{=3} = \{< M >: | L(M) | = 3\}$

כל המכונות המקבלות 3 קלטים או יותר: $L_{\ge 3} = \{< M >: | L(M) | \ge 3\}$