שאלות מטיפוס נוסחאות איטרציה (קירובים חד נקודתיים):

הוכחת התכנסות - בדרך כלל ע"י משפט ההתכנסות: בכל הסעיפים הקרובים f הפונקציה המקורית, ϕ פונקציית האיטרציה.

1. בדוק של-ϕ יש שורש בקטע. בדרך כלל ע"י בדיקה שבקצוות הקטע f משנה סימן ולכן חייבת לעבור דרך 0 (פונקציה רציפה – משפט ערך הביניים), וכן שניתן לפתח את נוסחת האיטרציה $x = \phi(x)$ ולהגיע ממנה לפונקציה המקורית.

2. גזור את ϕ. בדוק ש- $\phi'<1$ בכל הקטע. אם הנגזרת גדולה מ-1 בכל הקטע אז היא בהכרח גדולה מ-1 גם בשורש והפונקציה מתבדרת (כך בדרך כלל מוכיחים שפונקציית איטרציה לא מתכנסת).

3. בדוק ש $\phi\in[a,b]$ (בדרך כלל ע"י כך שמראים שהפונקצייה מונוטונית ובודקים את הקצוות שלה).

אם כל שלושת התנאים התקיימו אז לא משנה איזה ערך התחלתי X_0 (מהקטע) תבחר, ϕ תתכנס לשורש פשוט ויחיד (ריבוי = 1) בקטע.

מציאת סדר ההתכנסות:

1. בדוק ע"י האלגוריתם למעלה ש-ϕ אכן מתכנסת.
2. גזור את ϕ ועבור כל נגזרת בדוק האם היא מסוגלת להתאפס. אם כן בדוק אם ההתאפסות היא בשורש או לא. הנגזרת הראשונה של ϕ **שאינה** מתאפסת בשורש נקראת סדר ההתכנסות (מסומנת p).

ריבוי השורש: הנגזרת הראשונה של f **שאינה** מתאפסת בשורש נקראת ריבוי השורש (מסומנת ב-q).

מציאת דיוק בר השגה: (הערה: דיוק בר השגה הוא תכונה של הפונקציה המקורית ואינו קשור לאף פונקציית איטרציה)

1. מצא את ריבוי השורש (נגזרת f ראשונה שאינה מתאפסת) וסמן ב-q.
2. בתרגיל אמור להיות נתון δ שזה שגיאה מוחלטת בחישוב f.
3. אם יש לך מושג יותר טוב לגבי התחום שבו השורש נמצא (אם עשית כבר כמה איטרציות) אז תמצא חסם תחתון על הערך של הנגזרת מס' q של f בגבולות הקטע הנ"ל. סמן חסם זה ב M_q.
4. הדיוק הוא $\varepsilon=\left(\frac{\delta(q!)}{M_q}\right)^{\frac{1}{q}}$ אבל מכיוון שבדרך כלל q=1 אז הנוסחא עבור q=1 היא: $\varepsilon=\left(\frac{\delta}{M_q}\right)$

מספר איטרציות k עד להגעה לדיוק בר השגה (או כל דיוק אחר): $k=\frac{\log\left(\frac{\varepsilon}{X_n-\alpha}\right)}{\log(m)}$ כאשר (X_n-α) זה הערכת מרחק מהשורש.

הערכת מרחק מהשורש: $|(X_n-\alpha)|\le\frac{m}{1-m}|X_n-X_{n-1}|+\frac{\delta}{1-m}$ כאשר m זה חסם עליון על הערך המוחלט של הנגזרת של ϕ בקטע.

כדאי לצמצם את גבולות הקטע אם אנחנו יודעים פחות או יותר באיזה קטע השורש, ולא לקחת את הקטע המקורי שהגדירו לנו בשאלה כי זה נותן חסם הדוק יותר. לקחת m כמה שיותר הדוק.

אקסטרפולציית Aitken:

בדרך כלל שואלים אם כדאי לעשות אקסטרפולציית Aitken. התשובה היא שבדרך כלל כדאי אם מדובר בפונקצייה עם סדר התכנסות 1, אבל צריך להיות מספיק קרובים לשורש בשביל שזה יעזור. כלומר צריך קודם לעשות כמה איטרציות ולהתקרב לשורש לפני שמפעילים את השיטה. האקסטרפולציה היא:

$$\tilde{X}_n=X_n-\frac{(X_n-X_{n-1})^2}{X_n-2X_{n-1}+X_{n-2}}$$ (מתאים ל X_2 ומעלה כי צריך עוד 2 איטרציות אחורה).

בכדי לבדוק אם האקסטרפולציה אכן שיפרה מבצעים עוד איטרציה על $\tilde{X}_n$ ובודקים אם $|\Phi(\tilde{X}_n)-\tilde{X}_n|<|\Phi(X_n)-X_n|$. אם כן, אז היה כדאי. אם זה לא שיפר משמע שלא התקרבנו מספיק לשורש וצריך לעשות עוד כמה איטרציות לפני שמפעילים את האקסטרפולציה.

איטרציית ניוטון רפסון (NR): $\Phi(X)=X-\frac{f(X)}{f'(X)}$

עבור שורש מריבוי1, אם השיטה מתכנסת, היא תתכנס עם סדר ההתכנסות 2 לפחות. אם השורש מריבוי גדול מ-1 אז סדר התכנסות הוא 1. אם יש שורש מריבוי q (ידוע) גדול מ-1 ונרצה להשיג סדר התכנסות 2 לפחות, אז משתמשים ב: $\Phi(X)=X-q\frac{f(X)}{f'(X)}$ ואם לא יודעים את q אז מבצעים את NR רגיל על $h(x)=\frac{f(X)}{f'(X)}=0$ כי ל- $h(x)$ יש שורשים פשוטים שהם אותם שורשים כמו ל $f(x)$.

שאלות אינטרפולצייה

בשאלות הללו נתונה פונקצייה כלשהי f(x) ופונקציית משקל w(x) ורוצים למצוא קירוב פולינומי מצורה נתונה (לפעמים עם שימוש בנגזרות). פולינום האינטרפולציה שדרגתו קטנה ב-1 ממספר נקודות הדגימה הוא יחיד.

שיטת השוואת מקדמים:

1. מפתחים לטור טיילור כל פונקצייה שאינה בנקודה 0. למשל:

$$f(h)=f_0+f'_0h+\frac{f''_0}{2}h^2+\frac{f^{(3)}_0}{6}h^3+\ldots+\frac{f^{(k)}_0}{k!}h^k$$

$$f(-h)=f_0-f'_0h+\frac{f''_0}{2}h^2-\frac{f^{(3)}_0}{6}h^3+\ldots+(-1)^k\frac{f^{(k)}_0}{k!}h^k$$

יש לפתח מספר איברים כמספר המקדמים שיש לך.

2. אסוף את המקדמים של כל נגזרת. כלומר רשום מה מכפיל את f_0, מה מכפיל את f'_0, מה מכפיל את f''_0 וכולי. אם אתה זקוק ל f''_0 למשל, אזי סכום כל המקדמים של f''_0 יהיה שווה ל-1 וסכום המקדמים של כל נגזרת אחרת יהיה שווה ל-0.

3. פתור את מערכת המשוואות הלינארית ומצא את המקדמים.
אם מבקשים להראות שקיים פיתוח מהצורה של הערך המדוייק ועוד פולינום אינסופי אז הפולינום האינסופי הוא הפיתוח טיילור האינסופי של שגיאת הקיטוע.

האיבר המוביל של שגיאת הקיטוע נראה כך: $C\cdot f^{(k)}{}_0h^n$ כאשר C מקדם שמורכב כפי שאוספים את המכפלה של כל נגזרת, ו-k הוא הנגזרת הראשונה שלא מתאפסת ועוד לא טיפלנו בה. ממנו מקבלים את *הסדר הפולינומי* (k-1) ואת *הסדר האסימפטוטי* (n). סדרת החזקות של h בפולינום של שגיאת הקיטוע מסומנת ב P ומשתמשים בה לאקסטרפולציית ריצ'רדסון.

אקסטרפולציית ריצארדסון: שיטה להקטנת שגיאת הקיטוע (השארית של טור הטיילור). כל איטרציה של ריצ'ארדסון מבטלת את האיבר המוביל בשגיאת הקיטוע.
נותנים לך h0 ומספר כלשהו q כך ש $h_1=\frac{h_0}{q}$, $h_2=\frac{h_0}{q^2}$ וכך הלאה. Pi הוא הסדר האסימפטוטי של שגיאת הקיטוע בכל איטרציה. (למעשה זו סידרת החזקות של h בשגיאת הקיטוע). אז ממלאים טבלה:

h	F(h)	P1	p2	p3
h0	F(h0)			
h1	F(h1)	$A_{1,2}=F(h_1)+\frac{F(h_1)-F(h_0)}{q^{p_1}-1}$		
h2	F(h2)	$A_{1,3}=F(h_2)+\frac{F(h_2)-F(h_1)}{q^{p_1}-1}$	$A_{2,3}=A_{1,3}+\frac{A_{1,3}-A_{1,2}}{q^{p_2}-1}$	
h3	F(h3)	$A_{1,4}=F(h_3)+\frac{F(h_3)-F(h_2)}{q^{p_1}-1}$	$A_{2,4}=A_{1,4}+\frac{A_{1,4}-A_{1,3}}{q^{p_2}-1}$	$A_{3,4}=A_{2,4}+\frac{A_{2,4}-A_{2,3}}{q^{p_3}-1}$

וכולי כמה איטרציות שרוצים. F(h) הוא ההצבה של h הספציפי בפולינום האינטרפולציה שחישבת קודם.

שיטת הפרשים מחולקים:

טובה למציאת פולינום אינטרפולציה על פונקציה וכאשר יש תנאים על הנגזרת.

1. נתונה פונקציה שאתה רוצה לקרב (לפעמים כרשימה של ערכים בנקודות), וסדרת נקודות X_0-X_n שבהם אתה רוצה לבצע את האינטרפולצייה.

2. רשום את הנקודות בטבלה. במקום $A_{i,j}$ רושמים $\frac{A_{i-1,j}-A_{i-1,j-1}}{X_j-X_{j-i}}$. דוגמא ל-4 נקודות:

Xi	f(X)	$A_{1,x}$	$A_{2,x}$	$A_{3,x}$	$A_{4,x}$
X_0	$f(X_0)$				
X_1	$f(X_1)$	$A_{1,1}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
X_2	$f(X_2)$	$A_{1,2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$A_{2,2}=\frac{A_{12}-A_{11}}{x_2-x_0}$		
X_3	$f(X_3)$	$A_{1,3}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$A_{2,3}=\frac{A_{13}-A_{12}}{x_3-x_1}$	$A_{3,3}=\frac{A_{23}-A_{22}}{x_3-x_0}$	
X_4	$f(X_4)$	$A_{1,4}=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$	$A_{2,4}=\frac{A_{14}-A_{13}}{x_4-x_2}$	$A_{3,4}=\frac{A_{24}-A_{23}}{x_4-x_1}$	$A_{4,4}=\frac{A_{34}-A_{33}}{x_4-x_0}$

האלכסון המסומן הוא המקדמים (c0 הוא העליון ביותר באלכסון). הפולינום הוא:

$$P=C_0+C_1(X-x_0)+C_2(X-x_0)(X-x_1)+C_3(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)+\ldots+C_n(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_{n-1})$$

אם יש גם תנאים על הנגזרת אז זה נקרא שיטת הרמייט ועושים כך:

נניח שיש תנאים על הנגזרת הראשונה והשניה בנקודה X_2. במקומות שלא ניתן לחשב את המכנה כי הוא יוצא 0 שמים את הנגזרות שידועות (יש תנאי עליהן).

אז הטבלה תראה כך:

Xi	f(X)	$A_{1,x}$	$A_{2,x}$	$A_{3,x}$	$A_{4,x}$	$A_{5,x}$	$A_{6,x}$
X_0	$f(X_0)$						
X_1	$f(X_1)$	$A_{1,1}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$					
X_2	$f(X_2)$	$A_{1,2}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$	$A_{2,2}=\frac{A_{12}-A_{11}}{x_2-x_0}$				
X_2	$f(X_2)$	$A_{1,3}=f'(X_2)$	$A_{2,3}=\frac{A_{13}-A_{12}}{x_2-x_1}$	$A_{3,3}=\frac{A_{23}-A_{22}}{x_2-x_0}$			
X_2	$f(X_2)$	$A_{1,4}=f'(X_2)$	$A_{2,4}=\frac{f''(X_2)}{2!}$	$A_{3,4}=\frac{A_{24}-A_{23}}{x_2-x_1}$	$A_{4,4}=\frac{A_{34}-A_{33}}{x_2-x_0}$		
X_3	$f(X_3)$	$A_{1,5}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$	$A_{2,5}=\frac{A_{15}-A_{14}}{x_3-x_2}$	$A_{3,5}=\frac{A_{25}-A_{24}}{x_3-x_2}$	$A_{4,5}=\frac{A_{35}-A_{34}}{x_3-x_2}$	$A_{5,5}=\frac{A_{45}-A_{44}}{x_3-x_0}$	
X_4	$f(X_4)$	$A_{1,6}=\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$	$A_{2,6}=\frac{A_{16}-A_{15}}{x_4-x_2}$	$A_{3,6}=\frac{A_{26}-A_{25}}{x_4-x_2}$	$A_{4,6}=\frac{A_{36}-A_{35}}{x_4-x_2}$	$A_{5,6}=\frac{A_{46}-A_{45}}{x_4-x_1}$	$A_{6,6}=\frac{A_{56}-A_{55}}{x_4-x_0}$

שוב המקדמים הם על האלכסון והפולינום הוא כמו בשיטה הרגילה.

השגיאה באינטרפולציה: $\left|f(x)-P_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(X-X_0)(X-X_1)\ldots(X-X_n)\right|$ (כאשר n היא מעלת הפולינום, ו X_i הוא X בשורה ה i).

מציאת h אופטימלי:

מחשבים את Rn השגיאה הנומרית שהיא δ כפול המקדמים של כל איבר שיש בו שגיאה. למשל אם יש Af+Bf+Cf ויש שגיאה של δ בחישוב f אז Rn=δ(|A|+|B|+|C|). Rtot=Rn+Rt, גוזרים את Rtot ומשווים ל-0. מחלצים את h וזהו ה-h האופטימלי.

מינימום ריבועים (Least Squares):

משתמשים אם רוצים למצוא קירוב שנותן נורמה אוקלידית מינימלית.

1. נתונה פונקצייה f, קטע [a,b], פונקצית משקל w(x) ורוצים קירוב מהצורה: $f^* = c_0\phi_0 + c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + ... + c_n\phi_n$ כאשר ϕ_k הם סדרה של פונקציות (למשל $1,x,x^2$).

2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{pmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle\ldots\langle\varphi_0,\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle\ldots\langle\varphi_1,\varphi_n\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi_n,\varphi_0\rangle\langle\varphi_n,\varphi_1\rangle\ldots\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\varphi_0,f\rangle \\ \langle\varphi_1,f\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi_n,f\rangle \end{pmatrix}$$

הערה: כאשר ϕ_k משפחה אורתוגונלית, אז $c_i = \frac{<\phi_i,\phi_i>}{<\phi_i,f>}$ ואלו נקראים מקדמי פורייה.

כאשר $<x,y> = \int_a^b x\cdot y\cdot w(x)dx$. כאשר <x,y>=<y,x> ולכן זו מטריצה סימטרית. קיבלת את המקדמים c_0 עד c_n.

הקירוב המתקבל הוא הקירוב שנותן נורמה אוקלידית מינימלית. <u>הערה</u>: אם לא ידוע דבר נוסף על הפונקציה, קירוב בעזרת מינימום ריבועים בעזרת פונקציית משקל צ'בישב נותן את הקירוב הפולינומי הטוב ביותר.

<u>אינטגרציה בשיטת גאוס:</u>

נתון אינטגרל $\int_a^b f(x)\cdot w(x)dx$ ורוצים למצוא לו קירוב בעזרת n+1 נקודות דגימה.

הפולינום נראה כך: $\hat{I}(f) = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + \ldots A_nf(x_n)$

שיטת גאוס תיתן קירוב בעל סדר דיוק פולינומי של 2n+1, כלומר הוא יהיה מדוייק לחלוטין (שגיאה = 0) עבור <u>כל f(x) פולינום</u> מדרגה 2n+1 או פחות.

1. חישוב נקודות הדגימה. נקודות הדגימה יהיו שורשים של פולינום שהוא אורתוגונלי בקטע [a,b] עם פונקציית המשקל w(x) הנתונה. בודקים בחוברת אם בקטע הנ"ל יש משפחה ידועה של פולינומים אורתוגונליים. אם לא, אז מפתחים.

אלגוריתם פיתוח פולינום אותוגונלי מדרגה n+1:

פותרים את מערכת המשוואות הבאה: (כאשר מתעלמים מהשורה האחרונה)

$$\begin{pmatrix} <1,1> & <1,x> & <1,x^2> & \ldots & <1,x^{n+1}> \\ <x,1> & <x,x> & <x,x^2> & \ldots & <x,x^{n+1}> \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <x^n,1> & <x^n,x> & <x^n,x^2> & \ldots & <x^n,x^{n+1}> \\ <x^{n+1},1> & <x^{n+1},x> & <x^{n+1},x^2> & \ldots & <x^{n+1},x^{n+1}> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כאשר $<x,y> = \int_a^b x\cdot y\cdot w(x)dx$.

זה נותן את הפולינום: $P_{n+1} = X^{n+1} + C_nX^n + C_{n-1}X^{n-1} + \ldots C_0$. לפולינום הזה n+1 שורשים והם נקודות הדגימה X_0-X_n.

2. מכיוון שהקירוב אמור להיות נכון עבור כל f(x) שהוא פולינום מדרגה 2n+1 או פחות ניקח פולינומים קלים כדי למצוא את המקדמים A_0 עד A_n. כלומר, אנחנו זקוקים ל n+1 משוואות. המשוואות הם:

$\int_a^b X^k w(x)dx = A_0\left(X_0\right)^k + A_1\left(X_1\right)^k + \ldots + A_n\left(X_n\right)^k$ ניקח k מ-0 ועד n וכך נקבל n+1 משוואות שמתוכן נוכל לחלץ את המקדמים A_0 עד A_n.

<u>השגיאה באינטגרציית גאוס:</u>

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\cdot w(x)dx}_{I} - \hat{I} = \frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\cdot \underbrace{\int_a^b \left(\frac{1}{K_n}P_{n+1}\right)^2}_{\text{הפולינום האורתוגונלי מחולק במקדם האיבר המוביל שלו}} w(x)dx$$

<u>טריק לחישוב השגיאה בלי לחשב את האינטגרל:</u> האינטגרל בשגיאה הוא קבוע ואינו תלוי בפונקציה. נסמן אותו ב-C. ניקח את $f(x) = x^{(2n+2)}$ ונחשב את $\int_a^b f(x)\cdot w(x)dx$ באופן אנליטי (מדוייק). אז נחשב פונקצייה זו בעזרת פולינום הקירוב שמצאנו. נחסיר את התוצאות ונקבל $\varepsilon = \left(\int_a^b x^{(2n+2)}\cdot w(x)dx\right) - \tilde{I}(x^{(2n+2)})$. ε זה שווה ל-C כי $\frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!}$ יוצא 1 במקרה הזה. וככה מקבלים את C.

טרנספורמציה לתחום שונה

נניח כי חישבנו אינטגרל גאוס בתחום [c,d], ורוצים לחשב אינטגרל עם אותה פונקציית משקל בתחום [a,b]:

משתמשים בטרנספורמציה הלינארית הבאה:

$$t(x)=\frac{b-a}{d-c}x+\frac{bd-bc-b+a}{d-c}$$

$$c\le t\le d\Rightarrow a\le x\le b$$

$$dt=\frac{b-a}{d-c}dx$$

שזה בעצם כמו לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned}ay+z&=c\\ by+z&=d\end{aligned}$$

מציבים את $t(x)$ בכל מקום בו היה t באינטגרל המקורי, ומקבלים את האינטגרל מומר לתחום [a,b].

שגיאות:

שגיאה מוחלטת: $\Delta f=\left|f^*-f\right|$

שגיאה יחסית: $\frac{\Delta f}{f}=\frac{\left|f^*-f\right|}{f}$

שגיאות ייצוג:

כאשר מדברים על שגיאה הנובעת משימוש ב- d ספרות <u>דצימליות</u> אז השגיאה **<u>המוחלטת</u>** היא 10^{-d} בקיצוץ או $0.5*10^{-d}$ בהעגלה.

כאשר מדברים על שגיאה הנובעת משימוש ב-t ספרות <u>משמעותיות</u> אז השגיאה **<u>היחסית</u>** היא 10^{1-t} בקיצוץ או $0.5*10^{1-t}$ בהעגלה.

מספר מצב: מסומן ב- C_p. מספר המצב הוא היחס בין השגיאה בפלט לשגיאה בקלט. $C_p=\frac{\left|\frac{\Delta f}{f}\right|}{\left|\frac{\Delta x}{x}\right|}=\left|\frac{f'(x)}{f(x)}x\right|$. מספר המצב הוא מדד לרגישות הפונקצייה לשגיאות קלט. ככל שמספר המצב גבוה יותר, הפונקצייה פחות יציבה נומרית כי היא יותר רגישה לשגיאות קלט.

שגיאות קלט: ההשפעה של שגיאת קלט על שגיאת הפלט: $\Delta f=f'\cdot\Delta x$ (אם f היא פונקציה במשתנה אחד) ואם f היא פונקצייה ב-n משתנים אז: $\Delta f(x_1,x_2,\dots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\Delta x_i$

שגיאות אלגוריתם: שגיאות שתלויות באלגוריתם החישוב. נניח שכל פעולת חישוב מתבצעת עם שגיאה מוחלטת החסומה ע"י ε. אז שגיאת האלגוריתם מתקבלת ע"י הכפלת כל פעולה (הפעלת אופרטור חשבוני כלשהו על הנתונים) ב- $(1+\varepsilon)$. למשל אם היה $X+Y$ אז להחליף ב $(X+Y)(1+\varepsilon)$, ואם היה X^2 אז להחליף ב $X^2(1+\varepsilon)$ וכך הלאה. כל ε^n כאשר $n>1$ ניתן להזניח (ואת כל מה שהוא מכפיל).

שגיאות התבטלות:

כאשר מחסרים שני מספרים מאוד קרובים, קיימת בעייה של התבטלות. אם עובדים עם t ספרות משמעותיות ומחסרים 2 מספרים אשר זהים ב- x ספרות משמאל, יתקבל דיוק של רק $t-x$ ספרות משמעותיות.

ספליין:

נתונות נקודות $x_0, x_1, \ldots, x_n$ וכן ערכי הפונקצייה בנקודות אלו $y_0, y_1, \ldots, y_n$. נרצה לקרב את הפונקציה על ידי אוסף פולינומים מסדר p. כלומר, בין x_0 ל- x_1 נמתח פולינום, בין x_1-x_2 נמתח פולינום וכך הלאה. כמו כן, נרצה שהחיבור בין הפולינומים הנ"ל יהיה רציף ב p-1 נגזרות.

ספליין מסדר 3 נקרא **ספליין קובי** ומסומן $S_3(x)$.

חישוב הספליין:

נגדיר:

גודל המרווח : $h_i = x_i - x_{i-1}$

שיפוע מקומי: $d_i = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$

קואורדינטה מנורמלת מקומית: $t = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{h_i}$

אז הספליין הקובי בין הנקודה x_{i-1} לנקודה x_i הוא:

$$q_i(t) = t \cdot y_i + (1-t) \cdot y_{i-1} + h_i \cdot t \cdot (1-t)\left[\left(k_{i-1} - d_i\right) \cdot \left(1-t\right) - \left(k_i - d_i\right) \cdot t\right]$$

נדרוש: רציפות גם בנגזרת השנייה בנקודות הפנימיות ($x_1 \ldots x_{n-1}$). זה יתן לנו מערכת של n-1 משוואות:

$$h_{i+1} \cdot k_{i-1} + 2\left(h_i + h_{i+1}\right) \cdot k_i + h_i \cdot k_{i+1} = 3\left(h_i d_{i-1} + h_{i+1} d_i\right)$$

חסרות לנו עדיין 2 משוואות (ואלו דרגות החופש שלנו) שמגדירות איך הספליין יתנהג מחוץ לקטע (תנאי שפה). תנאי השפה הרגילים הם שהפולינום פשוט ימשיך כקו ישר מחוץ לקטע. זה נותן לנו עוד 2 משוואות:

$$2k_0 + k_1 = 3d_1$$

$$k_{n-1} + 2k_n = 3d_n$$

פותרים n+1 משוואות עם n+1 נעלמים ומקבלים את הנעלמים $k_0 \ldots k_n$

איך משתמשים בספליין:

1. מחשבים באיזה אינטרוול i נמצאת הנקודה x_0 בה אנו רוצים לחשב את ערך הפונקצייה
2. מחשבים את t מתוך $t = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{h_i}$
3. הערך המקורב הוא q(t).