לוגיקה 1 - דף עזר

תחשיב הפסוקים.

מושגי יסוד סמנטיים:

- פסוק α נקרא טאוטולוגיה (נסמן: $\models\alpha$) אם לכל השמה u מתקיים: $\bar{u}(\alpha) = T$.
- פסוק α נקרא סתירה אם לכל השמה u מתקיים: $\bar{u}(\alpha) = F$.
- פסוק α נקרא ספיק אם קימת השמה u כך שמתקיים: $\bar{u}(\alpha) = T$.
- עבור α ו- β פסוקים, נאמר ש-α גורר-לוגית את β (או: β נובע-לוגית מ- α), ונסמן: $\alpha \models \beta$, אם כל השמה המספקת את α, מספקת גם את β (כלומר: לכל השמה u, אם $\bar{u}(\alpha) = T$, אז גם $\bar{u}(\beta) = T$).
- עבור α ו- β פסוקים, נאמר ש-α ו- β שקולים-לוגית אם לכל השמה u מתקיים: $\bar{u}(\alpha) = \bar{u}(\beta)$.
- עבור קבוצת פסוקים Σ והשמה u, נאמר ש-u מספקת את Σ, אם לכל $\alpha\in\Sigma$ מתקיים: $\bar{u}(\alpha) = T$.
- קבוצת פסוקים Σ תקרא ספיקה אם קיימת השמה u המספקת את Σ.
- עבור קבוצת פסוקים Σ ופסוק α, נאמר ש-Σ גוררת-לוגית את α (או: α נובע-לוגית מ-Σ) ונסמן: $\Sigma \models \alpha$, אם לכל השמה u המספקת את Σ, מתקיים גם: $\bar{u}(\alpha) = T$.
- עבור Σ_1, Σ_2 קבוצות פסוקים, נאמר ש-Σ_1 ו-Σ_2 שקולות-לוגית אם לכל השמה u מתקיים: u מספקת את Σ_1 אס"ם u מספקת את Σ_2.

מערכת הוכחה לתחשיב הפסוקים:

- בסיס - קבוצת האקסיומות (עבור α, β, γ פסוקים כלשהם):
  1. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
  3. $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$
- פעולת סגור - כלל ההיסק:

  כלל הניתוק (MP): מהפסוקים α ו-$\alpha\to\beta$, ניתן להסיק את הפסוק β.

משפטים פורמליים שהוכחו בכיתה:

1. $\vdash \alpha \to \alpha$
2. $\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$
3. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$
4. $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
5. $\vdash (\alpha\to\neg\alpha) \to \neg\alpha$
6. $\vdash (\neg\alpha\to\alpha) \to \alpha$
7. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
8. $\{ \alpha \to \beta, \beta \to \gamma \} \vdash \alpha \to \gamma$

משפט ההיסק (דדוקציה):

לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל שני פסוקים α ו-β מתקיים: $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$ אס"ם $\Sigma\cup\{\alpha\} \vdash \beta$.

משפט הנאותות:

לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק α מתקיים: אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

משפט השלמות:

לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק α מתקיים: אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

עקביות:

שתי ההגדרות הבאות שקולות:

- קבוצת פסוקים Σ היא עקבית אם לא קיים פסוק α כך ש- $\Sigma \vdash \alpha$ וגם $\Sigma \vdash \neg\alpha$.
- קבוצת פסוקים Σ היא עקבית אם קיים פסוק α כך ש- $\Sigma \nvdash \alpha$.

משפטים (קבוצת פסוקים עקבית):

- לכל קבוצת פסוקים Σ, Σ ספיקה אס"ם Σ עקבית.
- לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק α מתקיים: $\Sigma\cup\{\alpha\}$ היא עקבית אס"ם $\Sigma \nvdash \neg\alpha$

עקביות-מקסימלית:

שתי ההגדרות הבאות שקולות:

- קבוצת פסוקים Σ היא עקבית-מקסימלית אם Σ עקבית, ולכל פסוק α מתקיים: $\Sigma \vdash \alpha$ או $\Sigma \vdash \neg\alpha$.
- קבוצת פסוקים Σ היא עקבית-מקסימלית אם Σ עקבית, ולכל פסוק α כך ש-$\Sigma \nvdash \alpha$, $\Sigma\cup\{\alpha\}$ אינה עקבית.

משפטים (קבוצת פסוקים עקבית-מקסימלית):

- קבוצת פסוקים Σ היא עקבית-מקסימלית אס"ם יש ל-Σ השמה מספקת אחת בדיוק.
- לכל קבוצת פסוקים עקבית Σ קיימת קבוצת פסוקים עקבית-מקסימלית Σ' המכילה את Σ ($\Sigma\subseteq\Sigma'$).

המשך מעבר לדף...

משפט הקומפקטיות:
קבוצת פסוקים Σ היא ספיקה אס"ם כל תת קבוצה סופית של Σ היא ספיקה.

גדירות בתחשיב הפסוקים:
- עבור קבוצת פסוקים Σ נסמן: $M(\Sigma) = \{ u \mid \Sigma$ מספקת את $u \}$.
- נאמר שקבוצת פסוקים Σ מגדירה קבוצת השמות K אם מתקיים: $K = M(\Sigma)$.
- קבוצת השמות K תקרא גדירה אם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה אותה (כלומר, Σ שמקיימת: $K = M(\Sigma)$)

תחשיב היחסים

אוסף שמות העצם מעל מילון τ נתון:
- בסיס:
  I. משתנים
  II. סימני קבועים מהמילון
- פעולות סגור:
  הפעלת סימני פונקציות מהמילון: עבור $t_1, t_2, \ldots, t_n$ שמות עצם מעל τ, ו-F סימן פונקציה n-מקומי מתוך τ, גם הביטוי $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ הוא שם-עצם מעל τ.

אוסף הנוסחאות מעל מילון τ נתון:
- בסיס:
  נוסחאות אטומיות: עבור $t_1, t_2, \ldots, t_n$ שמות עצם מעל τ, ו-R סימן יחס n-מקומי מתוך τ, הביטוי $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ הוא נוסחה אטומית מעל τ.
- פעולות סגור:
  I. הפעלת קשרים-לוגיים על נוסחאות: עבור φ, ψ נוסחאות מעל τ, גם הביטויים $\neg\varphi, \varphi\vee\psi, \varphi\wedge\psi, \varphi\to\psi$ הם נוסחאות מעל τ.
  II. הפעלת כמתים על נוסחאות: עבור φ נוסחה מעל τ ו-x משתנה, גם הביטויים $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ הם נוסחאות מעל τ.

הגדרה:
נוסחה φ תקרא פסוק אם אין ב-φ משתנים חופשיים (כלומר: כל המשתנים המופיעים ב-φ הם קשורים).

הגדרת מבנה:
בהינתן מילון $\tau = \langle R_1, R_2, \ldots R_n, F_1, F_2, \ldots F_k, C_1, C_2, \ldots C_m \rangle$,
מבנה M עבור המילון τ יהיה $M = \langle D^M, R_1^M, R_2^M, \ldots R_n^M, F_1^M, F_2^M, \ldots F_k^M, C_1^M, C_2^M, \ldots C_m^M \rangle$, כאשר:
D^M היא קבוצת התחום,
לכל $1 \le i \le n$, R_i^M הוא יחס t_i מקומי מעל D^M (כאשר מספר המקומות t_i נקבע על-ידי מספר המקומות ב-R_i),
לכל $1 \le i \le k$, F_i^M היא פונקציה מ- $(D^M)^{q_i}$ ל- D^M (כאשר מספר המקומות q_i נקבע על-ידי מספר המקומות ב-F_i),
ולכל $1 \le i \le m$, מתקיים: $C_i^M \in D^M$.

מושגי יסוד סמנטיים:
- נוסחה φ תקרא אמת לוגית אם לכל מבנה M ולכל השמה s ב-M מתקיים: $M \models_s \varphi$.
- נוסחה φ תקרא סתירה אם לכל מבנה M ולכל השמה s ב-M מתקיים: $M \not\models_s \varphi$.
- נוסחה φ תקרא ספיקה אם קיים מבנה M וקיימת השמה s ב-M כך שמתקיים: $M \models_s \varphi$.
- עבור קבוצת נוסחאות Σ, מבנה M והשמה s ב-M, נאמר ש-Σ מסתפקת במבנה M תחת ההשמה s,
  ונסמן: $M \models_s \Sigma$, אם לכל $\varphi\in\Sigma$ מתקיים: $M \models_s \varphi$.
- קבוצת נוסחאות Σ תקרא ספיקה אם קיימים מבנה M והשמה s ב-M כך שמתקיים: $M \models_s \Sigma$.
- עבור קבוצת נוסחאות Σ ונוסחה φ, נאמר ש-Σ גוררת-לוגית את φ, ונסמן: $\Sigma \models \varphi$, אם לכל מבנה M ולכל השמה s ב-M מתקיים: אם $M \models_s \Sigma$, אז גם $M \models_s \varphi$.

הוצאת כמתים:
- $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
- $(\varphi \to \forall x\psi) \equiv \forall x(\varphi \to \psi)$ כאשר x אינו חופשי ב φ.
- $(\varphi \to \exists x\psi) \equiv \exists x(\varphi \to \psi)$ כאשר x אינו חופשי ב φ.
- $(\forall x\varphi \to \psi) \equiv \exists x(\varphi \to \psi)$ כאשר x אינו חופשי ב ψ.
- $(\exists x\varphi \to \psi) \equiv \forall x(\varphi \to \psi)$ כאשר x אינו חופשי ב ψ.

כאשר ≡ מסמל שקילות לוגית.

<u>מערכת הוכחה לתחשיב היחסים :</u>

- בסיס - קבוצת האקסיומות :

קבוצת האקסיומות היא קבוצה אינדוקטיבית I(A,P) כאשר הבסיס כולל 6 סוגי נוסחאות :

1. כל הצבה של נוסחאות בטאוטולוגיות מתחשיב הפסוקים.
2. כל נוסחה מהצורה $\forall x\alpha \to \alpha_x^t$ כאשר α_x^t היא הצבה מותרת של שם עצם t במקום משתנה x (לא השתנה מספר המשתנים הקשורים בt המופיע ב α).
3. כל נוסחה מהצורה $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$ עבור כל זוג נוסחאות.
4. כל נוסחה מהצורה $\alpha \to \forall x\alpha$ כאשר α נוסחה וx משתנה חופשי ב α.
5. כל נוסחה מהצורה x=x כאשר x משתנה כלשהו.
6. כל נוסחה מהצורה $(x = y) \to (\alpha \to \alpha_x^y)$ כאשר α נוסחה אטומית ו α_x^y מתקבלת ע"י החלפת חלק מההופעות (או כל ההופעות) של המשתנה x ב α במשתנה y.

כלל יצירה לאקסיומות : אם α אקסיומה, אז גם $\forall x\alpha$ אקסיומה, עבור כל משתנה x.

- כלל היסק : בהנתן ש α יכיחה וש $\alpha \to \beta$ יכיחה, נקבל ש β יכיחה.

<u>משפט ההיסק (דדוקציה)</u> (כמו בתחשיב הפסוקים) :

לכל קבוצת נוסחאות Σ ולכל שתי נוסחאות α ו-β מתקיים : $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$ אס"ם $\Sigma\cup\{\alpha\} \vdash \beta$.

<u>משפט הנאותות</u> (כמו בתחשיב הפסוקים) :

לכל קבוצת נוסחאות Σ ולכל נוסחה α מתקיים : אם $\Sigma \vdash \alpha$ אז $\Sigma \models \alpha$.

<u>משפט השלמות</u> (כמו בתחשיב הפסוקים) :

לכל קבוצת נוסחאות Σ ולכל נוסחה α מתקיים : אם $\Sigma \models \alpha$ אז $\Sigma \vdash \alpha$.

<u>משפט הקומפקטיות</u> : (כמו בתחשיב הפסוקים)

קבוצת נוסחאות Σ היא ספיקה אס"ם כל תת קבוצה <u>סופית</u> של Σ היא ספיקה.

<u>גדירות של קבוצות מבנים בתחשיב היחסים :</u>

- עבור קבוצת פסוקים (של תחשיב היחסים) Σ נסמן : $M(\Sigma) = \{ M \mid M \models \Sigma \}$.
- נאמר שקבוצת פסוקים Σ (מעל מילון τ) מגדירה קבוצת מבנים K (עבור τ), אם מתקיים : $K = M(\Sigma)$.
- קבוצת מבנים K תקרא <u>גדירה</u> אם קיימת קבוצת פסוקים Σ שמגדירה אותה (כלומר, Σ שמקיימת $M(\Sigma) = K$).