234293 - Logic and Set Theory for Comp. Sci.

Spring 2008 Moed A Final – [partial] solution

שאלה 1

סעיף א'

לא נכון. דוגמא נגדית מפורשת:

יהיו $\Sigma_1 = \{p_1 \wedge p_2\}$, $\Sigma_2 = \{p_2 \wedge p_1\}$. $(p_1 \wedge p_2) \equiv (p_2 \wedge p_1)$, לכן ברור כי $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. כמו כן, כיוון ש־$(p_1 \wedge p_2) \equiv (p_2 \wedge p_1)$ ניתן לראות כי $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \equiv \Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. מאידך, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ ולכן טאוטולוגיה. כיוון שלמשל $V_F \not\models \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ברור כי $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \not\equiv \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

סעיף ב'

נפרק למקרים:

- אם $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ אזי כל השמה מספקת אותה (טאוטולוגיה), ומהשקילות בנתון נובע כי $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ טאוטולוגיה ־ כלומר גם Σ_1 וגם Σ_2 טאוטולוגיות. לכן נובע כי $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.
- נניח כי קיימת קבוצת פסוקים לא ריקה כך ש־$\Gamma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. תהי השמה v. נניח בה"כ כי $v \models \Sigma_1$, ונניח בשלילה כי $v \not\models \Sigma_2$. $v \models \Sigma_1$, ולכן בפרט מספקת כל פסוק בחיתוך (כי הפסוק הזה שייך גם ל־Σ_1). מכאן נובע כי $v \models \Gamma$. מאידך, $v \not\models \Sigma_2$ ולכן לא מספקת את האיחוד. קיבלנו כי $v \models \Gamma$, $v \not\models \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ־ סתירה לנתון! לכן לא קיימת השמה כזאת.

לכן החיתוך והאיחוד שקולות. מש"ל

סעיף ג'

כיוון קל: נניח בה"כ כי קיים פסוק כך ש־$\Sigma_1 \models \alpha$, $\Sigma_2 \not\models \alpha$. מכאן נובע כי קיימת השמה $v \models \Sigma_2$, $v \not\models \alpha$. כיוון שכל השמה שמספקת את Σ_1 מספקת את α, מתקיים בהכרח ש־$v \not\models \Sigma_1$. מצאנו השמה שמספקת קבוצה אחת ולא את השניה, ולכן הן אינן שקולות.

כיוון שני: נניח בשלילה כי לא קיים פסוק α כך ש־$\Sigma_1 \models \alpha$, $\Sigma_2 \not\models \alpha$ **או** $\Sigma_2 \models \alpha$, $\Sigma_1 \not\models \alpha$. כלומר, לכל פסוק מתקיים ש־$\Sigma_1 \models \alpha$ אמ"ם $\Sigma_2 \models \alpha$. יהי $\alpha \in \Sigma_1$. אזי ברור כי $\Sigma_1 \models \alpha$, ומכאן נובע כי גם $\Sigma_2 \models \alpha$. תהי השמה $v \models \Sigma_2$. אזי קיבלנו כי $v \models \alpha$ **לכל** $\alpha \in \Sigma_1$ ־ כלומר, $v \models \Sigma_1$. באותה צורה בכיוון ההפוך נקבל שאם $v \models \Sigma_1$ אז $v \models \Sigma_2$. קיבלנו $v \models \Sigma_1 \iff v \models \Sigma_2$, כלומר שהן שקולות ־ בסתירה לנתון. לכן הנחת השלילה שגויה ולכן קיים פסוק כנ"ל. מש"ל

שאלה 2

סעיף א'

לא נכון. דוגמא נגדית מפורשת:

תהי $\Sigma = \{\neg (p_o \vee \neg p_0) \vee p_0, \neg (p_o \vee \neg p_0) \vee \neg p_0\}$. $\neg (p_o \vee \neg p_0) \vee p_0$ ספיק למשל ע"י v_T. $\neg (p_o \vee \neg p_0) \vee \neg p_0$ ספיק למשל ע"י v_F. לכן Σ אינה מכילה סתירה. מאידך, $\gamma = \neg (p_o \vee \neg p_0) \in Ded_N (\Sigma)$ כי $\gamma = P (\neg (p_o \vee \neg p_0) \vee p_0, \neg (p_o \vee \neg p_0) \vee \neg p_0)$, וברור כי $\neg (p_o \vee \neg p_0)$ היא סתירה.

סעיף ב'

לא נכון. דוגמא נגדית:

תהי $\Sigma = \{p_o, \neg p_0\}$. אזי ברור כי היא אינה ספיקה! נוכיח באינדוקציה על מבנה $Ded_N (\Sigma)$ כי היא אינה מכילה סתירה:

בסיס: $\alpha \in \text{Tautologies} \cup \Sigma$ אינה מכילה סתירה כי $\alpha \in \text{Tautologies}$ או $\alpha \in \Sigma$ והן אינן מכילות סתירות.

ה"א: $\alpha \vee \beta \in Ded_N (\Sigma)$, $\alpha \vee \neg\beta \in Ded_N (\Sigma)$ אינן סתירות.

צעד: ב־Σ לא קיימים פסוקים מהצורה $\gamma \vee \delta$, לכן לא יתכן כי $\alpha \vee \beta$ או $\alpha \vee \neg\beta$ התקבלו תוך שימוש בפסוקים ממנה. נובע כי הם טאוטולוגיות או התקבלו מטאוטולוגיות ע"י שימוש בפעולת הסגור. במילים אחרות, $\alpha\vee\beta \in Ded_N (\emptyset)$, $\alpha \vee \neg\beta \in Ded_N (\emptyset)$. נראה כי מכאן נובע ש־$\alpha = P (\alpha \vee \beta, \alpha \vee \neg\beta)$ אינה סתירה. כלומר, נראה כי $Ded_N (\emptyset)$ אינה מכילה סתירה. נניח בשלילה שהיא מכילה סתירה λ. לא יתכן כי היא הגיעה מהבסיס כי הבסיס מכיל רק טאוטולוגיות. אזי נובע כי $\lambda = P (\lambda \vee \rho, \lambda \vee \neg\rho)$. אין לי מושג...

שאלה 3

סעיף א'

1. $\varphi_1 = \forall f \left(F\left(f,I\right) \approx f\right)$. המשמעות של הפסוק במבנה הנ"ל: לכל פונקציה בעולם שלנו, ההרכבה של הפונקציה הזו על I תיתן את הפונקציה עצמה. זה מתקיים כמובן אך ורק עבור I שהיא פונקציית הזהות.
2. $\varphi_2 = \varphi_1 \wedge \left(F\left(x,y\right) \approx I\right)$. החלק הראשון של הנוסחא הוא הנוסחא מהסעיף הקודם. הדבר מבטיח כי ה־I המתאים היחיד יהיה פונקציית הזהות. **בנוסף**, אנו דורשים כי הרכבת פונקציה x על y תיתן לנו את I ־ שהיא פונקציית הזהות. זה מתקיים אמ"ם x ו־y הן פונקציות הופכיות.

סעיף ב'

כיוון ראשון: תהי $A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ כלשהי, ותהי $f \in S_{\mathbb{N}}$ כך ש־$X_f = A$. צ"ל: $|A| \neq 1$.

נניח בשלילה כי $A = \{n\}$. אזי נובע כי $f\left(i\right) = \begin{cases} j \neq i & i = n \\ i & \text{otherwise} \end{cases}$. מהגדרת f נובע $f\left(i\right) = j = f\left(j\right)$ ־ בסתירה לחד־חד ערכיות. לכן הנחת השלילה שגויה ו־$|A| \neq 1$.

כיוון שני: תהי $A \in \mathcal{P}\left(\mathbb{N}\right)$ כלשהי, כך ש־$|A| \neq 1$. צ"ל: קיימת $f \in S_{\mathbb{N}}$ כך ש־$X_f = A$.

נסמן $|A| = m$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$\begin{aligned} f\left(a_1\right) &= a_2 \\ f\left(a_2\right) &= a_3 \\ &\vdots \\ f\left(a_m\right) &= a_1 \\ f\left(i\right) &= i \quad i \neq a_1 \ldots a_m \end{aligned}$$

(ההגדרה עובדת גם במקרה ש־A היא הקבוצה הריקה ־ אז f היא פשוט פונקציית הזהות וכמובן שהיא חח"ע ועל).

נראה כי f חח"ע ועל:
יהי $n \in \mathbb{N}$. אם $n = a_i, 2 \leq i \leq m-1$ אז $f\left(a_{i+1}\right) = n$. אם $n = a_1$ אז $f\left(a_m\right) = m$. אחרת, המקור של n הוא n עצמו. לכל ערך יש מקור, כלומר f חח"ע.
יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ כך ש־$f\left(a\right) = f\left(b\right)$. אזי ע"י אותו פירוק למקרים נגיע לכך ש־$a = b$. כלומר, f חח"ע.

f חח"ע ועל, כלומר $f \in S_{\mathbb{N}}$. מש"ל

סעיף ג'

טענה 0.1 $S_{\mathbb{N}}$ אינסופית לא בת־מניה.

הוכחה: בסעיף (ב) הראנו כי לכל תת־קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש־$|A| \neq 1$, קיימת $f \in S_{\mathbb{N}}$ כך ש־$X_f = A$. ברור כי לכל $A \neq A'$ כנ"ל, הפונקציות המתאימות f, f' הן שונות. מכאן כי $S_{\mathbb{N}} \succcurlyeq \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A| = 1\}$. גודלה של $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ הוא $2^{\aleph_0}$. מס' הקבוצות בה שהן בגודל 1 הוא $\aleph_0$. לכן גודלה של $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |A| = 1\}$ הוא $2^{\aleph_0} - \aleph_0$ ־ כלומר אינסופית לא בת־מניה. מכאן כי גם $S_{\mathbb{N}}$ אינסופית לא בת־מניה. מש"ל ■

סעיף ד'

טענה 0.2 $R^* = S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$.

הוכחה: תהי $I \in S_{\mathbb{N}}$ פונקציית הזהות (ברור כי I חח"ע ועל). $X_I = \emptyset$, ולכן לכל שתי פונקציות $h, g \in S_{\mathbb{N}}$ מתקיים $X_h \cap X_I = X_I \cap X_g = \emptyset$, כלומר $(h, I), (I, g) \in R$ ולכן $(h, g) \in R^2$. כיוון ש־$R^* = \bigcup R^i$, מתקיים בהכרח כי $R^* = S_{\mathbb{N}} \times S_{\mathbb{N}}$. מש"ל ■

שאלה 4

סעיף א'

נגדיר $\varphi_n = \forall x \left((t_0 \approx x) \vee (t_1 \approx x) \vee \ldots (t_n \approx x) \right)$, ותהי $\Sigma = \{\varphi_n\}$. משמעות הפסוק היא כי לכל איבר בעולם, t_0 שווה לאותו איבר, או t_1 שווה לו, וכן הלאה עד t_n. כלומר, ניתן לראות כי מבנה מספק את הפסוק הנ"ל אמ"ם הוא מקיים את ההגדרה של מבנה ציקלי.

סעיף ב'

נגדיר $\psi_n = \exists x \neg \left((t_0 \approx x) \vee (t_1 \approx x) \vee \ldots (t_n \approx x) \right)$, ותהי $\Sigma = \{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots\}$. משמעות הפסוק הנתון היא כי קיים איבר בעולם שאינו שווה לאף אחד משמות העצם $t_0 \ldots t_n$ ־ כלומר, המבנה אינו n־ציקלי. כיוון שכללנו את הפסוק הנ"ל עבור כל n טבעי ־ נובע שמבנה שמספק את הקבוצה הוא לא ציקלי.

סעיף ג'

טענה 0.3 הקבוצה הנ"ל אינה גדירה.

הוכחה: נניח בשלילה כי היא גדירה ע"י קבוצת פסוקים X. תהי Y קבוצת הפסוקים מסעיף (ב). אזי $M(Y) \cap M(X) = \emptyset$ כי אחד הוא קבוצת כל המבנים הציקליים והשני קבוצת כל המבנים שאינם ציקליים. נובע לכן כי $X \cup Y$ אינה ספיקה.

תהי $D \subseteq X \cap Y$ תת־קבוצה סופית. נסמן $D_X = D \cap X$ ו־$D_Y = D \cap Y$. $D_Y = \{\psi_{i_1}, \psi_{i_2}, \ldots, \psi_{i_k}\}$. מבנה M מקיים את D_Y אמ"ם הוא אינו l־ציקלי, כאשר $i_1 \leq l \leq i_k$. נגדיר $i_{max} = max\{i_1, \ldots i_k\}$. נגדיר מבנה $M = \{\{0, 1, 2, 3 \ldots, i_{max} + 1\}, +, 0\}$. קל לראות כי מבנה זה הוא $(i_{max} + 1)$־ציקלי, ומכאן שאינו l־ציקלי, ולכן $M \models D_Y$. כמו כן המבנה הוא ציקלי ולכן גם $M \models D_X$. לפי משפט הקומפקטיות נובע כי $X \cup Y$ ספיקה ־ סתירה! לכן X כנ"ל לא קיימת וקבוצת המבנים כנ"ל אינה גדירה. ■

סעיף ד'

לא נכון. דוגמא נגדית מפורשת:

יהי המבנה $M = \{\{0, 1, 2, \ldots, 100\}, +, 2\}$. התחום סופי. האם המבנה ציקלי? עבור $1 \in D^M$, למשל, לא קיים $t_k = 1$ כי לכל t_i מתקיים ש־t_i הוא זוגי. לכן המבנה אינו ציקלי. מש"ל