BFS (לא מכוון)

מחלק את צמתי הגרף לשכבות ע"פ מרחקם מצומת ההתחלה s. סיבוכיות o(|e|+|v|) ואם הגרף קשיר יש |v|-1 קשתות לפחות ולכן e הדומיננטי כלומר o(|e|).

למה1: לכל קשת (u-v) $\delta(s,v) \le \delta(s,u)+1$

למה2: לכל v בכל שלב $d(v) \ge \delta(s,v)$. ההוכחה באינדוקציה על מס' הצמתים ב-Q: במעבר: נניח שu בראש Q וv צומת חדש, לפי האלג' $d(v)=d(u)+1$ ולפי הנחת האינדוקציה והלמה הקודמת: $d(v)=d(u)+1 \ge \delta(s,u)+1 \ge \delta(s,v)$.

למה3: בכל שלב התור מקיים $d(v_i) \le d(v_{i+1})$ וכן $d(v_n) \le d(v_1)+1$. ההוכחה באינדוקציה על מספר הפעולות שבוצעו על Q. *בהוצאת* איבר המשך התור מונוטוני לא יורד ע"פ ה"א וכן $d(v_n) \le d(v_1)+1 \le d(v_2)+1$. *בהכנסת* v_{n+1} מתקיים $d(v_{n+1})=d(v_1)+1$ ובנוסף לפי ה"א $d(v_n) \le d(v_1)+1=d(v_{n+1})$.

משפט: בסיום הריצה לכל צומת $d(v)=\delta(v)$. ההוכחה באינדוקציה על אורך המסלול הקצר ביותר מs לשאר הצמתים. במעבר לצומת הk+1 יש 2 אפשרויות: או שהצומת החדש v לבן ואז $d(v)=\delta(s,v)=k+1$ או שהוא אפור כלומר התגלה כבר קודם ע"י u שהיה בראש התור לפני w וכיוון שסדרת התויות לא יורדת $d(u) \le d(w) \le k$ כלומר $d(v) \le k+1$ אבל לפי למה 2 $d(v) \ge \delta(s,v)=k+1$ ולכן $d(v)=k+1$.

האלג':
כל צומת פרט לs צבע בלבן, עדכן $\pi(v)=null$ ועדכן תוית d לאינסוף. את s נצבע באפור ונתן $\pi(s)=null$ $d(s)=0$ ראש התור מקבל את s. כל עוד התור לא ריק נעבור על כל השכנים של ראש התור, אם הם לבנים נצבע אותם באפור, ניתן להם תוית ששוה לזו של ראש התור +1 נעדכן את π ונכניס אותם לתור. נוציא את ראש התור מהתור ונצבע אותו בשחור.
בנוסף מתקיים שהמצביעים π מהווים עץ מכוון ששורשו s ע"פ משפטי שקילות עצים (לכל צומת דרגת כניסה=1).

DFS חיפוש לעומק בגרפים לא מכוונים

האלג':
i מקבל 2, k(s) מקבל 1. s מרכז הפעילות. נאתחל כל קשת לחדשה, כל תוית של צומת לאפס ולכל צומת את אביו לאפס. כל עוד יש למרכז הפעילות קשת או שיש לו אב (כלומר יש לאן לסגת) אז אם יש קשת חדשה סמן אותה כישנה ואם הצומת שמתגלה ממנה חדש אז עדכן את אביו להיות הצומת שבמרכז הפעילות, את התוית שלו להיות I, מקדמים את i באחד, ושים אותו במרכז הפעילות. אחרת אם אין קשת חדשה נבצע נסיגה מהצומת שבמרכז הפעילות לאביו.
סיבוכיות: לכל קשת o(1). מעבר על רשימת השכנויות של כל צמתי הגרף o(|el), אתחול o(|e|+|v|), סה"כ o(|e|+|v|).
טענה1: אם u שייך לרכיב הקשירות של s אז u מתגלה ב DFS.
יש מסלול מs לu ונניח שu לא התגלה אבל אז מרכז הפעילות לא היה יכול לסגת מהצומת שממנו יש קשת לu כי היא מסומנת כחדשה. מאותו שיקול מרכז הפעילות לא יכול היה להגיע לs בסתירה לכך שהתחלנו מs.
טענה2: הגרף המתקבל מריצת DFS הוא עץ מכוון ששורשו s.
גרף התשתית קשיר כי כל צומת התגלה, דרגת הכניסה של כל צומת פרט לs היא 1 ושל s היא 0 ולכן לפי משפט אפיון עצים זהו עץ.
טענה3: בעץ DFS של גרף לא מכוון אין קשתות חוצות a-b.
נניח שמרכז הפעילות היה בa לפניb וb אינו צאצא שלa. אז b התגלה רק לאחר שמרכז הפעילות נסוג מa (אחרת b היה צאצא שלa) אבל המרכז נסוג מa רק לאחר שהקשתa-b התגלתה כך שאם b עוד לא התגלה בשלב זה יש סתירה.

DFS חיפוש לעומק בגרפים מכוונים

עוברים רק על הקשתות היוצאות מכל צומת. מקבלים אוסף של עצים מכוונים ששורשיהם הם הצמתים שנבחרים להיות מרכז הפעילות בכל פעם שמסתיים רכיב קשירות. סיבוכיות כמו בלא מכוון. בDFS מכוון יש קשתות חוצות!!!
משפט: ב מכוון v צאצא שלu בעץ ה DFS אמ"ם כש u התגלה ניתן היה להגיע מu לv במסלול שעובר רק דרך צמתים שעוד לא התגלו (כוללv).
1.נניח שv צאצא של u וקיים מסלול u-...-π(v)-v בעץ אז כל הצמתים בתת העץ של u עוד לא התגלו ולכן קיים מסלול כמו במשפט.
2.נניח שקיים מסלול שמכיל רק צמתים חדשים כשu התגלה ונניח בשלילה שv אינו צאצא שלu בעץ, בה"כ נניח שv הוא הראשון במסלול שאינו צאצא שלu כלומרw צאצא שלu וv צאצא שלw אבלvאינו צאצא שלu. אבל מרכז הפעילות לא יכול היה לסגת מw לu לפני שv התגלה כלומר v התגלה לפני u בסתירה לכך שu התגלה לפניv.

רכיבים קשירים היטב (מכוון)

הגדרה: רכיב בו יש מסלול בין כל זוג צמתים וכן מקסימלי כלומר אינו ניתן להרחבה. אם c רכיב קשיר היטב ו $v,u \in c$ אז לא יתכן שיהיה מסלול בין u לv דרך צומת w שאינו בc. u-..-w-..-v אחרת ניתן היה להוסיף את w לc מכיוון שיש מסלול בינו לבין v ומכיוון שיש מסלול בין v לבין u בc.

גרף על רכיבים קשירים היטב: $\overline{G}(\overline{V},\overline{E})$ כאשר:

$\overline{V}=\{c_i \mid c_i \text{ רכיב קשיר היטב}\}$

$\overline{E}=\{i \to j \mid \text{קיימת } (u \to v) \in E,\ i \ne j, u \in c_i, v \in c_j\}$

טענה1 ב $\overline{G}$ אין מעגלים (מכוונים). כי אם היה מעגל היה ניתן למזג את כל ה c_i לרכיב קשיר אחד.
טענה2: גרף ללא מעגלים מכיל לפחות בור אחד ומקור אחד.
נניח שאין בור. נצא מצומת כלשהו ונטייל. אם נתקענו בהכרח יש בור. אם נחזור לצומת שכבר היינו בו בהכרח יש מעגל בסתירה לכך שאין מעגל. (צומת שאין לו קשתות בכלל הוא גם מקור וגם בור).
טענה3: רכיבי הקשירות של גרף G ושל גרף G' (הגרף בו הופכים את כיווני הקשתות ביחס לG) זהים.
טענה4: בכל ריצת DFS כל הצמתים השייכים לרכיב קשיר היטב c נמצאים באותו עץ DFS.
יהי r הצומת הראשון ברכיב הקשיר היטב שמתגלה אז יש מסלול בגרף בין r לבין כל צומת u שמכיל רק צמתים שעוד לא התגלו לכן לפי המשפט שהוכחנו (ב-DFS מכוון) כל הצמתים יהיו צאצאים של r בעץ. *חשוב לשים לב לכך שעץ יכול להכיל יותר מרכיב קשיר היטב אחד.*

האלגוריתם לחישוב רכיבים קשירים היטב: o(|V|+|E|)
נרחיב את DFS כך שלכל צומת יהיה מספר: d(v) יהיה האינדקס של השלב בו התגלה v כמו מקודם ו-f(v) יהיה האינדקס של השלב בו מרכז הפעילות נסוג מ v.
1.נריץ את DFS על הגרף ונחשב לכל צומת אתd(v) ואת f(v).
2.נחשב את הגרף ההפוך G^t
3.נריץ את DFS על הגרף ההפוך כשהשורשים בלולאה המרכזית הם בסדר יורד של f(v) כלומר מהגדול לקטן.
4. כל אחד מהעצים ביער DFS בצעד 3 הוא רכיב קשיר היטב.
הגדרה: לכל צומת v נגדיר את ϕ(v) כך ש w=ϕ(v) אם קיים מסלול מ-v ל-w וf(w) מקסימלי.
טענה1 לכל צומת u ϕ(u) הוא אב קדמון של u בעץ DFS.
אם ϕ(u)=u המשפט נכון. אחרת בזמן שu מתגלה:
1.מרכז הפעילות כבר נסוג מ ϕ(u) לפני שu התגלה ואז f(ϕ(u))<f(u) בסתירה להגדרה.
2.ϕ(u) כבר התגלה ומרכז הפעילות עוד לא נסוג ממנו, אז ϕ(u) אב קדמון של u.
3.ϕ(u) עוד לא התגלה כאשר u מתגלה:
א. אם אף אחד מהצמתים במסלול מ u ל-ϕ(u) עוד לא התגלה אז ϕ(u) יהיה צאצא של u (לפי משפט ל DFS מכוון) ואז f(ϕ(u))<f(u) בסתירה להגדרה.
ב. יש צומת שכבר התגלה כאשר u מתגלה, נסמן ב t את הצומת הכי רחוק מ- u שכבר התגלה. מרכז הפעילות עוד לא נסוג מ t כיוון שיש לt שכן שעוד לא התגלה. יש מסלול מt ל ϕ(u) שמכיל צמתים שעוד לא התגלו ולכן t יהיה אב קדמון של ϕ(u) כלומר f(t)>f(ϕ(u)) וזאת סתירה לבחירת ϕ(u) כצומת בעל f מקסימלי.
נשים לב ש $\phi(\phi(u))=\phi(u)$.
טענה2: u,v שייכים לאותו רכיב קשיר היטב אמ"ם ϕ(v)=ϕ(u). כל צומת שנגיש מu נגיש גם מv ולהיפך.
טענה3: u ו ϕ(u) נמצאים באותו רכיב קשיר היטב, כי ע"פ ההגדרה קיים מסלולמu ל$\phi(u)$ *ובעץ קיים מסלול מ*$\phi(u)$ לu.
משפט: האלגוריתם לחישוב רכיבים קשירים היטב מחשב נכון את הרכיבים. ההוכחה באינדוקציה על מספר העצים ביער DFS של G^t.
במעבר: יהי r השורש של העץ הk+1. מתקיים r=ϕ(r) (נניח בשלילה שלא ולכן f(r)<f(ϕ(r)) אבל זה לא יתכן כי ϕ(r) היה נבחר כשורש לפני r וr היה מתגלה באחד מk העצים הראשונים). נותר להראות שלכל w בעץ מתקיים r=ϕ(w). נניח בשלילה שקיים w שעבורו זה לא מתקיים ואז:
א.f(ϕ(w))>f(r) וזה לא יתכן כי כשr נבחרw היה בעץ ששורשו ϕ(w) כי לפי ה"א ϕ(w) נבחר כשורש לפני r
ב f(r)> f(ϕ(w)). אם w שייך לעץ ששורשו בr אז יש מסלול מw לr כי בגרף G^t r גילה את w ולכן f(ϕ(r))<=f(ϕ(w)) כיוון ש r=ϕ(r) נקבל f(r)=f(ϕ(r))<=f(ϕ(w)) בסתירה לנתון.

רכיבים אי פריקים (לא מכוון)

צומת הפרדה: צומת v בגרף לא מכוון וקשיר יקרא צומת הפרדה אם קיימים שני צמתים a וb כך שכל המסלולים מa לb עוברים דרך v.
גרף נקרא פריק אם הוא מכיל צמתי הפרדה ובלתי פריק אחרת.
רכיב אי פריק מקיים: הוא תת גרף מושרה של גרף אי פריק וכן לא קיים רכיב אי פריק המכיל אותו.
טענה1: אם יש קשת מu לv בעץ DFS ו k(u)>1 (כלומר uשונה מs) וכן L(v)>=k(u) אז u צומת הפרדה. מכיוון שכל מסלול מf(u) לv חייב לעבור דרך u ולכן u הוא צומת הפרדה. (בDFS לא מכוון אין קשתות חוצות).
טענה2: אם u צומת הפרדה ו k(u)>1 אז קיימת קשת עץ מu לv כך ש L(v)>=k(u). יהי s ברכיב קשירות A וv ברכיב קשירות B וu צומת הפרדה. בעץ: S-...-U-V ואין קשת אחורית מv לאיבר בA (כי u צומת הפרדה) לכן L(v)>=k(u).
משפט: השורש s הוא צומת הפרדה אמ"ם יש לו שני בנים לפחות בעץ DFS.
1.נניח שיש לו שני בנים T1,T2 ומכיוון שאין קשתות חוצות אז כל מסלול מT1 לT2 עובר בs וs צומת הפרדה.
2.נניח שs צומת הפרדה, לDFS שמתחיל בs יהיו לפחות שני בנים.
חישוב L(v): כשמתגלה צומת חדש L(v) מקבל את k(v). אם מתגלה קשת אחורית (v,u) מעדכנים L(v)=min{L(v),L(u)} ואם v אינו השורש ויש לו בןu אז כשניסוג מu לv נעדכן L(v) = min{L(v),L(u)}.
סיבוכיות החישוב מוסיף o(1) פעולות לפעולות קיימות בDFS ולכן סיבוכיות הDFS לא משתנה.
האלגוריתם
נבצע DFS ונכניס את הצמתים למחסנית ע"פ סדר הגילוי שלהם. כאשר ניסוג מצומת v ונגלה: L(v)>=k(f(v)) וf(v) שונה מs או יש לs קשת חדשה (כלומר f(v) צומת הפרדה) נוציא את כל הצמתים שמעל f(v) במחסנית ונכריז עליהם כעל רכיב אי פריק. (הרכיב הראשון שיתגלה יהיה רכיב המהווה עלה בעץ המושרה ע"י הרכיבים האי פריקים).

עצים פורשים מינימום (לא מכוון)

נתון גרף לא מכוון ופונקצית משקל (המקבלת ערכים חיוביים). משקל העץ הפורש הוא סכום המשקלים של כל קשתות העץ.
בהנתן עץ פורש T לא יתכן שיש בגרף חתך שאין בו קשת מT אחרת T לא היה קשיר.
כלל כחול: מצא חתך שאין בו קשת כחולה וצבע בכחול את הקשת הקלה ביותר שאינה צבועה.
כלל אדום: מצא מעגל שאין בו אף קשת אדומה וצבע באדום את הקשת הכבדה ביותר שאינה צבועה.

האלגוריתם:
צבע את הקשתות בגרף ע"פ הכלל הכחול והאדום בסדר כלשהו. עצור כשכל הקשתות צבועות. הקשתות הכחולות מגדירות עפ"מ.
טענה1: T עץ פורש של G ותהי e קשת מG שאינה בT. אם נוסיף אותה לT יווצר מעגל בין צומת u לצומת v. (נשמיט מT+e קשת אחת כלשהי מהמסלול בין u לv ונקבל עץ פורש חדש של G).
משפט: בסיום האלג' כל קשתות הגרף צבועות והקשתות הכחולות מגדירות עפ"מ. ההוכחה באינדוקציה על מספר הקשתות שנצבעו.
בסיס: הגרף קשיר, אין קשתות כחולות ולכן קיים עפ"מ שמכיל את הכחולות.
מעבר: נניח שמתקיים עבור k-1 הקשתות הראשונות שנצבעו ונראה שמתקיים עבור הקשת הk =ek(u,v) שנצבעת. יש שני מקרים:
1.נצבעת בכחול: (בשלילה) לפי ה"א קיים עפ"מ שאינו כולל את ek. יש בעפ"מ מסלול פשוט בין u לביןv שחייב לחצות את החתך (x,x') שלגביו הופעל הכלל הכחול. תהי e קשת בחתך הזה. בחתך לא היתה קשת כחולה ולכן w(ek)<=w(e) נוסיף את ek לעץ ונוריד ממנו את e וקיבלנו עפ"מ שמשקלו קטן או שווה לT בסתירה.
2. נצבעת באדום: נניח בשלילה שכל עפ"מ חייב לכלול את ek. השמטת הקשת מחלקת את T ל T1,T2. נתבונן במעגל מu לv שבגללו צבענו את ek באדום ותהי e קשת במעגל השייכת גם היא לחתך T1,T2. e אינה כחולה אחרת העץ יכיל מעגל. e גם אינה אדומה ולפי הכלל האדום w(ek)>=w(e), ואם נחליף בין e לביןek נקבל עפ"מ שאינו כולל את ek ומשקלו אינו עולה על משקל T.
נותר להוכיח שניתן להפעיל את הכללים: אם e מחברת בין שני עצים כחולים אז יש חתך בלי קשת כחולה וניתן להפעיל את הכלל הכחול. אם e סוגרת מעגל שבו כל הקשתות כחולות אז w(e) גדול או שווה למשקל הקשתות האחרות במעגל ואפשר לצבוע את e באדום.
משפט אופטימליות של עץ פורש T: תהי e קשת בעץ. אם לכל e' קשת השייכת לחתך Ce בעץ מתקיים w('e)>=w(e) אז T הוא עפ"מ.
אם T לא מקיים את התנאי ברור שאינו עפ"מ. אם T מקיים את התנאי אז ניתן לבנות אותו בעזרת הכלל הכחול ע"י מעבר על |V|-1 החתכים שמוגדרים ע"י קשתות העץ T וצביעת הקשת השייכת לT בכחול (ברור שזו הקשת הקלה ביותר בחתך).
משפט: תהי e=(i,j) קשת שאינה ב T. אם לכל e' השייכת למסלול בעץ בין i ל j בעץ מתקיים w('e)<=w(e) אז T עפ"מ. ברור שאם התנאי לא מתקיים T אינו עפ"מ. אם הכלל מתקיים אז ניתן לבנות את G-T (הקשתות שאינן בעץ) ע"י הכלל האדום, נצבע באדום כל קשת e שהיא הכבדה ביותר במעגל. (נשים לב שבמעגל אין אף קשת אדומה).
האלגוריתם של kruskal: ממיינים את הקשתות לפי משקל ועוברים מהקלה לכבדה כל צומת הוא עץ. אם קשת היא בין שני עצים נצבע אותב בכחול ונאחד את העצים. אם סוגרת מעגל נצבע באדום. באיחוד נעדכן פוינטר רק למנהיג העץ. סיבוכיות o(|E|log|V|).

קידודים – קוד הפמן

קוד רישא לכל סימן הקידוד שלו אינו רישא של סימן אחר.
אלגוריתם לבנית קוד הפמן: (Q מאותחל להכיל את כל הא"ב.) בצע |Q|-1 פעמים:
הקצה צומת חדש z, יהיו x,y שני צמתים בעלי ערך f מינימלי, הוצא את x,y מQ חבר אותם כבנים של z, f(z) מקבל את f(x)+f(y). הכנס את z לQ.
סיבוכיות במימוש פשוט o(n^2) כי הלולאה מתבצעת בo(n) אבל מופעלת על n איברים. במימוש ע"י heap ניתן להגיע ל o(nlogn).
טענה1:העץ המתאים לקידוד אופטימלי הוא עץ בינארי מלא. (לא הוכחנו)
למה1: יהיו x,y איברים בעלי מספר מופעים קטן ביותר אז קיים קוד רישא אופטימלי עבור הקלט שבו מילות הקוד לx ולy הן באותו אורך ונבדלות בביט האחרון בלבד.
למה2:T עץ אופטימלי עבור הקלט, x,y אחים עלים שאביהם z. אז העץ T' המתקבל ע"י הסרת x,y הוא אופטימלי עבור הקלט $c \in C \setminus \{x,y\} \cup z$ עם f(z)=f(x)+f(y).
משפט: הפמן מחשב עץ אופטימלי. הוכחה באינדוקציה על גודל הקלט:
צעד: אחרי הצעד הראשון האלג' מחשב לפי ה"א עץ אופטימלי עבור c' ולפי למה 2 ניתן להרחיבו לעץ אופטימלי עבור c ע"י הוספת x,y כבנים של z וזה מה שמתבצע.

ביצוע משימות:

נתונות n משימות לביצוע ולכל אחת זמן התחלה s_j וזמן סיום f_j.
בכל שלב נבצע את המשימה שזמן הסיום שלה הוא הקצר ביותר.
נניח שנבחרים הקטעים i1,i2...ik ונתבונן בשיבוץ אופטימלי ממוין ע"פ זמני הסיום: j1,j2...jn. לכל t=1...k מתקיים fit<=fjt. (אני רוצה להוכיח שלפי הפתרון שלי באותו זמן ניתן לבצע לפחות אותה כמות משימות)
באינדוקציה על t: נניח נכונות עבור t-1 כלומר fi(t-1)<=fj(t-1) מצד שני sjt>=fj(t-1)>=fi(t-1) כלומר הקטע jt זמין לבחירה כקטע הבא באלג'. האלג' בוחר את it שעדיין זמין בעל זמן סיום מינימלי ולכן fit<=fjt. מש"ל.
נניח n>k אבל הוכחנו fik<=fjk ולכן המשימה k+1 זמינה להיבחר גם כמשימה ה i+1.

מסלולים קלים ביותר (מכוון)

האלג' של דיקסטרה: לכל צומת פרט לs מאתחלים את התוית להיות אינסוף ולs מאתחלים את התוית לאפס. בוחרים צומת בעל תווית מינימלית מ-T ולכל השכנים שלו שעדיין ב T מעדכנים את התוית למינימום מבין מה שהיא כרגע לבין התוית של הצומת ש"גילה" אותנו + משקל הקשת באמצעותה התגלינו. אם מתבצע עדכון אז מעדכנים את האב להיות הצומת שגילה אותנו. מוציאים את הצומת מT.
למה1: אםd(v) סופי אז יש מסלול מs לv שמשקלו d(v) והוא מוגדר ע"י המצביעים. ההוכחה באינדוקציה על סדר יציאת הצמתים מT. מעבר: v יוצא מT בצעד ה-k+1. אםd(v) סופי אז קיים u צומת אחרון שעדכן את v וכן d(v)=d(u)+Wuv , $\pi(v)=u$ כלומר u יצא מT לפני v וע"פ ה"א יש מסלול מs לu שמשקלו d(u) ומוגדר ע"י המצביעים ולכן יש מסלול מs לv שמשקלו d(v) ומוגדר ע"י המצביעים.
למה2: כשהאלג' עוצר, לכל צומת d(v)=δ(v). ההוכחה באינדוקציה על סדר יציאת הצמתים מT. המעבר: יהי v הצומת הk+1 היוצא מT. יש 2 אפשרויות:
1.d(v) אינסופי ולכן לא קיים מסלול מs לv.
2.d(v)סופי. יהי x הצומת האחרון במסלול השייך לV-T וy ב T בין x לביןv. לפי ה"א d(x)=δ(x) ומכיוון שתת מסלול של מסלול קל ביותר הוא מסלול קל ביותר גם δ(y)=w(x,y)+δ(x). כאשר x יוצא מT הוא בודק האם d(y) מעודכן כלומר לאחר יציאתו d(y)= δ(y). כיוון שy לפני v במסלול מתקיים δ(y)<= δ(v) ומכיוון שהאלג' בחר מT את v אז d(y)>=d(v) כלומר: d(y)>=d(v)>= δ(v)>= δ(y)>=d(y) ולכן d(v)= δ(v) וy = v או שמשקל הקשת ביניהם הוא אפס).
הגרף המושרה ע"י המצביעים הוא עץ כי דרגת הכניסה של כל צומת שווה אחד פרט לs.
סיבוכיות האלג' של דיקסטרה: אתחול: o(|v|). עדכון תויות: o(|E|) לכל היותר עדכון אחד לכל קשת. מציאת צומת בעלת תוית מינימלית בכל איטרציה o(|v|) ובסה"כ o(|v^2|). במימוש נאיבי הסיבוכיות o(|v^2|) אך ניתן להגיע ל o(|E|+|v|log|v|) או o(|E|log|v|).
למה3: לכל קשת u—v מתקיים: δ(s,v)<=δ(s,u)+w(u-v) . כי משקל המסלול מs לu ומשם לv מהווה חסם עליון על δ(s,v). (אי שוויון המשולש).
האלג' של בלמן פורד: מאתחלים את האב של כל צומת לnull ואת התוית לאינסוף, פרט לתוית של s שמאותחלת לאפס. עוברים על כל הקשתות בגרף בסדר כלשהו |v|-1 פעמים ואם יש בעיה עם אי שוויון המשולש מעדכנים את התוית של הצומת. עוברים פעם נוספת ואם עדיין יש בעיה יש לנו בגרף מעגל במשקל שלילי. אי שוויון המשולש לקשת (u,v) : δ(s,v)<=δ(s,u)+W(u,v)
סיבוכיות האלג' של בלמן פורד: בכל "פאזה" עוברים על כל הקשתות ולכל קשת מבצעים o(1) פעולות. כל פאזה מתבצעת לכן בo(|E|) והסיבוכיות הכוללת היא o(|v|*|E|).
טענה1:בכל שלב בריצת בלמן-פורד מתקיים δ(v)<=d(v). נניח בשלילה שבשלב כלשהו של האלג' הטענה אינה נכונה ויהי v הצומת הראשון שלגביו זה לא נכון כלומר d(v)<δ(v) כתוצאה מפעולת רלקסציה בקשת (u,v) (השוויון מהרלקסציה אי השוויון נתון והאחרון מאי שוויון המשולש) .

$$d(u)+w(u,v)=d(v)<\delta(v)\le\delta(u)+w(u,v)$$

כלומר d(u)<δ(u) בסתירה לכך ש v הראשון שלגביו זה לא מתקיים.
משפט: בסיום ריצת האלג' d(v)=δ(v) לכל v, והמצביעים מגדירים מסלול מs לv שמשקלו d(v).
ההוכחה באינדוקציה על מספר הקשתות במסלול הקל ביותר מ s לv. המעבר: נניח שנכון עבור כל צומת שהמסלול אליו מכיל לכל היותר k-1 קשתות. יהי v צומת שהמסלול הקצר אליו מכיל k קשתות: s-v1-v2...-v(k-1)-v. לפי ה"א d(v(k-1))= δ(v(k-1)). לפי טענה 1 d(v)=>δ(v) ולכן אם אין שוויון נציב בפאזה ה k את: $d(v)=d(v(k-1)+w(v(k-1),v)=\delta(v)$
אם יש בגרף מעגל שלילי נניח בשלילה שלא צריך לבצע רלקסציה בפאזה |v| כלומר:

$$d(v_{i+1}) \le d(v_i)+W(v_i,v_{i+1}) \qquad d(v_1) \le d(v_k)+W(v_k,v_1)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} d(v_i) \le \sum_{i=1}^{k} d(v_i)+\sum_{i=1}^{k} W(v_i,v_{i+1})+W(v_k,v_1)$$

כלומר משקל המעגל =<0 בסתירה לנתון.
G לא מכוון עם קשת שלילית הוא מקרה פרטי של מעגל שליל- ניתן להפוך את הקשת לשתי קשתות מכוונות וליצור מעגל.

מסלולים קלים ביותר בין כל זוגות הצמתים:

האלג' של פלוייד וורשל: נסמן את הצמתים באינדקסים 1..n משקל המסלול הקל ביותר מi לj שעובר רק בצמתים שהאינדקס שלהם קטן או שווה k יסומן ב- $d^k_{i,j}$
נוסחת הרקורסיה:
האלג':

$d^0_{i,j}=w(i,j)$

$d^k_{i,j}=\min\{d^{k-1}_{i,j},d^{k-1}_{i,k}+d^{k-1}_{k,j}\}$ רצים בשלוש לולאות על k i ו j.

האב הקדמון של j בעץ שלi כאשר צמתי הביניים הם מהקבו' {1...k}:

$$\pi^k_{i,j}=\begin{cases}\pi^{k-1}_{i,j}\ if\ d^{k-1}_{i,j} \le d^{k-1}_{i,k}+d^{k-1}_{k,j}\\ \pi^{k-1}_{k,j}\ if\ d^{k-1}_{i,j} > d^{k-1}_{i,k}+d^{k-1}_{k,j}\end{cases}$$

סיבוכיות: יש לנו 3 לולאות (k,i,j) ובכל לולאה מבצעים o(1) פעולות ולכן הסיבוכיות היא o(n^3).
אלג' אחר: נגדיר $d^m_{i,j}$ משקל המסלול הקל ביותר מi לj שעובר לכל היותר בm קשתות.
הנוסחה הרקורסיבית היא:

$$d^0_{i,j}=\begin{cases}0, if & i=j\\ \infty, if & i\ne j\end{cases}$$

$$d^m_{i,j}=\min\{d^{m-1}_{i,j},\min_{1\le k\le n}\{d^{m-1}_{i,k}+w(k,j)\}\}=\min_{1\le k\le n}\{d^{m-1}_{i,k}+w(k,j)\}$$

עבור i,j מסויימים חישוב $d^m_{i,j}$ מתבצע ב o(n) ולכן כיוון שיש לי o(n^2) זוגות כאלה המעבר מ $d^{m-1}_{i,j}$ ל $d^m_{i,j}$ מתבצע ב o(n^3) ומכיוון שאנו רצים על n ערכים עבור m הסיבוכיות היא o(n^4). ניתן לחשב את זה גם בסיבוכיות נמוכה יותר – o(n^3logn) כמו ביצוע כפל מטריצות.

תרגולים...

גרף יקרא שרוכי מכוון אם הוא עץ מכוון בעל עלה אחד. ושרוכי אם לכל הרצת DFS מתקבל שרוך מכוון.
יש בגרף מעגל המילטון אם יש מסלול שעובר בכל צומת פעם אחת בדיוק.
טענה1:בגרף שרוכי עם לפחות 3 צמתים קיים מעגל המילטון. נריץ DFS מצומת v1 ונקבל שרוך שהאחרון בו vk. כעת נריץ DFS מv2 ומכיוון שהגרף שרוכי בהכרח הצומת האחרון בעץ הDFS שיתקבל יהיה v1.
גרף יקרא שפיר אם בכל ריצת DFS לכל צומת מתקיים L(v)=1.
טענה2: אם G שרוכי אז G שפיר. (כי קיים בו מעגל המילטון ולכן L(v)=1 לכל צומת) וגם G אי פריק (כי קיים מעגל המילטון כלומר כל הצמתים נמצאים על מעגל פשוט).
טענה3: אם G שפיר אז G שרוכי. נניח בשלילה ש G אינו שרוכי לכן קיים צומת בעל שני בנים בעץ ה DFS. מבין כל הצמתים האלה נבחר את הגבוה ביותר בעץ ונסמנו ב v. ואת בניו נסמן ב vi, vj. נסמן ב ci את הצמתים ש vi אב קדמון שלהם בעץ, בצורה דומה cj, ונסמן בc את האבות הקדומים של v. G לא מכוון ולכן אין קשתות חוצות.נריץ DFS מ vi דרך v לצמתים בc ולאחר מכן צמתי cj. לכן 1<L(vj) כי לא תתכן קשת אחורית מ cj לשורש כי השורש ב ci ולכן הנחת השלילה אינה נכונה ו G שרוכי.
גרף מכוון וסופי יקרא כמעט קשיר היטב אם ע"י הוספת קשת בודדת נקבל קשיר היטב.
טענה4: גרף הוא כמעט קשיר היטב אמ"ם בגרף העל לרכיבים אי פריקים שלו קיים מקור בודד ובור בודד.
1. נניח בשלילה שיש שני מקורות ותהי e=(u,v) קשת שהוספתה נותנת קשיר היטב. אם u,v לא שייכים לרכיבי הקשירות של שני המקורות נשאר עם שני מקורות ולכן לא קשיר היטב. אם u,v שייכים לרכיבי הקשירות הללו (לא יתכן ששניהם באותו רכיב) ישאר לנו מקור אחד ולכן שוב לא קשיר היטב. אם u שייך לאחד מרכיבי הקשירות וv לא, עדיין נשאר עם מקור אחד כי לא נוספו לו קשתות ולכן לא קשיר היטב.
2. אם קיים בור יחיד ומקור יחיד נחבר בקשת את הבור למקור וכך ניתן יהיה להגיע מכל צומת לכל צומת אחר.
קשת e בגרף לא מכוון וקשיר תקרא גשר אם הסרתה מ G תפגע בקשירות של G. אלג' למציאת גשרים:
נוסיף לגרף: $E'=\{(x,v'e),(v'e,y) \mid e=(x,y) \in E\}$ נמצא את צמתי ההפרדה בגרף החדש לפי האלג' מההרצאות. טענה: קשת e היא גשר אמ"ם v'e צומת הפרדה. סיבוכיות: o(|v|+|E|). טעות נפוצה: קשת היא גשר אם שני צמתי הקצה שלה הם צמתי הפרדה. דוגמא נגדית לכך: גרף דמוי סוכריה.
האלג' של prim למציאת עפ"מ: באתחול אף קשת אינה צבועה. T מקבל את השורש. כל עוד T לא מכיל את כל הצמתים: מצא קשת קלה ביותר בחתך (T,V-T) צבע אותה בכחול והוסף את הצומת מV-T לT. נגדי Ti להיות הקב' T בתחילת האיטרציה i. סיבוכיות: o(|E|+|V|log|V|)
טענה1: לכל i מתקיים שהקשתות בE-(Ti x Ti) אינן צבועות. ההוכחה באינדוקציה על i.
T(i+1)=Ti∪{v} . E-(T(i+1) x T(i+1))= E-(Ti x Ti)-(Ti x {v}).
E-(Ti x Ti) לא צבועות בתחילת האיטרציה ה i והיחידה שנצבעת באיטרציה ה i היא קשת בין Ti לבין v. ולכן E-(T(i+1) x T(i+1)) לא צבועות בתחילת האיטרציה הi.
באיטרציה הi בוחר האלג' בקשת הקלה ביותר בחתך ובכל איטרציה מפעיל את הכלל הכחול לכן בסיום |V|-1 איטרציות נקבל |V|-1 קשתות כחולות שיוצרות עץ פורש. בהרצאות יש הוכחה לכך שקיים עפ"מ המכיל את כל הקשתות הכחולות ולכן מכיוון שיש |V|-1 קשתות כחולות מצאנו עפ"מ.
הפמן: P סדרת משקלים המקיימת $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_n$ $p_n > \frac{p_1}{2}$. עץ הפמן עבור סדרה זו הוא כמעט מאוזן
טענה:אם T עץ הפמן אופטימלי עבור P אז כל העלים נמצאים בשתי רמות סמוכות. נניח בשלילה שלא ונניח ש p1 נמצא בעומק k1 וpn,p(n-1) שאביהם x, נמצאים בעומק k, כך ש k1<=k-2. ניצור עץ חדש T' בו נחליף בין x לבין p1. פרט לעלים p1,pn,p(n-1) אין שינוי בתרומתם למשקל העץ. בעץ הישן היה המשקל של שלושת העלים: k1p1+k(pn+p(n-1)). בעץ החדש: (k-1)p1+(k1+1)(p(n-1)+pn). אבל מכיוון ש k1+1<=k-1 וע"פ נתון: p1 <2pn<=p(n-1)+pn נקבל כי:
(k-1)p1+(k1+1)(p(n-1)+pn)<p(n-1)+pn+(k-1)(p(n-1)+pn)=k(p(n-1)+pn)<k1p1+k(pn+p(n-1) .
וזאת סתירה לאופטימליות T.
צוואר בקבוק של מסלולp הוא משקל הקשת הקלה ביותר בp. צואר הבקבוק של צמתים u,v הוא צואר הבקבוק המקסימלי מבין כל המסלולים בין u ל v. נתון גרף לא מכוון ופונקצית משקל אי שלילית על הקשתות רוצים למצוא לכל צומת את צואר הבקבוק שלו עם s. האלג': נאתחל תוית של s לאינסוף ושל כל צומת אחר למינוס אינסוף, ונאתחל את T להיות קב' כל הצמתים. כל עוד T לא ריק נבצע: נבחר צומת מ T שהתוית שלה מקס'. לכל קשת שיוצאת ממנה לצומת שנמצא ב T נעדכן את התוית של הצומת להיות המקסימום בין (ערכו הקודם, (המינימום בין ערך הצומת ש"גילה אותו" לבין משקל הקשת שגילתה אותו)). ונוציא את הצומת שבחרנו מחוץ ל T. טענה1: אם בסיום התווית שווה למינוס אינוף אז אין מסלול בין הצומת לs. נניח בשלילה שיש מסלול ונסמן בx את הצומת הקרוב ביותר ל s במסלול שהתוית שלו מינוס אינסוף וב'x את הקודם לו. x' יצא לפני x ובאיטרציה שבה הוא יצא x עוד נמצא ב T ולכן ערכו של x מתעדכן לערכו הסופי שבהכרח שונה ממינוס אינסוף. טענה2: אם התוית שונה ממינוס אינסוף אז קיים מסלול עם צ"ב ששוה לערך התוית. ההוכחה באינדוקציה על סדר הוצאת הצמתים מ T, המעבר: נניח נכונות עד האיטרציה הk ונוכיח לk+1 קיימת איטרציה שבה שינינו את התוית של הצומת, נניח שבאיטרציה שבה הוצא x מT. x הוצא לכל היותר באיטרציה הk ולכן ע"פ ה"א קיים לו מסלול עם צ"ב בערך התוית של x. בנוסף קיימת הקשת (x-v) ולכן קיים מסלול מs לv. ומכיוון שזו האיטרציה האחרונה בה שונתה התוית של v ערך התוית יהיה צ"ב של המסלול. טענה3:אם v יוצא באיטרציה j וu יוצא באיטרציה j+1 אז התוית של v => התוית של u בסיום.
טענה4 אם קיים מסלול p מs לv עם צ"ב lp אז בסיום האלג' התוית של v תהיה =>lp. ההוכחה באינדוקציה על סדר הוצאת הצמתים מ T. במעבר: יהי v הצומת שיוצא באיטרציה ה k+1 ויש מסלול p בינו לבין s עם צ"ב lp. יהי x הצומת האחרון שיוצא לפני v ו'x העוקב של x במסלול (יתכן ש x=s ו'v=x). 'p הוא המסלול מ-s ל-'x. ''p הוא המסלול לx. {(lp<=lp'=min{lp'',w(x,x' (1) כי 'p תת מסלול של p ו''p של 'p.x יצא מ T לפני v ולפי ה"א lp''≤λ(x). ולכן: min{lp'',w(x,x')}≤ min{λ(x),w(x,x')} (2) x יצא לכל המאוחר באיטרציה הk ו'x אח"כ. באיטרציה שבה x יצא ביצענו $\lambda(x') \leftarrow \max\{\lambda(x'),\min\{\lambda(x),w(x,x')\}\}$ ומכיוון שערכי התוית יכולים רק לגדול יתקיים $\min\{\lambda(x),w(x,x')\} \le \lambda(x')$ (3) לפי טענה3 λ(v)≥λ(x) (4) כי 'x לא יצא לפני v מ T ומכאן לפי (1)-(4) $lp \le \lambda(v)$

קומבי:
1.בגרף סופי, מס' הצמתים שדרגתם אי זוגית הוא זוגי.
2.גרף סופי בלתי מכוון וקשיר הוא אוילרי אמ"ם שני צמתים בדיוק הם בעלי דרגה אי זוגית או כל הצמתים בעלי דרגה זוגית .
3. גרף סופי מכוון הוא גרף אוליר אמ"ם גרף התשתית שלו קשיר ולכל צומת דרגת הכניסה שווה לדרגת היציאה או שיש בדיוק שני צמתים שלא, ובאחד דרגת הכניסה גדולה באחד מדרגת היציאה ובשני להיפך.
4. התנאים שקולים: G עץ, G חסר מעגלים ויש בו |V|-1 קשתות, G קשיר ויש לו |V|-1 קשתות.
5. התנאים הבאים שקולים: G עץ מכוון, לG יש שורש ולכל צומת מסלול יחיד מהשורש אליו, לG שורש עם דרגת כניסה אפס ולכל צומת אחר דרגת הכניסה היא אחד, לG שורש ומחיקת קשת אחת פוגעת בכך, גרף התשתית של G קשיר וקיים צומת יחיד עם דרגת כניסה אפס ולכל צומת אחר דרגת הכניסה אחד.
6.גרף סופי מכוון G הוא עץ מכוון אמ"ם גרף התשתית שלו הוא חסר מעגלים ויש בו צומת יחיד עם דרגת כניסה אפס ולכל השאר דרגת כניסה 1.
7.אם בגרף סופי מכוון לכל זוג צמתים יש מתווך (אב קדמון משותף) אז לגרף יש שורשמיון טופולוגי חישוב דרגת כניסה לכל צומת, הכנסה לתור Q את כל הצמתים בעלי דרגה 0 (מקור).i=1. כל עוד התור לא ריק מוציאים איבר u מהתור,ממספרים אותו, מקדמים את המונה ב1 ולכל v כך שיש קשת u->v, מקטינים את דרגת הכניסה של v ב-1 . אם דרגת v =0 מכניסים את v לתור. סיבוכיות:O(|E|+|V|)

תכנון דינאמי:בניית הפתרון האופטימלי מתוך פתרונות אופטימליים של בעיות מ"דרגה" נמוכה יותר.
שיבוץ אינטרולים
לכל תהליך יש משקל (רווח) וכל תהליך מציין את אינטרול הזמן בו הוא צריך שירות: [si,fi]. המשאב יכול לתת שירות לתהליך אחד בלבד בו"ז וברגע שהתחיל לשרת תהליך, חייב לשרת אותו עד סיומו. המטרה: מציאת שיבוץ חוקי הממקסם את הרווחים. (קבוצהS של אינטרולים שאין בניהם חפיפה כך ש $\max(\sum_{i\in S} weight(i))$
מניחים שהאינטרולים ממוספרים בסדר לא יורד של זמני הסיום: f1<=f2<=...fn. כמו כן נסמן ב p(j) את האינטרול בעל אינדקס מקסימלי המקיים fp(j)<=sj. (כל אחד מאינטרולים 1...p(j) יכול להשתבץ עם אינטרול j.
יהי opt הפתרון האופטימלי. ***אם אינטרול n שייך ל opt*** אז אין ב opt אינטרול j כך ש: p(n)<j<n ובנוסף opt\{n} מגדיר פתרון אופטימלי לאינטרולים 1...p(n). (p(n) לא בהכרח ב opt). ***אם אינטרול n לא שייך ל opt***: opt מגדיר פתרון אופטימלי עבור האינטרולים 1...(n-1).
מכאן נוסחת הרקורסיה תהיה: opt=max{weight(n)+opt(p(n)), opt(n-1)} הפתרון האופטימלי לאינטרולים 1...n. *(האינטרול n יהיה שייך ל opt אם יתקיים: (weight(n)+opt(p(n))>=opt(n-1).*
האלגוריתם: (מה שבוורוד מתייחס לפתרון שני הנעזר בM):

```
Compute_opt(n)
if n=0 return 0
else
   v=Mcompute_opt(p(n))
   u=Mcompute_opt(n-1)
   if weight(n)+v>=u return weight(n)+v
   else return u.
```

ל compute_opt סיבוכיות אקספוננציאלית (כמו בפיבונצ'י) ולכן הפתרון הוא להחזיק מערך גלובלי בו יאוחסנו פתרונות הביניים המערך: M[0....n].

```
Mcompute_opt(n)
if M[n]="empty" then
        v=compute_opt(n)
        m[n]=v
        return v
else return M[n]
```

"empty" זה ערך התחלתי של M. בצורה כזו הסיבוכיות כבר אינה אקספוננציאלית.

טענה 1: זמן הריצה הוא o(n) לא כולל זמן מיון האינטרולים ע"פ זמני הסיום שלהם ולא כולל חישוב p(j) לכל j.
בכל קריאה ל compute_opt נעדכן לפחות ערך אחד בM מ empty לערך ממש, כלומר יש לכל היותר n+1 קריאות ל compute_opt. עבור כל קריאה כזו נקראת הפונקציה Mcompute_opt פעמיים. סך כל הקריאות לשתי הפונקציות הוא o(n). בכל קריאה כזו, הסיבוכיות היא o(1) (פרט לקריאה הרקורסיבית) ולכן הסיבוכיות היא o(n).
מציאת הפתרון: כדי למצוא את הפתרון ולא רק את ערכו ניתן להחזיק מערך נוסף s שבו "נזכור" את הפתרון האופטימלי לתתי הבעיות. תיאור S[i] הוא מסדר גודל o(n) ואז נוסף לנו פקטור n לסיבוכיות. פתרון נוסף:

```
Find_solution(i,M)
if  i=0 output nothing
else
    v=M[p(i)]
    u=M[i-1]
    if weight(i)+v>=u output  i + Find_solution(p(i),M)
    else  output   Find_solution((i-1),M)
```

זרימה ברשתות

פונקציית זרימה חוקית: היא פונקציה המקיימת:

1. אילוצי קיבול: לכל $e\in E$: $|f(u,v)|\le c(u,v)$
2. סימטריה: לכל (u,v) מתקיים: $f(u,v)=-f(v,u)$
3. שימור הזרימה: לכל צומת u ב $V-\{s,t\}$ מתקיים $\sum_{v\in V} f(u,v)=0$ (הזרימה u ב החוצה והזרימה אל u שוות).

נרצה לחשב פונקציית זרימה שממקסמת את הזרימה שיוצאת מ s כלומר אם $|f|=\sum_{s\in S} f(s,u)$ חתך $\{s,t\}$ חלוקה של V לשתי קב' זרות $S,\bar{S}$ כך ש $s\in S$ $t\in\bar{S}$

למה1: הזרימה בכל חתך שמפריד בין t ל s שווה. כלומר $|f|=\sum_{u\in S}\sum_{v\in\bar{S}} f(v,u)$

נסכם את משוואות השימור לגבי כל צומת הקבוצה S:

לכל יוג עצמתם מתוך הקבוצה S מתקיים ש: $\forall v\in S-\{s\}: \sum_{u\in V} f(v,u)=0$

$f(u,v)$ מתבטל עם $f(v,u)$

ואם נחבר את המשוואות נקבל: $\sum_{v\in S}\sum_{u\in S} f(v,u)=|f|$

קיבול של חתך: הקיבול של $(S,\bar{S})$ מוגדר להיות סכום קיבולי הקשתות הקדימות בחתך $c(S,\bar{S})=\sum_{u\in S}\sum_{v\in\bar{S}} c(u,v)$

טענה2: לכל חתך $(S,\bar{S})$ שמפריד בין t ל s מתקיים $|f|\le c(S,\bar{S})$

$|f|=\sum_{u\in S}\sum_{v\in\bar{S}} c(v,u)=c(S,\bar{S})$

(השוויון השמאלי ע"פ למה1, א השוויון מכיוון שלן תניח קמנה ב c והשוויון דומני ע"פ ההגדרה)

קיבול שיורי: לכל קשת (u,v) ב E הקיבול השיורי של הקשת ביחס ל f מוגדר להיות: $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$

הגדרה: נתונות 2 פונקציות זרימה בגרף: f ו g אזי: $[f+g](u,v)=f(u,v)+g(u,v)$ מוגדר להיות $[f+g](u,v)$ **זוי אינה בהכרח פונקציית זרימה חוקית!**

למה3: G גרף. f פונקציית זרימה חוקית, 'f פונקציית זרימה בגרף השיורי G_f אז: 'f+f פונקציית זרימה חוקית ב G ומתקיים: $|f+f'|=|f|+|f'|$

1. אילוצי קיבול:

$$\forall(u,v)\quad [f+f'](u,v)=f(u,v)+f'(u,v)\le f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v))=c(u,v)$$

2. ליכסון סטטרי:

$$[f+f'](u,v)=f(u,v)+f'(u,v)=-f(v,u)-f'(v,u)=-[f(v,u)+f'(v,u)]=-[f+f'](v,u)$$

3. שימור עבור כל צומת u השייך ל $V-\{s,t\}$: $\sum_{v\in V}[f+f'](u,v)=\sum_{v\in V} f(u,v)+\sum_{v\in V} f'(u,v)=0$

(ע"פ נתון כי f וגם 'f הן פונקציות זרימה חוקיות)

ע"פ הגדרת $|f|$ ו $|f'|$ מתקיים: $|f+f'|=\sum_{v\in V} f(s,v)+\sum_{v\in V} f'(s,v)=|f|+|f'|$

מסלול שיפור: מסלול ב G_f מ s ל t שכולל רק קשתות שעבורן $c_f(u,v)>0$ (קיבול שיורי) $c_f(p)$ כאשר p מסלול שיפור ב G_f מוגדר להיות:

$$c_f(p)=\min_{e\in p} c_f(e)$$

נתון מסלול שיפור p ב G_f כאשר $c_f(p)=\Delta$ נגדיר פונקצית זרימה באופן הבא:

$$\hat{f}=\begin{cases}\Delta & e\in p\\ -\Delta & \bar{e}\in p\\ 0 & other\end{cases}$$

טענה4: $f+\hat{f}$ פונקצית זרימה חוקית ב G ו $|f+\hat{f}|=|f|+\Delta$ (ברור ש t אינו ב X אחת היה מסלול מ s ל t בגיבוי לתמן). בהכרח מתקיים:

f פונקצית זרימה חוקית ב G_f כי A מוגדרת להיות הקיבול המינימלי ב p ולכן ע"פ למה 3 $f+\hat{f}$ חוקית ב G ומתקיים $|f+\hat{f}|=|f|+\Delta$

(תכן שלעיל השיפור נקטין את הזרימה בקשת!!!)

משפט min_cut-max_flow: תהי f פונקצית זרימה חוקית אזי הטענות הבאות שקולות:

1. f פונקצית זרימה מקסימלית כלומר $|f|$ מקסימלית מבין כל הזרימות החוקיות מ s ל t.
2. אין מסלול שיפור ב G_f מ s ל t.
3. קיים חתך $(X,\bar{X})$ שמפריד בין s ל t שעבורו $|f|=c(X,\bar{X})$

1<=2: ראינו שמסלול שיפור מגדיל את פונקצית הזרימה ולכן אם f מקסימלית אין מסלול שיפור ב G_f.

3<=2: נגדיר את X להיות כל הצמתים שיש מסלול אליהם מ s בגרף השיורי G_f. (ברור ש t אינו ב X אחת היה מסלול מ s ל t בגיבוי לתמן). בהכרח מתקיים:

א. כל קשת ב G מ X ל $\bar{X}$ היא קשת רווויה (אחרת היא הייתה ב G_f ואפשר היה להגיע מ s לצומת שב $\bar{X}$)

ב. אין זרימה חיובית מ $\bar{X}$ ל X ב G (אחרת אפשר היה להגיע לצומת מ $\bar{X}$ ב G_f)

מהגדרת $c(X,\bar{X})$: $c(X,\bar{X})=\sum_{u\in X,v\in\bar{X}} c(u,v)=\sum_{u\in X,v\in\bar{X}} f(u,v)=|f|$

(השוויון דומני לפי הגדרת $|f|$ת זה שמשמאלי כי אחרת היתה קשת שיורית מ u ב X ל v במשלים)

1<=3 הוכחנו שלכל חתך $(X,\bar{X})$ מתקיים $|f|\le c(X,\bar{X})$ ולכן אם יש חתך שבו מתקיים השוויון הרי שהזרימה היא מקסימלית. (טענה 2)

מסקנה: **$|f|$ מקסימלית = קיבול חתך המינימום**

האלגוריתם של Ford-Fulkerson

1. אתחול: f=0
2. כל עוד יש מסלול שיפור p מ s ל t ב G_f בצע:

א.מצא מסלול שיפור p מ s ל t ב G_f.

ב.יהא a צוואר הבקבוק של המסלול (כלומר הקיבול השיורי המינימלי במסלול)

ג. f=f+a (a יחידות זרימה)

זה לא יעיל, יתכן שבכל איטרציה נשפר רק ביחידה זרימה אחת כלומר נצטרך הרבה איטרציות.

אם נבחר בכל פעם מסלול שיפור עם צוואר בקבוק מקסימלי אז לאחר O(|E|) איטרציות. העברנו לפחות $\frac{1}{2}|f_{max}|$

האלגוריתם של EK (מימוש לשיטת Ford Fulkerson)

בכל איטרציה נבחר את מסלול השיפור בעזרת חיפוש לרוחב על מספר קטן ככל האפשר של קשתות בגרף השיורי.

מימוש ע"י BFS, כל איטרציה ב o(|V|+|E|).

טענה1: לכל צומת x נסמן ב $\delta(x)$ את המרחק של x מ s ב G_f בסיום האיטרציה ה i, וב f(i) את הזרימה אחרי האיטרציה ה i ונבחן את הגרף $G_{f(i)}$: לכל x δx היא פונקציה מונוטונית לא יורדת

נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה ויקיים x שבאיטרציה מסוימת מתקרב ל s ב G_f כתוצאה משיפור הזרימה, כלומר קיים x וקיימת איטרציה כך ש $\delta x(i-1)>\delta x(i)$ מבין כל x וכל i המקיימים זאת נבחר את אלה שעבורם $\delta x(i)$ מינימלי.

אחרי איטרציה i: יהי y הצומת שלפני x במסלול הקצר ביותר. המרחק מ s ל y כלומר $\delta y(i)$ שווה ל $\delta x(i)-1$ ולכן y לא התקרב ל s באיטרציה i. (אחרת היה סתירה לבחירת x): $\delta y(i-1)\le\delta y(i)$

ב $G_{f(i-1)}$ אילו היתה קיימת הקשת (y,x) אז $\delta x(i-1)\le\delta y(i-1)+1$ אבל ע"פ ההנחה $\delta y(i-1)\le\delta y(i)$ ולכן: $\delta x(i-1)\le\delta y(i-1)+1\le\delta y(i)+1=\delta x(i)$

סתירה להנחה ולכן הקשת y-x לא קיימת ב $G_{f(i-1)}$.

ב $G_{f(i-1)}$ מסלול השיפור עובר מ s ל x ומשם ל y והלאה. לפי כללי בחירת מסלול שיפור באלגוריתם זהו מסלול קצר ביותר $\delta x(i-1)=\delta y(i-1)+1\le\delta y(i)-1=\delta x(i)-2$

כלומר המסלול לא התקצר אלא התארך וזו סתירה להנחת השלילה.

משפט: מספר האיטרציות שמבצע האלגוריתם הוא $O(|V|*|E|)$ לכל היותר. (מכאן סיבוכיות אלגוריתם היא $O(|E|^2*|V|)$ כי מציאת מסלול שיפור ב $O(|E|)$ ע"י BFS ומציאת הגרף השיורי ב $O(|E|)$.

יהי pi המסלול המשפר באיטרציה ה i. קשת e ב pi היא קשת קריטית עבור איטרציה i אם"מ e מופיע ב pi. (בכמה פעמים יכולה קשת להיות קריטית)

תהי (x,y) קשת כלשהי וניתן שהיא קריטית באיטרציה ה i ואחכ באיטרציה נוספת j<i. $\delta x(i)+1=\delta x(j)$ (הקשת נמצאת על מסלול שיפור.

בעקבות האיטרציה ה i הקשת נעלמה מהרשת השיורית והופיעה שוב לפני האיטרציה j כלומר יש איטרציה k i<k<j שבה מסלול השיפור pk המשתמש בקשת בכיוון ההפוך (כלומר בקשת yx) $\delta x(k)=\delta y(k)+1=\delta x(i)+2$

כלומר בין 2 איטרציות ש (x,y) היתה קריטית בהן המרחק של x ב s גדל לפחות ב 2. המרחק הזה יכול להיות בין 1 לבין |V|-1 ולכן מספר הפעמים בהן הקשת xy יכולה להיות קריטית הוא $\frac{|V|-1}{2}\ge 2|E|\frac{|V|-1}{2}$

בכל איטרציה יש לפחות קשת קריטית אחת ולכן מספר האיטרציות קטן או שווה ל

דוגמא לשימוש בבעיית הזרימה (שידור)

נתון גרף ז צדדי G=(X,Y,E) הקשתות E ב $x\in X$ אמ"ם $x\in X$ ו $y\in Y$.

נגדיר שידור קבוצת קשתות M ב E שעבורה הגרף (X,Y,M) הוא בעלי דרגה מקסימלית 1 (כלומר אין שתי קשתות הנוגעות באותה צומת) רוצים למצוא שידור M שגודלו מקסימלי.

שידור משולש: שידור שבו לכל צומת ב G דרגה 1 בדיוק. בפרט מתקיים |X|=|Y|

הפתרון: נבנה רשת זרימה באופן הבא: בצד אחד נשים את כל קודקודי X ובשני את Y. נוסיף בור ומקור ונגדיר רשת זרימה חדשה כה: $W=X\cup Y\cup\{s,t\}$ H=(W,F) המוגדרת ע"י

$$F=\{xy\mid xy\in E, x\in X, y\in Y\}\cup\{sx\mid x\in X\}\cup\{yt\mid y\in Y\}$$

כל הקיבולות הן 1.

נחשב ב H זרימה מקסימום, תהי f זרימה ב H.

$$Mf=\{xy\mid x\in X, y\in Y, f(xy)=1\}$$

Mf הוא שידור: x ב X. אם ב Mf יש לפחות 2 קשתות הנוגעות ב x אזי הזרימה היוצאת מ x היא בגודל 2 לפחות אבל לכל קשת בודדת בגוף קיבול 1 (באופן דומה עבור y לא יתכן שתכנסו שתי קשתות עם זרימה 1)

נתבונן בחתך $(S,W-S)$ ב H היא מספר הקשתות הנוגשות זרימה בחתך הזה. לכל קשת כזאת מתאימה ב Mf קשת, כי אם יש sx יש זרימה 1 אז חייבת להיות קשת xy עליה יש זרימה 1.

יהי M שידור ב G, fM(xy)=1 אמ"מ xy ב M או x=s קיים y עבורו zx ב M ו y=t

טענה2: לכל שידור M: fM היא זרימה עבורה |fM|=|M|. (ולכן אם f זרימה מקסימום אז fM שידור מקסימום, אחרת יש שידור M שעבורו |fM|>|fM| אבל אז |fM|>|fM|=|f|)

משפט הול hall:

עבור גרף ז צדדי G=(X,Y,E) ב G יש שידור מושלם אמ"מ $|X|=|Y|$ ולכל $S\subset X$ מתקיים: $|S|<=|N(S)|$

כאשר $N(S)=\{y\in Y\mid \exists x\in S, xy\in E\}$

טרנספורם פוריה:

נניח שיש לנו 2 פולינומים A,B מדרגה n ואנו מגדירים פולינום חדש C. חישוב C=A+B מתבצע ב O(n). חישוב C=A*B מתבצע ב $O(n^2)$.

ניתן לייצג את הפולינום ע"פ כלל הורנר ואז חישוב הפולינום מתבצע ב O(n): למשל עבור n=4:

$$A(x)=a0+x(a1+x(a2+xa3))$$

ניתן לייצג פולינום גם ע"י זוגות סדורים (xi,yi) כך ש yi=A(xi)

משפט האינטרפולציה:

לכל קבוצה בת n נקודות שונות (xi,yi) i=0...(n-1) יש פולינום יחיד A(x) שדרגתו המקסימלית היא n-1 והוא מקיים yi=A(xi) לכל 0<i<n-1

הוכחה:

$$\begin{pmatrix}1, x_0, x_0^2 \ldots\ldots x_0^{n-1}\\ 1, x_1, x_1^2 \ldots\ldots x_1^{n-1}\\ .\\ .\\ .\\ 1, x_{n-1}, x_{n-1}^2 \ldots\ldots x_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ .\\ .\\ .\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

זוהי מטריצת ונדרמונדה וערך הדטרמיננט שלה שווה ל $\prod_{i<j}(x_j-x_i)$ הדטרמיננט שונה מאפס אם הנקודות x0,x1...xn-1 שונות זו מזו.

הפיכת המטריצה ופתרון מע' המשוואות מתבצע ב $O(n^3)$. ניתן ע"פ נוסחת לגרנז' לחשב את המקדמים ב $O(n^2)$.

A=(x0,y0),(x1,y1),…(xn-1,yn-1)

B=(x0,y*0),(x1,y*1),…(xn-1,y*n-1)

C=A+B: C(xi)=A(xi)+B(xi) החישוב מתבצע ב O(n)

C=A*B: C(xi)=A(xi)*B(xi) החישוב מתבצע ב O(n)

הפולינום C(xi)=A(xi)*B(xi) מוגדר ע"י n נקודות אבל אנו רוצים פולינום מדרגה 2n-2 כלומר פולינום המוגדר ע"י 2n-1 נקודות ולכן מראש נקח את הפולינומים B ו A כך שיכילו 2n-1 נקודות.

מספרים מרוכבים

שורשי היחידה מסדר n הם: $w_n^k=e^{\frac{2\pi i k}{n}}=\cos(\frac{2\pi k}{n})+i\sin(\frac{2\pi k}{n})$

שורשי היחידה מגדירים חבורה ביחס לכפל $w_n^i\cdot w_n^j=w_n^{(i+j)\bmod n}$, איבר היחידה הוא $w_n^0=w_n^n$

טענה1: $d>0\quad k\ge 0\quad \forall n\ge 0: w_{dn}^{dk}=w_n^k$

הוכחה1: $w_{dn}^{dk}=(e^{\frac{2\pi i}{dn}})^{dk}=e^{\frac{2\pi i k}{n}}=w_n^k$

שירות בקשתות

נתון גרף לא מכוון ופונקציית קיבול אי שלילית. קשירות הגרף היא כל המשקלים הקטן ביותר של קשתות שהוצאתן מהגרף הורסת את הקשירות נסמן ב K(G). נראה שע"י הפעלת אלג' למציאת זרימת מקס |V|-1 פעמים ניתן למצוא את K(G). נשתמש בסימונים הבאים: $cuts(G)=\{S,V\setminus S)\mid S\ne\phi, S\ne V, S\subseteq V\}$

$$stcuts(G,s,t)=\{(S,V\setminus S)\mid S\ne\phi, S\ne V, S\subseteq V, (s\in S, t\in S) or (s\notin S, t\in S)\}$$

נגדיר גרף מכוון G* באופן הבא: כל קשת e ב G נתפוך לזוג קשתות מכוונות אנטי סימטריות עם קיבול זהה לקיבול e. נסמן ב Fst* פונקציית זרימת מקסימום ב G* כך ש s מקור t ז בור. Fst*=minstcut(G,s,t) *

מתקיים $\min cut(G)=\min_{(S,\bar{S})\in cuts(G)} c(S,\bar{S})$

$$\min stcuts(G,s,t)=\min_{(S,\bar{S})\in stcuts(G,s,t)} c(S,\bar{S})$$

(לפי בניית G m.c.m.f ולפי משפט Fst* כי c G* כל קשת הפכה לשתי קשתות מכוונות ואני מתחשבת בקשתות לכיוון הרצוי)*

טענה1: לכל צומת s ב V מתקיים: $cuts(G)=\bigcup_{s\in V\setminus\{s\}} stcuts(G,s,t)$

הוכחה1: ע"י הכלה דו כיוונית:

1. ברור ש $cuts(G)\supseteq\bigcup_{s\in V\setminus\{s\}} stcuts(G,s,t)$ (כל החתכים הלא טריוויאליים)
2. יהי $(S,V\setminus S)$ חתך ב cuts(G). אם s ב S אז החתך אינו טריוויאלי ולכן קיים צומת t ב V\S. אם s לא ב S אז אלא ב V\S אז החתך אינו טריוויאלי וקיים צומת t ב S. ולכן $cuts(G)\subseteq\bigcup_{s\in V\setminus\{s\}} stcuts(G,s,t)$ **

מכאן לכל s ב V מתקיים:

$$\min cut(G)=\min_{(S,\bar{S})} c(S,\bar{S})=\min_{s\in V\setminus\{s\}}\min_{(S,\bar{S})\in\bigcup_{t\in V\setminus\{s\}} stcuts(G,s,t)} c(S,\bar{S})=\min_{s\in V\setminus\{s\}}\min_{(S,\bar{S})\in stcuts(G,s,t)} c(S,\bar{S})=\min_{s\in V\setminus\{s\}} |Fst^*|$$

(שוויון שמאלי לפי ההגדרה, אחריו לפי טענה1, השוויון השישי הוא ע"פ ההגדרה ואת האחרון ראאנו לפני טענה1)

האלגוריתם: בחרים שרירותית צומת s ב V. בונים את G* וללכל צומת t ב V\{s} מוצאים את |Fst*| שזה ערך זרימת מקס ב G* כל s מקור t ז בור.מחזירים את הערך הקטן ביותר שהתקבל.

נכדומת האלגוריתם נוכעת מ * ומ **

נראה ש k(G)=mincut(G) אם נוציא את הקשתות של החתך המינימלי G יתפרק לפחות לשני רכיבי קשירות (S,V\S) ומכיוון שכל החתכים אינו מנוונים מתקיים k(G)<=mincut(G)

1. k(G)<=mincut(G): אם נוציא את הקשתות של החתך המינימלי הקשירות של G תפגם ונקבל רכיבי קשירות c1,c2...cn. נסתכל בחתך (c1,V\c1). מכיוון שהקובולים אי שליליים אבל mincut(G)=k(G) ולכן mincut(G)<=k(G) כלומר לסיכום mincut(G)<=(c(c1,V\c1)
2. k(G)>=mincut(G): אם נוציא את הקשתות של החתך המינימלי הקשירות של G תפגם ונקבל רכיבי קשירות (S,V\S) מכיוון שהקובולים אי שליליים אבל k(G)=>c(c1,V\c1) ולכן mincut(G)<=k(G) כלומר לסיכום mincut(G)=k(G)

מקבילות

טענה2: יהי n>0 נניח אזי הריבועים של n שורשי היחידה מסדר n/2.

$$(w_n^k)^2=w_n^{2k}=w_{n/2}^k$$

1. כאשר: 0≤k≤n/2 קיבלנו את שורשי היחידה מסדר n/2.
2. כאשר: n/2≤k≤n נגדיר k'=k-n/2 ואז:

$$(w_n^k)^2=(w_n^{k'+n/2})^2=(w_n^{k'})^2 w_n^n=(w_n^{k'})^2=w_n^{2k'}=w_{n/2}^{k'}$$

כלומר שוב קיבלנו את שורשי היחידה מסדר n/2.

טענה3:

לכל j≥1, k אי שלילי שאינו מתחלק בn מתקיים: $\sum_{j=0}^{n-1}(w_n^k)^j=0$

הוכחה3: $\sum_{j=0}^{n-1}(w_n^k)^j=\frac{(w_n^k)^n-1}{w_n^k-1}=\frac{w_n^{nk}-1}{w_n^k-1}=\frac{1-1}{w_n^k-1}=0$ *(ע"פ נוסחת לשור הנכסי)*

האלגוריתם למכפלת פולינומים:

נקח שני פולינומים ממעלה n-1 (ונניח לשם הפשטות כי n הוא חזקה שלמה של 2). נחשב את A ב n שורשי היחידה מסדר n: $y_k=A(w_n^k)=\sum_{j=0}^{n-1} a_j w_n^{kj}$

כלומר יש לנו את וקטור המקדמים (a0,a1,…an-1) ויש לנו את טרנספורם פוריה של A (y0,y1,…yn-1). אפשר לכתוב את הפולינום A כשני פולינומים: האחד עם חזקות זוגיות והשני עם אי זוגיות:

$$A^{(0)}(x)=a_0+a_2x+a_4x^2+\ldots+a_{(n-2)}x^{(n/2)-1}$$

$$A^{(1)}(x)=a_1+a_3x+a_5x^2+\ldots+a_{n-1}x^{(n/2)-1}$$

$$A(x)=A^{(0)}(x^2)+xA^{(1)}(x^2)$$ הנוסחה הרקורסיבית:

ע"פ הנוסחאות האלגוריתם יהיה:

```
Recursive-FFT(A)
n=length(A)
if n=1 return A
w_n = e^(2πi/n)
w=1
A^(0) = (a_0, a_2, ...a_{n-2})
A^(1) = (a_1, a_3, ...a_{n-1})
y^(0) = Recursive-FFT(A^(0))
y^(1) = Recursive-FFT(A^(1))
for k=0 to (n/2)-1
    do y_k = y_k^(0) + w y_k^(1)
       y_{k+(n/2)} = y_k^(0) - w y_k^(1)
       w = w w_n
return y
```

(פרוצדורה פוריה של הפולינומים בשורשי היחידה מסדר n/2)

בסיס הרקורסיה כי טרנספורם פוריה של פולינום ממעלה 0 הוא הפולינום עצמו.

נשים לב שמתבצע: *(השוויון האחרון בשתי השורות הוא ע"פ טענה הרקורסיה)*

$$y_k=y_k^{(0)}+w_k^n y_k^{(1)}=A^{(0)}(w_{n/2}^k)+w_n^k A^{(1)}(w_{n/2}^k)=A^{(0)}(w_n^{2k})+w_n^k A^{(1)}(w_n^{2k})=A(w_n^k)$$

$$y_{k+n/2}=y_k^{(0)}-w_n^k y_k^{(1)}=y_k^{(0)}+(w_n^{k+n/2})y_k^{(1)}=A^{(0)}(w_n^{2k})+w_n^{k+n/2}A^{(1)}(w_n^{2k})=$$

$$A^{(0)}(w_n^{2k+n})+w_n^{k+n/2}A^{(1)}(w_n^{2k+n})=A(w_n^{k+n/2})$$

סיבוכיות:

$$\left.\begin{aligned}T(n)&=2T(n/2)+O(n)\\ T(1)&=O(1)\end{aligned}\right\}\Rightarrow T(n)=O(n\log n)$$

אז איך מתבצעת ההכפלה:

1. הפעלת טרנספורם פוריה על A ועל B (מציאת שורשי יחידה מסדר 2n-1)
2. הכפלת A ו B בייצוג ע"י נקודות.
3. שחזור AB=C מהייצוג ע"י שורשי היחידה לייצוג הרגיל.

איך מתבצע השחזור:

נבנה פולינום C שמייצג ע"י שורשי היחידה מסדר n. ואז: *(המטריצה האמצעית תסומן ב V*

המטריצה דומנית היא מטריצת הנעלמים שלנו)

$$\begin{pmatrix}y_0\\ y_1\\ .\\ .\\ .\\ y_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1,1,1\ldots\ldots\ldots\ldots 1\\ 1, w_n, w_n^2\ldots\ldots w_n^{n-1}\\ 1, w_n^2, w_n^4\ldots\ldots w_n^{2(n-1)}\\ .\\ .\\ .1, w_n^{n-1}\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ .\\ .\\ .\\ a_{n-1}\end{pmatrix}$$

טענה $V_{ij}^{-1}=\frac{w_n^{-ij}}{n}$

הוכחה:

צ"ל כי V^(-1)*V=I

$$[V^{-1}V]_{jr}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{w_n^{-ij}}{n}\right)\cdot w_n^{ir}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{w_n^{i(r-j)}}{n}\right)$$

כאשר j=r (באלכסון) מתקבל $[V^{-1}V]_{jr}=1$

כאשר j לא שווה ל r נקבל ע"פ טענה 3 (כי n לא מתחלק ב n) $[V^{-1}V]_{jr}=0$

לאחר חישוב המטריצה ההופכית נקבל: $a_j=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i w_n^{-ij}$

ובעיה זו אנו יודעים לפתור ב O(nlogn)

כאשר n לא חזקה שלמה של 2 אפשר להוסיף מקדמי אפס עד ש n יגיע לחזקה שלמה של 2.

מהתרגולים...

תכנון דינאמי

סגור טרנזיטיבי: של גרף מכוון G=(V,E) הוא גרף מכוון T=(V,Et) שמקיים $(u,v)\in Et \Leftrightarrow$ ב G יש מסלול מכוון לא ריק בין u ל v. נמפפר את הצמתים V={1,2,3,…n}. נרצה לחשב את הסגור הטרנזיטיבי של גרף נתון G כלומר שבסיום האלג' נקבל $T_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{אם יש מסלול מ i ל j}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

נבצע את הלולאה הבאה לכל k בין 1 לבין n: $T_{i,j}=\max\{T_{i,j}, T_{i,k}\cdot T_{k,j}\}$ באתחול $T_{i,j}=1\Leftrightarrow(i,j)\in E$

טענה1: בסיום האיטרציה ה k T(i,j)=1 אמ"ם קיים ב G מסלול מ i ל j שבו צמתי הביניים לקוחים מהקבוצה {1..k}.

ההוכחה באינדוקציה על k: הבסיס עבור k=0 *(אין צמתי ביניים)* בצעד ה k+1 : נבצע את העדכון $T_{i,j}=\max\{T_{i,j}, T_{i,k}\cdot T_{k,j}\}$ ונחלק לשני מקרים:

1. אם העדכון היה מהאיבר השמאלי אז ע"פ ההנחה בסיום האיטרציה ה k היה מסלול ולכן גם בסיום האיטרציה ה k+1 כי רק הגדלנו את קבוצת הצמתים ה"מותרים".

2. העדכון היה מהצד הימני. בתחילת האיטרציה ה k+1 לא קיים מסלול בין i ל j מהצמתים 1...k ובגמר 1...k+1 וגם פה נחלק:

א. קיים מסלול מ i ל j שצמתי הביניים שלו מהקב' 1...k+1 (הצומת k+1 מופיע במסלול ההה פעם אחת לכל היותר) ולכן לפי הנחת האינדוקציה במסלול מ i ל k+1 יש צמתי ביניים מהקבוצה 1..k וכך גם במסלול מ k+1 ל j. ובסיום האיטרציה ה k יתקיים: T(i,k+1)=T(k+1,j)=1 ולפי העדכון בסיום האיטרציה ה k+1 נקבל T(i,j)=1.

ב. לא קיים ב G מסלול מ i ל j שמצתי הביניים שלו מהקבוצה 1...k+1 ולכן לא יכולים להיות שני מסלולים האחד מ i ל k+1 והשני מ k+1 ל j כך שצמתי הביניים יהיו מהקבוצה 1...k ולכן ע"פ ההנחה T(i,k+1)=0 או T(k+1,j)=0 ולפי העדכון בסיום האיטרציה ה k+1 מתקיים T(i,j)=0.

סיבוכיות: כל איטרציה לוקחת O(|V|^2) ויש O(|V|) איטרציות ולכן סה"כ O(|V|^3). *(ניתן במורת BFS למצוא סגור טרנזיטיבי ב O(|V||E|)*

זרימה ברשתות:

חתך מינימום: הוא חתך t-s בעל קיבול מינימלי.

אם f* זרימת מקסימום ו (S,V-S) חתך מינימום אז $|f^*|=c(S)$ (ע"פ משפט min_cut-max_flow)

טענה1: נתון גרף מכוון G ופונקציית קיבול אי שלילית על הקשתות, נתונים x,y,z שלושה צמתים שונים מ V.

נסמן Fab פונקצית זרימת מקסימום כש a הוא מקור ו b הוא בור, אז: $|Fxz|\ge\min\{|Fxy|,|Fyz|\}$

ההוכחה1: נסמן ב (Sxz,V-Sxz) חתך x-z בעל קיבול קטן ביותר. כך ש $x\in Sxz$ $z\notin Sxz$. לפי משפט ה min_cut-max_flow מתקיים c(Sxz)=|Fxz|. נפרק לשני מקרים:

1. y נמצא ב Sxz, ולכן מכיוון ש z לא נמצא ב Sxz אז החתך (Sxz,V\Sxz) הוא חתך y-z. אם נסמן (Syz,V-Syz) בעל קיבול קטן ביותר אז מתקיים: $c(Sxz)>=c(Syz)$. לפי משפט ה m.c.m.f מתקיים: $c(Syz)=|Fyz|$ ולכן $c(Sxz)>=|Fyz|$ $\Leftarrow$ $|Fxz|\ge|Fyz|$
2. y לא נמצא ב Sxz אלא y נמצא ב V-Sxz ולכן (Sxz,V-Sxz) הוא חתך x-y ובאופן למקרה 1 נקבל כי $|Fxz|\ge|Fxy|\Leftarrow c(Sxz)>=|Fxy|$

כלומר בכל מקרה: $|Fxz|>=\min\{|Fxy|,|Fyz|\}$

זרימת מקסימום בעיה לדוגמא

נתונה רשת זרימה וקשת (a,b) e=e עם קיבול חיובי ממש. תהי f פונקצית זרימה חוקית המקיימת |f|>0 וגם אין מסלול שיפור ב G_f (ברשת השיורית ביחס ל f) אין מסלולים מ a ל b) כלומר f(e)=c(e)>0 נרצה לחשב זרימת מקסימום.

נגדיר A קבוצת כל הצמתים שיש **מסלול שיפור** מ a אליהם. ברור ש a ב A וברור ש b לא ב A ולכן ברור ש (A,V\A) וכן (V\A,A) הם חתכים שאינם טריוויאלים.

טענה1: 1. כל קשת (u,v)=e כך ש u ב A ו v לא ב A מקיימת f(e*)=c(e*)

2. כל קשת (x,y)=e*e כך ש x לא ב A ו y ב A מקיימת f(e**)=0

הוכחה: 1. נניח בשלילה שלא ולכן קיימת קשת (u,v)=e* כך ש u ב A ו v לא ב A המקיימת f(e*)<>c(e*) לפי הגדרת A יש מסלול מ a ל u ב G_f ומכיוון ש f(e*)<>c(e*) אז יש מסלול מ u ל v ב G_f כלומר ב G_f יש מסלול מ a ל v אבל v לא נמצא ב A זו סתירה.

2. נניח בשלילה שלא ולכן קיימת קשת (x,y)=e**e כך ש y ב A ו x לא ב A המקיימת f(e**)=0. לפי הגדרת A יש מסלול מ a ל y ב G_f ומכיוון ש f(e**)>0 ולכן יש מסלול מ a ל x ו x ב A בסתירה.

נראה כעת ש s ב A ו t לא ב A: נחלק לשלושה מקרים שונים: *(כלאי לצייר את החתך)*

1. s ו t שניהם ב A. כל צומת ב V\A מקיים שימור זרימה ולכן:

נסכום על כל הצמתים ב V\A ונקבל שסכום כל הנכנסות ל V\A $\sum_{v\in V\setminus A}\sum_{u\in A} f(u,v)=\sum_{v\in V\setminus A}\sum_{u\in V\setminus A} f(u,v)$ (הנכנסות הפנימיות בטלות) ולכן $\sum_{v\in V\setminus A}\sum_{u\in A} f(u,v)=0$

לאפס. לפי סעיף 2 בטענה1 מתקיים: $\sum_{v\in V\setminus A}\sum_{u\in A} f(u,v)=0$ ולכן בהכרח מתקיים: $\forall v\in A: \sum_{u\in V\setminus A} f(u,v)=0$ שווה ל $\sum_{u\in V\setminus A} f(u,v)=0$ ולכן שהזרימה <=0 לכל קשת אז בהכרח f(e)=0 לכל קשת מ A ל V\A בסתירה לסעיף1 בטענה1.

2. s ב V\A. לכן כל צומת ב A מקיים שימור: $\forall v\in A: \sum_{u\in out(v)} f(e)-\sum_{u\in out(v)} f(e)=0$ ואם נסכום את הזרימה על הקשתות הנכנסות ל A פותח סכום היוצאות מ A נקבל אפס לנגיע לסתירה כמו במקרה הראשון.

3. s ב V\A ו t ב A. לכן החתך (V\A,A) הוא חתך s-t חוקי. לפי תכונות של פונקצית זרימה מתקיים: $|f|=\sum_{e\in(A,\bar{A})} f(e)-\sum_{e\in(\bar{A},A)} f(e)$

לפי סעיף 2 בטענה1 מתקיים לכל קשת בחתך (V\A,A) f(e)=0 ולכן $|f|=-\sum_{e\in(\bar{A},A)} f(e)$

לפי הנתונים f(e=(a,b))>0 ועל כל קשת אחרת בחתך (A,V\A) יש זרימה שלילית לכן $\sum_{e\in(\bar{A},A)} f(e)>0$

כלומר |f|<0 בסתירה לנתון.

מסקנה: s ב A ו t ב V\A.

נראה כי f זרימת מקסימום: החתך (V\A,A) הוא חתך s-t חוקי: (לפי טענה *1 החלק השמאלי בכישוי* השמאלי שווה לקיבול והחלק הימני לאפס)

$$|f|=\sum_{e\in(A,\bar{A})} f(e)-\sum_{e\in(\bar{A},A)} f(e)=\sum_{e\in(A,\bar{A})} c(e)=c(A,\bar{A})$$