לוגיקה ותורת הקבוצות למדמ"ח

פתרון [חלקי] למועד ב', אביב 2008

שאלה 1

סעיף א'

עבור $i \in \mathbb{N}$ כלשהו יהי פסוק $\varphi_i = (p_{2^i} \to p_{2^{i+1}}) \in \mathrm{WFF}$. נגדיר $\Sigma = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

טענה 0.1 $M(\Sigma) = \mathcal{H}$.

הוכחה: צ"ל: $v \in M(\Sigma)$ אמ"ם v חזקתית.

$v \in M(\Sigma) \iff v \models \Sigma \iff$ לכל $i \in \mathbb{N}$, $v \models (p_{2^i} \to p_{2^{i+1}}) \iff$ לכל $i \in \mathbb{N}$, אם $v(p_{2^i}) = T$ אז $v(p_{2^{i+1}}) = T \iff$ לכל $i \in \mathbb{N}$, אם $v \models p_{2^i}$ אז $v \models p_{2^{i+1}} \iff v$ חזקתית. ■

סעיף ב'

כיוון קל: נניח כי Σ קבוצת פסוקים חזקתית. צ"ל: כל תת־קבוצה סופית שלה היא חזקתית.

Σ חזקתית - מכאן כי קיימת השמה חזקתית v המספקת אותה. כלומר, לכל $\alpha \in \Sigma$, $v \models \alpha$. אזי לכל תת־קבוצה של Σ $D \subseteq \Sigma$ - ובפרט, עבור תת־קבוצה סופית שלה - $v \models D$.

כיוון שני: נניח כי כל תת־קבוצה סופית של Σ היא חזקתית. צ"ל: Σ חזקתית.

כל תת־קבוצה סופית של Σ היא חזקתית, ולכן **ספיקה** ע"י השמה חזקתית. לפי משפט הקומפקטיות

נחזור לזה אחר כך...

סעיף ג'

לא נכון. נוכיח ע"י ליכסון:

נניח בשלילה כי $\mathcal{H}$ בת־מניה. תהי $f : \mathbb{N} \to \mathcal{H}$ חח"ע ועל. נסמן:

$$\begin{aligned}
f(0) &= v_0(p_0)\ v_0(p_1)\ v_0(p_2)\ v_0(p_3)\ v_0(p_4)\ v_0(p_5)\ v_0(p_6)\ v_0(p_7)\\
f(1) &= v_1(p_0)\ v_1(p_1)\ v_1(p_2)\ v_1(p_3)\ v_1(p_4)\ v_1(p_5)\ v_1(p_6)\ v_1(p_7)\\
f(2) &= v_2(p_0)\ v_2(p_1)\ v_2(p_2)\ v_2(p_3)\ v_2(p_4)\ v_2(p_5)\ v_2(p_6)\ v_2(p_7)\\
f(3) &= v_3(p_0)\ v_3(p_1)\ v_3(p_2)\ v_3(p_3)\ v_3(p_4)\ v_3(p_5)\ v_3(p_6)\ v_3(p_7)
\end{aligned}$$

נגדיר השמה:

$$v' = \neg v_0(p_0)\ v_0(p_1)\ v_0(p_2)\ \neg v_1(p_3)\ v_0(p_4)\ \neg v_2(p_5)\ \neg v_3(p_6)\ \neg v_4(p_7)\ v_0(p_8)\ldots$$

ברור כי זוהי השמה חזקתית כי לכל $i \in \mathbb{N}$, $v'(p_{2^i}) = v_0(p_{2^i})$ ו־v_0 היא השמה חזקתית. מאידך, לכל v_k קיים $n \in \mathbb{N}$ שאינו חזקה של 2, כך ש־$v'(p_n) \neq v_k(p_n)$, ולכן $v' \neq f(i)$ לכל $i \in \mathbb{N}$. זוהי סתירה לכך ש־f היא על - ומכאן נובע כי הנחת השלילה שגויה ו־$\mathcal{H}$ אינה בת מניה. מש"ל

סעיף ד'

נסתכל על קבוצת הפסוקים Σ שהגדרנו בסעיף (א). נראה שהיא בת־מניה: תהי פונקציה $f:\mathbb{N}\rightarrow\Sigma$ מוגדרת כך: $f\left(i\right)=p_{2^{i}}\rightarrow p_{2^{i+1}}$ לכל $i\in\mathbb{N}$. מעצם הצורה בה הגדרנו את Σקל לראות כי f היא חח"ע ועל.

כעת נסתכל על $\Gamma=\mathcal{P}\left(\Sigma\right)$. ברור כי מהצורה שבה הגדרנו את הפסוקים ב־Σ נובע שלכל v השמה חזקתית ולכל פסוק $\alpha\in\Sigma$, $v\models\alpha$, ולכן לכל $\Upsilon\subseteq\Sigma$ מתקיים כי $v\models\Upsilon$ (לכל השמה חזקתית). מכאן כי $\Gamma\subseteq\mathcal{F}$ ולכן $\Gamma\preccurlyeq\mathcal{F}$. כמו כן, Γ היא קבוצת החזקה של Σ ־ שהראינו כי היא בת מניה ־ ולכן $\left|\Gamma\right|=2^{\aleph_{0}}$ והיא אינה בת מניה. מכאן נובע כי גם $\mathcal{F}$ אינה בת־מניה. מש"ל

שאלה 2

סעיף א'

אינטואיציה: כלל ההיסק שלנו הוא Modus Ponens. הבסיס הוא כל הפסוקים שנכונים תמיד. מערכת זו דומה מאוד למערכת שאנו מכירים, ולכן נצפה שגם היא תהיה שלמה ונאותה.

צ"ל: לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק α, אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

הוכחה באינדוקציה על מבנה מערכת ההוכחה:

בסיס: אם α טאוטולוגיה אז $\Sigma \models \alpha$ לכל Σ. אחרת אם $\alpha \in \Sigma$ אז כל השמה שמספקת את Σ מספקת בפרט את α, ולכן $\Sigma \models \alpha$.

ה"א: יהיו $\Sigma \models \gamma$, $\Sigma \models \gamma \to \beta$.

צעד: צ"ל: $\Sigma \models \beta$. $\Sigma \models \gamma$, לכן לכל השמה v שמספקת את Σ, $v \models \gamma$. כמו כן $\Sigma \models \gamma \to \beta$, לכן לכל השמה v כנ"ל $v \models \gamma \to \beta$. לפי טבלת אמת $\mathrm{TT}_{\to}$ נובע כי $v \models \beta$, ולכן $\Sigma \models \beta$.

סעיף ב'

צ"ל: לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק α, אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

מנאותות נובע שאם קבוצת פסוקים X היא ספיקה אז היא עקבית. לכן אם X אינה ספיקה אז בהכרח אינה עקבית.

נניח $\Sigma \models \alpha$. אזי נובע כי $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ אינה ספיקה, ומכאן שאינה עקבית. כיוון שאינה עקבית כל פסוק יכיח ממנה, ובפרט $\Sigma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$. כמו כן ברור כי $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$ (כי α הנחה). ממשפט הדיכוטומיה נובע לכן כי $\Sigma \vdash \alpha$. מש"ל

סעיף ג'

לא נכון. דוגמא נגדית מפורשת:

תהי $\Sigma = \{p_1\}$, והצבה $s(p_1) = p_1 \to \neg p_1$. נשים לב כי $s(p_1)$ הינה סתירה. אזי $\Sigma \models p_1$ ולכן $\Sigma \vdash_N \alpha$. מאידך, $\Sigma \not\models p_1 \to \neg p_1$, ולכן $\Sigma \nvdash s(p_1)$.

סעיף ד'

נתון: $\Sigma \vdash_N \alpha$. נוכיח באינדוקציה על מבנה $Ded_N(\Sigma)$:

בסיס: אם $\alpha \in \Sigma$ אז $subst(\alpha, s) \in subst(\Sigma, s)$ ולכן יכיחה מתוך $subst(\Sigma, s)$.

ה"א: עבור $\gamma, \gamma \to \alpha \in Ded_N(\Sigma)$, קיימים $subst(\gamma, s), subst(\gamma) \to subst(\alpha, s) \in Ded_N(subst(\Sigma, s))$.

צעד: $MP(subst(\gamma, s), subst(\gamma) \to subst(\alpha, s)) = subst(\alpha, s)$, ולכן $subst(\alpha, s) \in Ded_N(subst(\Sigma, s))$. מש"ל

שאלה 3

סעיף א'

לא נכון. דוגמא נגדית מפורשת:

נגדיר $\varphi = R(x,c)$. יהי מבנה $M = \{\mathbb{N}, R, +1, 0\}$, כאשר $(a,b) \in R \iff a = b$. אזי למשל עבור ההשמה $s[x \leftarrow 0]$, $M \models_s \varphi$. מאידך, $M \models_s \forall x R(x,c) \iff$ לכל $d \in \mathbb{N}$, $(d,0) \in R \iff$ לכל $d \in \mathbb{N}$, $d = 0$ - וזה כמובן לא מתקיים. מכאן כי $M \not\models_s \forall x \varphi$.

סעיף ב'

נתון כי x הוא המשתנה החופשי היחיד ב־φ. יהיו מבנה M והשמה s כך ש־$M \models_s \forall x \varphi$. אזי לכל $d \in D^M$, $M \models_{s[x \leftarrow d]} \varphi$. כפי שהראינו בכיתה, ספיקות של נוסחא ע"י השמה מסויימת מוגדרת רק ע"י הערכים שההשמה נותנת למשתנים החופשיים בנוסחא. נתון לנו כי x הוא המשתנה היחיד בנוסחא, ואנו יודעים כי $M \models_{s[x \leftarrow d]} \varphi$ $d \in D^M$ - בפרט, עבור $d = s(x)$. מכאן כי $M \models_s \varphi$.

סעיף ג'

לא נכון. דוגמא נגדית מפורשת:

יהיו הפסוק המבנה כמו בסעיף (א), ותהי ההשמה הבאה: $s[x \leftarrow 1]$. אזי $M \models_s \exists x \varphi$ כי קיים $d = 0 \in \mathbb{N}$ כך ש־$(0,0) \in R$. מאידך, $M \not\models_s \varphi$ כי $(s(x), c) = (1,0) \notin R$.

שאלה 4

ראו פיתרון שאלה 3, תרגיל בית 12 של סמסטר חורף 2008-2009.