דף נוסחאות / סיכום

תורת הקוונטים 3 (117007)

בהצלחה

חן אבינדב חורף תשס"ז

תמונת שרדינגר ותמונת הייזנברג

בתמונת שרדינגר, וקטור המצב תלוי בזמן, והאופרטורים עצמם קבועים. $|\psi_S(t)\rangle$ מתפתח בזמן לפי משוואת שרדינגר והפיתרון הוא:

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_S(t)\rangle=\hat{H}|\psi_S(t)\rangle \quad\rightarrow\quad |\psi_S(t)\rangle=e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_S(0)\rangle$$

וערך התצפית של אופרטור $\hat{A}_S$ בזמן t הוא:

$$\langle\psi_S(t)|\hat{A}_S|\psi_S(t)\rangle=\langle\psi_S(0)|e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}|\psi_S(0)\rangle$$

בתמונת הייזנברג האופרטור הוא זה שתלוי בזמן ו-וקטור המצב קבוע:

$$\hat{A}_H(t)=e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\hat{A}_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t},\qquad |\psi_H(t)\rangle=|\psi_S(0)\rangle$$

$\hat{A}_H(t)$ מתפתח בזמן לפי המשוואה: $\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t)=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}_H(t)\right]$

מקבלים אותו ערך תצפית עבור $\hat{A}$ בשתי ההצגות.

קוונטיזציה של שדה אלקטרומגנטי

המשתנים הקנוניים הם:

$$\hat{Q}_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\left(C_{\mathbf{k},\alpha}(t)+C^*_{\mathbf{k},\alpha}(t)\right)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{k},\alpha}(t)=-i\sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}\omega_k\left(C_{\mathbf{k},\alpha}(t)-C^*_{\mathbf{k},\alpha}(t)\right)$$

והם מקיימים את יחסי החילוף הקנוניים:

$$\left[P_{\mathbf{k},\alpha},Q_{\mathbf{q},\beta}\right]=\delta_{\mathbf{k}\mathbf{q}}\delta_{\alpha,\beta}\frac{\hbar}{i},\qquad \left[P_{\mathbf{k},\alpha},P_{\mathbf{q},\beta}\right]=\left[Q_{\mathbf{k},\alpha},Q_{\mathbf{q},\beta}\right]=0$$

אופרטורי השמדה ויצירה:

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\sqrt{\frac{V\omega_k}{2\pi\hbar c^2}}\hat{C}_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}\hat{Q}_{\mathbf{k},\alpha}(t)+\frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\hat{P}_{\mathbf{k},\alpha}(t)$$

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\sqrt{\frac{V\omega_k}{2\pi\hbar c^2}}\hat{C}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\sqrt{\frac{\omega_k}{2\hbar}}\hat{Q}_{\mathbf{k},\alpha}(t)-\frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}\hat{P}_{\mathbf{k},\alpha}(t)$$

מקיימים: $\left[\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q},\beta}\right]=\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\delta_{\alpha,\beta},\quad \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha},\hat{a}_{\mathbf{q},\beta}\right]=\left[\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha},\hat{a}^\dagger_{\mathbf{q},\beta}\right]=0$

בדרך כלל לא רושמים את התלות בזמן של אופרטורים אלו, לכן חשוב לזכור כי הם מתפתחים לפי:

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(0)e^{-i\omega_k t}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}(t)=\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}(0)e^{i\omega_k t}$$

האנרגיה של השדה הא"מ היא אז סכום של אוסילטורים $H_{\mathbf{k},\alpha}$:

$$H_{\mathbf{k},\alpha}=\frac{1}{2}\left(P^2_{\mathbf{k},\alpha}+\omega_k^2 Q^2_{\mathbf{k},\alpha}\right)=\frac{1}{2}\hbar\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}+\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\right)$$

והמשתנים הקנוניים מקיימים את קשרי המילטון:

$$\frac{d}{dt}Q_{\mathbf{k},\alpha}=\frac{\partial H_{\mathbf{k},\alpha}}{\partial P_{\mathbf{k},\alpha}},\qquad \frac{d}{dt}P_{\mathbf{k},\alpha}=-\frac{\partial H_{\mathbf{k},\alpha}}{\partial Q_{\mathbf{k},\alpha}}$$

אופרטור ההמילטוניאן הכולל של השדה האלקטרומגנטי:

$$\hat{H}_{\text{field}}=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left(\hat{P}^2_{\mathbf{k},\alpha}+\omega_k^2\hat{Q}^2_{\mathbf{k},\alpha}\right)=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\omega_k\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}+\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\right)$$

הפוטנציאל הוקטורי והשדות במונחים של אופרטורי היצירה וההשמדה:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)=c\sum_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(\mathbf{r},t)=i\sum_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}e^{-i\omega_k t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}-\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}e^{i\omega_k t-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}(\mathbf{r},t)=ic\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left(\mathbf{k}\times\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\right)\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}}\left(\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}e^{-i\omega_k t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}-\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}e^{i\omega_k t-i\mathbf{k}\cdot\vec{r}}\right)$$

חזרה על אוסילטור הרמוני קוונטי

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2=\frac{1}{2}\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+1/2\right)$$

$$\hat{a}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q}+i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}}\hat{p}\qquad\qquad \hat{q}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$\hat{a}^\dagger=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{q}-i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}}\hat{p}\qquad\qquad \hat{p}=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)$$

יחסי החילוף: $[\hat{p},\hat{q}]=-i\hbar$ ו- $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=1$

אלה הם האופרטורים בתמונת שרדינגר. את הייצוג בתמונת הייזנברג מקבלים מתוך משוואת התנועה של $\hat{a}(t)$ ו- $\hat{a}^\dagger(t)$:

$$\hat{a}(t)=\hat{a}(0)e^{-i\omega t}\qquad \hat{q}(t)=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}(0)e^{-i\omega t}+\hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}\right)$$

$$\hat{a}^\dagger(t)=\hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}\qquad \hat{p}(t)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\left(\hat{a}(0)e^{-i\omega t}-\hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}\right)$$

אופרטורי היצירה וההשמדה פועלים לפי:

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\qquad \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$$

האופרטור $\hat{N}=\hat{a}^\dagger\hat{a}$ סופר את המצב: $\hat{N}|n\rangle=n|n\rangle$

האנרגיה של הרמה ה- nית היא: $\hbar\omega\left(n+1/2\right)$

שדה אלקטרומגנטי כאוסף אוסילטורים

אנו עובדים בכיול קולון: $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$

לכן ניתן לתאר שדה אלקטרומגנטי חופשי (ללא מטענים) על ידי הפוטנציאל הוקטורי $\mathbf{A}$ בלבד, עם $\phi=0$.

המשוואה שמקיים $\mathbf{A}$ היא: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{A}=0$

והשדות שנגזרים מ- $\mathbf{A}$ הם: $\boldsymbol{\mathcal{E}}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \boldsymbol{\mathcal{B}}=\nabla\times\mathbf{A}$

הפיתוח כולו נעשה בקופסה בצורת קוביה, עם אורך צלע L ונפח $V=L^3$, ותנאי השפה מחזוריים ($k_{x,y,z}=(2\pi/L)n_{x,y,z}$). הפיתרון:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sum_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\left(C_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}+C^*_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{r},t)=\frac{i}{c}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\omega_k\left(C_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}-C^*_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}}(\mathbf{r},t)=-i\sum_{\mathbf{k},\alpha}\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\times\mathbf{k}\right)\left(C_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}-C^*_{\mathbf{k},\alpha}(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)$$

כאשר $C_{\mathbf{k},\alpha}(t)=C_{\mathbf{k},\alpha}e^{-i\omega_k t}$. האנרגיה שאגורה בשדה היא:

$$E=\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\left(\boldsymbol{\mathcal{E}}^2(\vec{r},t)+\boldsymbol{\mathcal{B}}^2(\vec{r},t)\right)$$

$$=\frac{V}{2\pi c^2}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\omega_k^2 C_{\mathbf{k},\alpha}(t)C^*_{\mathbf{k},\alpha}(t)$$

פוטונים

כל אוסילטור עם קיטוב $(\mathbf{k},\alpha)$ מייצג פוטון עם וקטור גל $\mathbf{k}$ וקיטוב $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}$, כאשר $\left\{\mathbf{e}_{\mathbf{k},1},\mathbf{e}_{\mathbf{k},2}\right\}$ פורשים את מרחב הקיטוב של הגלים המישוריים עם $\mathbf{k}$. מצב היסוד של המערכת הוא $|0\rangle$ והוא מייצג וואקום. האנרגיה של מצב זה היא $\langle 0|\hat{H}_{\text{field}}|0\rangle=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\omega_k=\infty$

לכן נתייחס תמיד להפרשי האנרגיה בין מצבים שונים. מגדירים את ההמילטוניאן המנורמל: $:\hat{H}_{\text{field}}:=\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\omega_k\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}=\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\omega_k\hat{N}_{\mathbf{k},\alpha}$

התנע מוגדר לפי:

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{P}}}=\frac{1}{4\pi c}\int\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{E}}}\times\hat{\boldsymbol{\mathcal{B}}}\right)d^3r$$

והוא נתון על ידי:

$$=\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\mathbf{k}\left(\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}+1/2\right)=\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\mathbf{k}\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k},\alpha}$$

האיבר השני מתאפס מכיוון ש- $\sum_{\mathbf{k}}\mathbf{k}=0$.

יחידות טבעיות במערכת $\hbar=c=1$, מהירות, תנ"ז ומטען הם חסרי מימד. זמן נמדד ביחידות אורך, מסה ואנרגיה ביחידות של אחד חלקי אורך.

פליטה ספונטנית

ההמילטוניאן בבעיה של אטום מימן בנוכחות שדה א"מ קוונטי:

$$\hat H = \overbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r}}^{\hat H_{\text{atom}}} + \overbrace{\frac12\sum_{\mathbf{k},\alpha}\hbar\omega_k\left(\hat a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\hat a_{\mathbf{k},\alpha} + \hat a_{\mathbf{k},\alpha}\hat a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\right)}^{\hat H_{\text{field}}}$$

$$+\underbrace{\frac{e}{m}\sum_{\mathbf{k},\alpha}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_k}}\left(\hat a_{\mathbf{k},\alpha}(t)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}(t)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}}\right)}_{\hat H_{\text{interaction}} = \frac{e}{mc}\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{p}}}$$

$\hat{\mathbf{p}}$ הוא אופרטור התנע של האלקטרון באטום. חוק הזהב של פרמי:

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle f|\hat H_{int}|i\rangle\right|^2\delta\left(\varepsilon_f+\hbar\omega_k-\varepsilon_i\right)$$

מספר המצבים השונים (מספר הוקטורים $\mathbf{k}$ השונים) באינטרוול $d^3\mathbf{k}$ הוא:

$$(dn)^3 = \left(\frac{dk}{2\pi/L}\right)^3 = \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi/L)^3} = \frac{V}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{k}$$

קצב המעברים הוא: (לפי $d^3\mathbf{k} = k^2d\Omega dk$)

$$W = \sum_\alpha \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}\,\Gamma_{i\to f} = \frac{V}{(2\pi)^3}\sum_\alpha\int_{4\pi}d\Omega\int k^2dk\,\Gamma_{i\to f}$$

במקרה שבו המצב ההתחלתי הוא בוואקום והמצב הסופי מכיל פוטון אחד $\mathbf{k},\alpha$, אלמנט המטריצה שבתוך $\Gamma_{i\to f}$ הוא:

$$\langle f|\hat H_{\text{int}}|i\rangle = \frac{e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{V\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\cdot\overbrace{\langle\psi_f|\hat{\mathbf{p}}|\psi_i\rangle}^{\mathbf{p}_{fi}}\right)\cdot\underbrace{\langle 1_{\mathbf{k},\alpha}|\hat a_{\mathbf{k},\alpha}|0\rangle}_{=1}$$

זאת בקירוב הדיפול החשמלי בלבד, $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\approx 1$. קירוב זה נכון עבור קרינה באורך גל גדול בהרבה ממימדי האטום, אך נזכור כי נקבל מעברים בקירוב הדיפול החשמלי בלבד (אם ניקח עוד איברים בפיתוח נקבל אולי מעברים אחרים). לאחר הצבת $\Gamma_{i\to f}$ וחישוב האינטגרל:

$$W = \frac{e^2\left(\varepsilon_i-\varepsilon_f\right)^3}{2\pi\hbar^4c^3}\sum_\alpha\int_{4\pi}\left|\mathbf{e}_{\mathbf{k},\alpha}\cdot\mathbf{r}_{fi}\right|^2d\Omega$$

המעבר בין $\mathbf{p}_{fi}$ ל- $\mathbf{r}_{fi}$ לפי:

$$\underbrace{\langle f|\hat{\mathbf{p}}|i\rangle}_{\mathbf{p}_{fi}} = \frac{im}{\hbar}\underbrace{\langle f|\hat{\mathbf{r}}|i\rangle}_{\mathbf{r}_{fi}}\left(\varepsilon_f-\varepsilon_i\right)$$

לאחר חישוב האינטגרל הזוויתי:

$$W_{i\to f} = \frac{e^2\left(\varepsilon_i-\varepsilon_f\right)^3}{2\pi\hbar^4c^3}\frac{8\pi}{3}\left|\mathbf{r}_{fi}\right|^2$$

זמן החיים למעבר $\tau_{i\to f}$ הוא:

$$\tau_{i\to f} = \frac{1}{W_{i\to f}}$$

כאשר המצב ההתחלתי מכיל כבר $n_{\mathbf{k},\alpha}$ פוטונים, המצב הסופי יכיל $n+1$ פוטונים כאלה, ולתוך $\langle f|\hat H_{\text{int}}|i\rangle$ ייכנס הגורם:

$$\left\langle n_{\mathbf{k},\alpha}+1\right|\hat a^\dagger_{\mathbf{k},\alpha}\left|n_{\mathbf{k},\alpha}\right\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\alpha}+1}$$

נקבל קצב מעברים גדול פי $\left(n_{\mathbf{k},\alpha}+1\right)$. זוהי הפליטה המאולצת.

תכונות משוואת דיראק

$(\hbar=c=1)$

$\gamma^\mu\partial_\mu$ הוא סקלר, לכן משוואת דיראק היא אינווריאנטית לטרנס' לורנץ. מגדירים את פונקצית הגל הצמודה:

$$\bar\psi \equiv \psi^\dagger\gamma^0$$

המקיימת את משוואת דיראק הצמודה:

$$i\partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu + m\bar\psi = 0$$

נכפול את משוואת דיראק המקורית ב- $\bar\psi$ משמאל ואת המשוואה האחרונה ב- ψ מימין ונחבר, נקבל:

$$\partial_\mu\left(\bar\psi\gamma^\mu\psi\right) = \partial_\mu j^\mu = 0$$

כלומר, הגודל $j^\mu = \bar\psi\gamma^\mu\psi$ נשמר. זהו הארבע וקטור המתאר את זרם ההסתברות של ψ. צפיפות ההסתברות היא רכיב האפס של הוקטור, כלומר:

$$\rho = \bar\psi\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \sum_a\left|\psi_a\right|^2 > 0$$

התנע הזוויתי הקלאסי, $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, אינו נשמר על ידי ההמילטוניאן של משוואת דיראק:

$$[H,\mathbf{L}] = -i(\alpha\times\mathbf{p}) \neq 0$$

קבוע התנועה החדש הוא:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} + \tfrac12\mathbf{\Sigma}$$

$\mathbf{J}$ חילופי עם H ולכן נשמר.

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix}\boldsymbol\sigma & 0\\ 0 & \boldsymbol\sigma\end{bmatrix}$$

משוואת קליין-גורדון

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + M^2\right)\psi = 0,\quad M = \frac{mc}{\hbar}$$

$$\left(p^2-m^2c^2\right)\psi = 0,\quad p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\partial^\mu$$

מתקבלת מתוך היחס:

$$E^2 = p^2c^2+m^2c^4$$

בעזרת ההחלפה:

$$E\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\quad \mathbf{p}\to -i\hbar\boldsymbol\nabla$$

הפתרונות של משוואה זו הם גלים מישוריים:

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = A_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\frac{i}{\hbar}E_kt}$$

כאשר האנרגיות הן:

$$E_{\mathbf{k}} = \pm\sqrt{c^2\hbar^2k^2+m^2c^4}$$

צפיפות ההסתברות וצפיפות זרם ההסתברות הם:

$$\rho = \frac{\hbar}{2imc^2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

$$\mathbf{j} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\boldsymbol\nabla\psi^* - \psi^*\boldsymbol\nabla\psi\right)$$

שתי הבעיות כאן הן: קיימים פתרונות עם אנרגיות שליליות, ושצפיפות ההסתברות לא בהכרח חיובית.

משוואת דיראק

$(\hbar=c=1)$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\boldsymbol\alpha\cdot\mathbf{p}+\beta m^2\right)\psi = \left(-i\boldsymbol\alpha\cdot\boldsymbol\nabla+\beta m^2\right)\psi = H\psi$$

כאשר $\boldsymbol\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ו- β קבועים, המקיימים:

$$\beta^2 = 1,\quad \{\alpha_i,\beta\} = 0,\quad \{\alpha_i,\alpha_j\} = 2\delta_{ij}$$

α,β הן מטריצות 4×4 (במרחב הספינורי), ולכן גם לפונקצית הגל ψ ארבעה רכיבים. ניתן לרשום את משוואת דיראק גם בצורה קווריאנטית:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0$$

כאשר γ^μ הן מטריצות דיראק:

$$\gamma^\mu \equiv (\beta,\ \beta\boldsymbol\alpha) = (\beta,\ \beta\alpha_1,\ \beta\alpha_2,\ \beta\alpha_3)$$

המקיימות קשר אנטי-חילופי:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

ובפרט:

$$\left(\gamma^0\right)^2 = 1,\qquad \left(\gamma^i\right)^2 = -1$$

כאשר γ^0 הרמיטית ו- $\gamma^{1,2,3}$ אנטי-הרמיטיות.

הצגת Pauli-Dirac, Weyl ו- Majorana

מט' פאולי: $\left(\left[\sigma_i,\sigma_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\quad \left\{\sigma_i,\sigma_j\right\} = 2\delta_{ij}\right)$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

הצגת Pauli-Dirac: (סטנדרטית)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}$$

הצגת Weyl: (כיראלית)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^i = \begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ -\sigma^i & 0\end{pmatrix}$$

הצגת Majorana: (פתרונות ממשיים כי כאן $i\gamma^\mu \in \mathbb{R}^{4\times4}$)

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix}i\sigma_3 & 0\\ 0 & i\sigma_3\end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix}0 & -\sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix},\qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix}-i\sigma_1 & 0\\ 0 & -i\sigma_1\end{pmatrix}$$

כתיב קווריאנטי

הטנזור המטרי:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

נורמה של וקטור A:

$$A^2 = g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu = g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu = A^\mu A_\mu = A\cdot A$$

A_μ: רכיב קו-ווריאנטי

A^μ: קונטרה-ווריאנטי

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu$$

כאשר $g^{\mu\nu} = \left(g_{\mu\nu}\right)^{-1}$.

נגזרת קו-וריאנטית:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

וקונטרה-וריאנטית:

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

הגרדיאנט לכן:

$$\partial_\mu = \left(\frac1c\frac{\partial}{\partial t},\quad \boldsymbol\nabla\right)$$

$$\partial^\mu = \left(\frac1c\frac{\partial}{\partial t},\ -\boldsymbol\nabla\right)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial_\mu\partial^\mu$$

ואופרטור התנע:

$$\hat p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\partial^\mu$$

מעבר מ-3-וקטור + זמן ל-4-וקטור הוא לפי:

$$A_\mu = \left(A_0, -\mathbf{A}\right)$$

$$A^\mu = \left(A^0,\ \mathbf{A}\right)$$

ומקבלים נורמה של:

$$A^2 = A_0^2 - \mathbf{A}^2$$

טרנס' לורנץ

משנה קואורדינטות לפי:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\mu x^\mu$$

הטרנס' חייבת לקיים:

$$g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu = g_{\mu\nu}$$

זאת משום שהיא משמרת אינטרוולים:

$$x^2 = x'^2$$

$$g_{\alpha\beta}x'^\alpha x'^\beta = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$$

כללי הטרנספורמציה לגדלים שונים:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$$

$$T'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu T^{\mu\nu}$$

$$T'_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\nu{}_\beta T_{\mu\nu}$$

$$T'^{\beta}_{\alpha} = \Lambda^\mu{}_\alpha\Lambda^\beta{}_\nu T^\nu_\mu$$

ועבור שדה סקלרי:

$$U'\left\{x'^\mu\right\} = U\left\{x^\mu\right\}\Big|_{x^\mu = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_\nu x'^\nu}$$

הפתרונות של משוואת דיראק $\left(\not{A}=\gamma^\mu A_\mu,\quad \hbar=c=1\right)$

הפתרונות עבור חלקיק במנוחה ($\mathbf{p}=0,\ E_0=m$):

$$\psi_+^{(s)}=u(s)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0t},\quad \psi_-^{(s)}=v(s)e^{\frac{i}{\hbar}E_0t},\qquad s=1,2$$

$$u(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad u(2)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v(1)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad v(2)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

נשים לב כי שני הפתרונות $\psi_+^{(s)}$ הם בעלי אנרגיה חיובית, $E=E_0$, בעוד שהפתרונות $\psi_-^{(s)}$ הם בעלי אנרגיה שלילית, $E=-E_0$.

הפתרונות עבור חלקיק בתנועה הם:

$$\psi_+^{(s)}(\mathbf{r},t)=u(\mathbf{p},s)e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot x},\quad \psi_-^{(s)}(\mathbf{r},t)=v(\mathbf{p},s)e^{\frac{i}{\hbar}p\cdot x}$$

כאשר: $p\cdot x=p_\mu x^\mu=E_pt-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r},\quad E_p=\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}>0$

הפתרונות $\psi_+^{(s)}(\mathbf{r},t)$ הם בעלי אנרגיה חיובית $E=E_p$, ו-$\psi_-^{(s)}(\mathbf{r},t)$ הם עם אנרגיה שלילית $E=-E_p$. הספינורים $u(\mathbf{p},s),v(\mathbf{p},s)$ קשורים לספינורים של החלקיק במנוחה $u(s),v(s)$ לפי המשוואות:

$$u(\mathbf{p},s)=A_\mathbf{p}\left(\not{p}+mc\right)u(s),\quad v(\mathbf{p},s)=A_\mathbf{p}\left(-\not{p}+mc\right)v(s)$$

הפתרונות שמקבלים הם: $\left(p_\pm=p_x\pm ip_y,\quad p_-p_+=p_x^2+p_y^2\right)$

$$u(\mathbf{p},1)=A_\mathbf{p}\begin{pmatrix}1\\0\\p_z/(p_0+m)\\p_+/(p_0+m)\end{pmatrix},\quad u(\mathbf{p},2)=A_\mathbf{p}\begin{pmatrix}0\\1\\p_-/(p_0+m)\\-p_z/(p_0+m)\end{pmatrix}$$

$$v(\mathbf{p},1)=A_\mathbf{p}\begin{pmatrix}p_z/(p_0+m)\\p_+/(p_0+m)\\1\\0\end{pmatrix},\quad v(\mathbf{p},2)=A_\mathbf{p}\begin{pmatrix}p_-/(p_0+m)\\-p_z/(p_0+m)\\0\\1\end{pmatrix}$$

$A_\mathbf{p}$ הוא גורם נירמול שנקבע כך שנקבל חלקיק אחד בלבד בתוך נפח הנירמול V:

$$\bar{u}(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s)=1\quad\rightarrow\quad A_p=\sqrt{\frac{p_0+m}{2m}}$$

להחזרת c: יש להכפיל כל רכיב של p_μ ב-c, ואת המסה m ב-c^2.

הפתרונות מקיימים את יחסי האורתוגונליות הבאים:

$$u^\dagger(\mathbf{p},s')u(\mathbf{p},s)=\frac{E}{mc^2}\delta_{s,s'}\qquad \bar{u}(\mathbf{p},s')u(\mathbf{p},s)=\delta_{s,s'}$$

$$v^\dagger(\mathbf{p},s')v(\mathbf{p},s)=\frac{E}{mc^2}\delta_{s,s'}\qquad \bar{v}(\mathbf{p},s')v(\mathbf{p},s)=-\delta_{s,s'}$$

עם זאת $v^\dagger(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s)\neq0$, משום ש-$u(\mathbf{p},s)$ ו-$v(\mathbf{p},s)$ הם פתרונות בעלי תנע שונה, $\mathbf{p}$ ו-$(-\mathbf{p})$. מאותה סיבה מתקיים גם למשל:

$$v^\dagger(-\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s')=0$$

בורגיות - Helicity

אופרטור הבורגיות:
(היטל הספין על כיוון התנועה)

$$\lambda=\frac{1}{|\mathbf{p}|}\boldsymbol{\Sigma}\cdot\mathbf{p}=\frac{1}{|\mathbf{p}|}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\end{pmatrix}$$

בעזרת המצבים האלו ניתן לקחת פתרונות של משוואת דיראק ולבנות אלקט'\פוזיט' בעלי בורגיות מוגדרת, בהתאם לכיוון התנועה הנדרש של החלקיק.

$$\overbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\p_z+\mathbf{p}^2\\p_+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_z+\mathbf{p}^2\\p_+\\0\\0\end{pmatrix}}^{\text{ע״ע }+1},\overbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\p_z-\mathbf{p}^2\\p_+\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p_z-\mathbf{p}^2\\p_+\\0\\0\end{pmatrix}}^{\text{ע״ע }-1}$$

(הפתרונות של משוואת דיראק שרשומות לעיל הן בעלות בורגיות מוגדרת עבור תנועה בכיוון z בלבד.)

הבורגיות נשמרת בגבול האולטרה-יחסותי, גם בנוכחות אינטראקציה עם שדה אלקטרומגנטי. לעומת זאת, הספין נשמר בגבול הלא-יחסותי.

אופרטורי היטל ויחסי שלמות $(\hbar=c=1)$

$$\Lambda_{a,b}^{\pm}(\mathbf{p})=\frac{\pm\not{p}_{a,b}+mI_{a,b}}{2m}$$

כאשר a,b הם אינדקסים המייצגים את המרחב הספינורי. האופרטור $\Lambda^+(\mathbf{p})$ מחזיר רק את החלק מהספינור שמורכב מ-$u(\mathbf{p},s)$, בעוד ש-$\Lambda^-(\mathbf{p})$ מחזיר את החלק המורכב מ-$v(\mathbf{p},s)$, כלומר:

$$\Lambda^+(\mathbf{p})u(\mathbf{p},s)=u(\mathbf{p},s),\quad \Lambda^+(\mathbf{p})v(\mathbf{p},s)=0$$

$$\Lambda^-(\mathbf{p})v(\mathbf{p},s)=v(\mathbf{p},s),\quad \Lambda^-(\mathbf{p})u(\mathbf{p},s)=0$$

מתקיים גם $\bar{u}(\mathbf{p},s)\Lambda^+(\mathbf{p})=\bar{u}(\mathbf{p},s)$ וכו'. אלה אופרטורי הטלה א"ג:

$$\left(\Lambda^\pm(\mathbf{p})\right)^2=\Lambda^\pm(\mathbf{p}),\qquad \Lambda^+(\mathbf{p})\Lambda^-(\mathbf{p})=0$$

כמו כן מקיימים הספינורים את יחסי שלמות הבאים:

$$\sum_s u(\mathbf{p},s)\bar{u}(\mathbf{p},s)=\frac{\not{p}+m}{2m}=\Lambda^+(\mathbf{p})$$

$$\sum_s v(\mathbf{p},s)\bar{v}(\mathbf{p},s)=\frac{\not{p}-m}{2m}=-\Lambda^-(\mathbf{p})$$

ובנוסף: $$\sum_s\left[u(\mathbf{p},s)\bar{u}(\mathbf{p},s)-v(\mathbf{p},s)\bar{v}(\mathbf{p},s)\right]=1$$

טרנספורמציות לורנץ של ספינורים

משוואת דיראק אינווריאנטית לטרנספורמציות לורנץ, לכן עבור ספינור ψ שמקיים אותה במערכת אחת:

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-mc\right)\psi(x)=0$$

קיים ספינור מקביל ψ' שמקיים את אותה המשוואה במערכת אחרת:

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu}-mc\right)\psi'(x')=0$$

הקשר בין x ו-x' הוא $x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, ואנו רוצים למצוא את ψ' מתוך ψ, כלומר עלינו לחפש $S(\Lambda)$ שתקיים: $\psi'(x')=S(\Lambda)\psi(x)$

$S(\Lambda)$ מקיימת: $\gamma^\nu\Lambda^\alpha{}_\nu=S^{-1}\gamma^\alpha S$

נתבונן כעת בטרנספורמצית לורנץ אינפיניטסימלית: $\Lambda^\nu{}_\mu=\delta^\nu{}_\mu+\omega^\nu{}_\mu$

$\omega^\nu{}_\mu$ הוא השינוי של $\Lambda^\nu{}_\mu$ ממטריצת היחידה. מתוך הצבה לתוך התנאי שכל טרנספורמצית לורנץ צריכה לקיים ($g_{\mu\nu}=g_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu$) מקבלים ש-$\omega^\nu{}_\mu$ צריכה להיות אנטי-סימטרית, כלומר $\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$. מניחים:

$$S=1-\frac{i}{4}\hat{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu},\quad S^{-1}=1+\frac{i}{4}\hat{\sigma}_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}$$

ומקבלים אחרי הרבה אלגברה: $\hat{\sigma}_{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\nu\right]$

על מנת לקבל טרנספורמציה שעובר ספינור תחת טרנספורמצית לורנץ סופית, מעלים את S לחזקת N, ומחליפים $\omega\to\omega/N$. הצורה המפורשת של $\omega^{\mu\nu}$ נקבעת מתוך סוג הטרנספורמציה שביצענו:

$$\omega^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0&\beta_x&\beta_y&\beta_z\\-\beta_x&0&\theta_z&-\theta_y\\-\beta_y&-\theta_z&0&\theta_x\\-\beta_z&\theta_y&-\theta_x&0\end{pmatrix}$$

β_i מתאים לבוסט בכיוון i, ו-θ_i היא זווית הסיבוב הרצויה סביב ציר i.

דוגמאות לטרנספורמציות לורנץ

בוסט בכיוון x:

$$\begin{pmatrix}\gamma&-\beta\gamma&0&0\\-\beta\gamma&\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\beta=v/c$$

$$\gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}$$

צורה נוספת לבוסט:

$$\begin{pmatrix}\cosh\psi&-\sinh\psi&0&0\\-\sinh\psi&\cosh\psi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\cosh\psi=\gamma$$

$$\sinh\psi=\beta\gamma$$

סיבוב סביב ציר z:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(כל אלו הן $\Lambda^\mu{}_\nu$)

פורמליזם לגרנז'י לשדות

במכניקה קלאסית, הגדרנו את הלגרנז'יאן עבור חלקיקים כפונקציה של $(q_1,\dots,q_N;\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_N;t)$, כאשר $\{q_i\}_{i=1}^{N}$ היו דרגות החופש של כל החלקיקים. כאשר רושמים את הלגרנז'יאן של שדה קלאסי יש להבין כי דרגות החופש החדשות של הבעיה הן למעשה ערכי השדה בכל נקודה ונקודה במרחב, כאשר הקואורדינטה של כל נקודה מתפקדת כ"אינדקס" של אותה דרגת חופש. כלומר:

$$q_i \to \phi(\mathbf{r}), \quad \sum_i \to \int d^3\mathbf{r}$$

לכן ניתן לרשום את הלגרנז'יאן בתור:

$$L = \int d^3\mathbf{r}\ \mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right)$$

כאשר $\mathcal{L}$ הוא צפיפות הלגרנז'יאן. הפעולה היא:

$$S = \int dt\, L = \int d^4x\, \mathcal{L}$$

ומשוואות התנועה הנגזרות מתוך $\delta S = 0$ הן:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

התנע הקנוני $\pi(\mathbf{r},t)$ הצמוד ל- $\phi(\mathbf{r},t)$ נתון על ידי:

$$\pi(\mathbf{r}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{r})}$$

ההמילטוניאן הוא:

$$H = \int d^3\mathbf{r}\ \mathcal{H} = \int d^3\mathbf{r}\ \left[\pi(\mathbf{r})\dot{\phi}(\mathbf{r}) - \mathcal{L}\right]$$

קוונטיזציה של שדה דיראק

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{\mathbf{p},s} \sqrt{\frac{m}{VE_\mathbf{p}}}\left(\hat{b}(\mathbf{p},s)u(\mathbf{p},s)e^{-ipx} + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p},s)v(\mathbf{p},s)e^{ipx}\right)$$

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_{\mathbf{p},s} \sqrt{\frac{m}{VE_\mathbf{p}}}\left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{p},s)u^\dagger(\mathbf{p},s)e^{ipx} + \hat{d}(\mathbf{p},s)v^\dagger(\mathbf{p},s)e^{-ipx}\right)$$

השדה הישר $\hat{\psi}(x)$ יוצר פוזיטרונים ומשמיד אלקטרונים, והשדה הצמוד $\hat{\psi}^\dagger(x)$ עושה את הפעולה ההפוכה. האנרגיה היא $E_\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, ואופרטורי ההשמדה והיצירה מקיימים את יחס האנטי-חילוף:

$$\left\{\hat{b}(\mathbf{p},s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}',s')\right\} = \left\{\hat{d}(\mathbf{p},s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}',s')\right\} = \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}\delta_{s,s'}$$

וכנ"ל גם $\hat{d}$ ו- $\hat{d}^\dagger$. כל שאר הזוגות של האופרטורים הללו הם אנטי-חילופיים:

$$\left\{\hat{b}(\mathbf{p},s), \hat{b}(\mathbf{p}',s')\right\} = \left\{\hat{b}(\mathbf{p},s), \hat{d}(\mathbf{p}',s')\right\} = \left\{\hat{b}(\mathbf{p},s), \hat{d}^\dagger(\mathbf{p}',s')\right\} = \ldots = 0$$

את עיקרון האיסור של פאולי – לא ניתן לעורר שני חלקיקים (אלקטרונים או פוזיטרונים) בדיוק לאותו מצב $(\mathbf{p},s)$, שכן:

$$\left\{\hat{b}^\dagger(\mathbf{p},s), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p},s)\right\} = 0 \quad \to \quad \hat{b}^{\dagger 2}(\mathbf{p},s) = 0$$

עיקרון האנטי-סימטריות – המצב הקוונטי של שני אלקטרונים או פוזיטרונים צריך להחליף סימן תחת החלפה שלהם.

$$\left\{\hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger\right\} = 0 \quad \to \quad \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger = -\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1^\dagger$$

ההמילטוניאן שקיבלנו היה:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p},s} E_\mathbf{p}\left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{p},s)\hat{b}(\mathbf{p},s) - \hat{d}(\mathbf{p},s)\hat{d}^\dagger(\mathbf{p},s)\right)$$

ולאחר סידור נורמלי:

$$:\hat{H}: = \sum_{\mathbf{p},s} E_\mathbf{p}\left(\hat{b}^\dagger(\mathbf{p},s)\hat{b}(\mathbf{p},s) + \hat{d}^\dagger(\mathbf{p},s)\hat{d}(\mathbf{p},s)\right)$$

(חייבים לבחור יחסי אנטי-חילוף, ולא יחסי חילוף, כדי לקבל $:\hat{H}:$ עם ערכים חיוביים)

אופרטור המטען הוא:

$$\hat{Q} = e\int d^3\mathbf{r}\ :\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x): = e\sum_{\mathbf{p},s}\left[\hat{N}_\mathrm{e}(\mathbf{p},s) - N_\mathrm{p}(\mathbf{p},s)\right]$$

עם אופרטורי הספירה:

$$\hat{N}_\mathrm{e}(\mathbf{p},s) = \hat{b}^\dagger(\mathbf{p},s)\hat{b}(\mathbf{p},s), \quad \hat{N}_\mathrm{p}(\mathbf{p},s) = \hat{d}^\dagger(\mathbf{p},s)\hat{d}(\mathbf{p},s)$$

סימטרית צימוד מטען

$(\hbar = c = 1)$

משוואת דיראק עבור חלקיק עם מטען e בשדה חיצוני המתואר על ידי פוטנציאל A_μ:

$$\left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \qquad \left(i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + e\gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi_c(x) = 0$$

עבור ψ המקיימת משוואה זו, נוכל להגדיר פונקצית גל $\psi_c = i\gamma^2\psi^*$, והיא תקיים גם את משוואת דיראק, אך עבור חלקיק עם מטען $-e$, באותו שדה A_μ.

משפטי Trace

$$\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] = 4g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right] = 4\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right)$$

למספר אי-זוגי של מטריצות דיראק: $\mathrm{Tr}\left[\gamma^\alpha\gamma^\beta\cdots\gamma^\rho\right] = 0$ | $\mathrm{Tr}\,I = 4$

למספר זוגי של ארבע-וקטורים:

$$\mathrm{Tr}\left[\not{A}_1\cdots\not{A}_{2n}\right] = \left(A_1\cdot A_2\right)\mathrm{Tr}\left[\not{A}_3\not{A}_4\cdots\not{A}_{2n}\right] - \left(A_1\cdot A_3\right)\mathrm{Tr}\left[\not{A}_2\not{A}_4\cdots\not{A}_{2n}\right] + \ldots + \left(A_1\cdot A_{2n}\right)\mathrm{Tr}\left[\not{A}_2\not{A}_3\cdots\not{A}_{2n-1}\right]$$

דוגמה לחישוב ישיר:

$$\mathrm{Tr}\left[\not{p}\,\not{q}\right] = p_\mu q_\nu\,\mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu\gamma^\nu\right] = p_\mu q_\nu\cdot 4g^{\mu\nu} = 4\left(p\cdot q\right)$$

קוונטיזציה של שדה קליין-גורדון

בהתאם למשוואת קליין-גורדון עבור $\phi(x)$, הפיתרון הוא:

$$\phi(x) = \sum_\mathbf{p}\left(A_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x} + B_\mathbf{p}^* e^{ip\cdot x}\right)$$

כאשר $p\cdot x = Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}$, והאנרגיה היא:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$$

המעבר לאופרטורי יצירה והשמדה נעשה על ידי:

$$A_\mathbf{p} \to \hat{a}_\mathbf{p}\sqrt{\frac{1}{2V\omega_\mathbf{p}}}, \quad B_\mathbf{p}^* \to \hat{b}_\mathbf{p}^\dagger\sqrt{\frac{1}{2V\omega_\mathbf{p}}}$$

כאשר ה"תדירות" היא בהתאם לאנרגיה:

$$\omega_\mathbf{p} = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}\,/\,\hbar$$

ההמילטוניאן שמתקבל, לאחר סידור נורמלי, הוא:

$$:\hat{H}: = \sum_\mathbf{p}\hbar\omega_\mathbf{p}\left(\hat{a}_\mathbf{p}^\dagger\hat{a}_\mathbf{p} + \hat{b}_\mathbf{p}^\dagger\hat{b}_\mathbf{p}\right)$$

והשדה:

$$\hat{\phi}(x) = \sum_\mathbf{p}\sqrt{\frac{1}{2V\omega_\mathbf{p}}}\left(\hat{a}_\mathbf{p}e^{-ipx} + \hat{b}_\mathbf{p}^\dagger e^{ipx}\right)$$

אופרטור "צפיפות המטען":

$$\hat{\rho} = \frac{\hbar}{im}:\left(\hat{\phi}\frac{\partial\hat{\phi}^\dagger}{\partial t} - \hat{\phi}^\dagger\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t}\right):$$

זהו בדיוק רכיב האפס של צפיפות זרם ההסתברות שקיבלנו למשוואת קליין-גורדון, אלא שכאן אנו מפרשים אותו כצפיפות מטען ולכן מותרים ערכים שליליים! נחשב את האינטגרל על כל המרחב לקבלת אופרטור המטען:

$$\hat{Q} = \int_\text{space}\hat{\rho}(\mathbf{r},t)\,d^3\mathbf{r}$$

$$= \sum_\mathbf{p}\left(\hat{a}_\mathbf{p}^\dagger\hat{a}_\mathbf{p} - \hat{b}_\mathbf{p}^\dagger\hat{b}_\mathbf{p}\right) = \sum_\mathbf{p}\left(N_\mathbf{p}^{(a)} - N_\mathbf{p}^{(b)}\right)$$

כאשר $N^{(a)}$ סופר את הפיונים ו- $N^{(b)}$ סופר את האנטי-פיונים, כלומר $\hat{Q}$ נותן את ההפרש בין מספר החלקיקים למספר האנטי-חלקיקים. זהו גודל נשמר (בזמן).

משפט Noether

מבטא את הקשר שבין סימטריה לחוקי שימור. כאשר: "סימטריה" היא אינווריאנטיות של הפעולה S לסט של טרנספורמציות (למשל – לורנץ); ו"חוקי שימור" הם ביטוי לגודל מסויים שנשמר בזמן. חוקים אלו ניתנים לרישום בתור משוואת רציפות:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

כך שמתקיים:

$$\int j^0 d^3x = \mathrm{const}$$

על מנת לקבל את חוק השימור המתאים לסימטריה נתונה, מפעילים טרנספורמציה אינפיניטסימלית על השדה ϕ:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha\Delta\phi(x)$$

כאשר $\Delta\phi(x)$ היא טרנספורמציה המתאימה לסימטריה שאותה אנו "בודקים" ו- α הוא פרמטר קטן. אם זו אכן סימטריה, צריך להתקיים שהפעולה לא משתנה כתוצאה מהטרנספורמציה, כלומר ש- $\mathcal{L}$ ישתנה לכל היותר עד כדי $\partial_\mu K^\mu$ (איבר כזה נופל באינטגרציה שמגדירה את S):

$$\mathcal{L}(x) \to \mathcal{L}(x) + \alpha\partial_\mu K^\mu(x)$$

השינוי בלגרנז'יאן $\alpha\Delta\mathcal{L}$, כתוצאה מהשינוי בשדה, $\alpha\Delta\phi$ הוא:

$$\alpha\Delta\mathcal{L} = \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\Delta\phi\right)$$

אם נצליח למצוא ארבע וקטור K^μ שיקיים:

$$\alpha\Delta\mathcal{L} = \alpha\partial_\mu K^\mu = \alpha\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi\right)}\Delta\phi\right)$$

אז הרי שנקבל, לאחר העברת אגפים, את משוואת הרציפות. בהכללה למספר כללי של שדות:

$$j^\mu = \sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\Delta\phi_i - K^\mu$$

זהו זרם Noether, והגודל שנשמר הוא j^0.

תמונת האינטראקציה ואופרטור הפיזור $(\hbar=c=1)$

המילטוניאן המערכת הוא $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{V}(t)$.
משוואת שרדינגר בתמונת שרדינגר היא:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_S(t)\right\rangle=\left(H_0+V_S(t)\right)\left|\psi_S(t)\right\rangle$$

המעבר לתמונת האינטראקציה של מצבים ואופרטורים הוא:

$$\left|\psi_I(t)\right\rangle=e^{iH_0t}\left|\psi_S(t)\right\rangle,\quad \hat{O}_I(t)=e^{iH_0t}\hat{O}_S(t)e^{-iH_0t}$$

בהצגה זו, משוואת המצב היא:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_I\right\rangle=V_I(t)\left|\psi_I\right\rangle$$

רושמים את פונקצית המצב בכל רגע t באופן הבא:

$$\left|\psi_I(t)\right\rangle=U(t,t_0)\left|\psi_I(t_0)\right\rangle$$

כאשר $U(t,t_0)$ נקרא אופרטור האבולוציה מזמן t_0 ל- t. הצבה למשוואת שרדינגר נותנת:

$$i\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t}=V_I(t)U(t,t_0)$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית עבור האופרטור $U(t,t_0)$, בצירוף תנאי ההתחלה $U(t_0,t_0)=1$. את משוואה זו רושמים מחדש בתור משוואה אינטגרלית ואת הפיתרון מקבלים באיטרציות:

$$U(t,t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{t_0}^{t}dt_1\cdots\int_{t_0}^{t}dt_nT\left[V_I(t_1)\cdots V_I(t_n)\right]$$

כאשר T נקרא האופרטור הכרונולוגי – הוא מסדר את האופרטורים $V_I(t)$ לפי הזמן. למשל, עבור שני זמנים:

$$T\left[V_I(t')V_I(t'')\right]=\begin{cases}V_I(t')V_I(t'') & t'>t''\\ V_I(t'')V_I(t') & t'<t''\end{cases}$$

אופרטור הפיזור S: $S\equiv U(+\infty,-\infty)$

הוא מגדיר לנו את אמפליטודת המעבר ממצב התחלתי $|i\rangle$ למצב סופי $|f\rangle$: $S_{fi}\equiv\langle f|S|i\rangle$

S עד לסדר שני הוא:

$$S=1-i\int_{-\infty}^{\infty}dt_1V_I(t_1)+\frac{1}{2}(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1dt_2T\left[V_I(t_1)V_I(t_2)\right]$$

וזהו למעשה בדיוק טור בורן.

משפט Wick, אופרטור הסידור הנורמלי והכרונולוגי

הסידור הנורמלי (N) והסידור הכרונולוגי (T) פועלים כך:

$$N[\ldots]=\left(\text{אופרטורי יצירה ... אופרטורי השמדה}\right)\cdot(-1)^p$$

$$T[\ldots]=\left(\text{זמנים מאוחרים ... זמנים מוקדמים}\right)\cdot(-1)^p$$

כאשר עבור פרמיונים, p הוא מספר ההחלפות בין האופרטורים $b,b^\dagger,d,d^\dagger$ שהיה עלינו לבצע על מנת לקבל את הסידור הנדרש. עבור בוזונים, הפקטור $(-1)^p$ לא מופיע. גורם זה מגיע מתוך יחסי האנטי-חילוף של אופרטורי היצירה וההשמדה הפרמיוניים.

לעתים מסמנים גם: $N[\ldots]=:(\ldots):$

מתקיים תמיד: $\langle 0|N[\ldots]|0\rangle=0$

כיווץ: $\langle 0|T\left[b_i(\ldots)b_j^\dagger\right]|0\rangle\equiv(-1)^p\langle 0|T\left[b_ib_j^\dagger\right]T[\ldots]|0\rangle$

כאשר $(\ldots)$ הוא בלוק כלשהו המכיל p אופרטורים. כיווצים נעשים בין אופרטורי יצירה והשמדה בלבד. כיווץ בין שני אופרטורי השמדה או שני אופרטורי יצירה נותן אפס:

$$b_i(\ldots)b_j=b_i^\dagger(\ldots)b_j^\dagger=0$$

משפט Wick:

$$T[\ldots]=N\left[\left(\text{מכפלה ללא צמצומים}\right)+\sum\left(\text{מכפלה עם צמצום אחד}\right)+\sum\left(\text{מכפלה עם שני צמצומים}\right)+\ldots+\sum\left(\text{מצומצם לחלוטין}\right)\right]$$

כאשר בכל פעם הסכימה היא על כל המכפלות האפשריות עם המספר הנדרש של הכיווצים. מקרה פרטי ונפוץ במיוחד של המשפט הוא עבור מכפלה של מספר זוגי של אופרטורים:

$$\left\langle T\left[\text{מכפלה של } 2n \text{ אופרטורים}\right]\right\rangle=\sum\left(\text{מכפלות מצומצמות לגמרי עם } n \text{ צמצומים בכל אחת}\right)$$

והסכום הוא על כל הצמצומים האפשריים שעונים על הדרישה.

הפרעה כתוצאה משדה אלקטרומגנטי נתון

כאשר דנים בבעיות עם פוטנציאל א"מ נתון מראש (כלומר – השדה קבוע, הוא לא אופרטור, אין לו דרגות חופש), האינטראקציה בין מטענים ושדה אלקטרומגנטי היא:

$$V_I=\int d^3\mathbf{r}\, j^\mu(\mathbf{r},t)A_\mu(\mathbf{r},t)$$

ועבור אלקט'/פוזיט':

$$\hat{j}_I^\mu(x)=e\hat{\bar{\psi}}(x)\gamma^\mu\hat{\psi}(x)$$

דיאגרמות פיינמן במרחב התנע

אלקטרון נכנס:

$\mathbf{p}_i\uparrow\ \sqrt{\frac{m}{VE_i}}u(\mathbf{p}_i,s_i)$

אלקטרון יוצא:

$\mathbf{p}_f\uparrow\ \sqrt{\frac{m}{VE_f}}\bar{u}(\mathbf{p}_f,s_f)$

פוזיטרון נכנס:

$\mathbf{p}_i\uparrow\ \sqrt{\frac{m}{VE_i}}\bar{v}(\mathbf{p}_i,s_i)$

פוזיטרון יוצא:

$\mathbf{p}_f\uparrow\ \sqrt{\frac{m}{VE_f}}v(\mathbf{p}_f,s_f)$

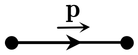
פוטון נכנס:

$\mathbf{k}_i\uparrow\ \sqrt{\frac{2\pi}{V\omega_i}}(e_i)_\mu$

פוטון יוצא:

$\mathbf{k}_f\uparrow\ \sqrt{\frac{2\pi}{V\omega_f}}(e_f^*)_\mu$

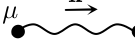
פרופגטור פרמיוני:



$\xrightarrow{\mathbf{p}}$

$$iK=\frac{i}{\not{p}-m+i\eta}=i\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2+i\eta}$$

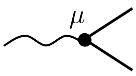
פרופגטור פוטוני:



$\mu\ \xrightarrow{\mathbf{k}}\ \nu$

$$iD_{\mu\nu}=\frac{-4\pi ig_{\mu\nu}}{k^2+i\eta}$$

קודקוד אינטראקציה:



μ

$$-ie\gamma^\mu$$

חוקי דיאגרמות פיינמן (במרחב התנע):

- קוראים הדיאגרמה נגד כיוון החצים המצויירים על הקווים הפרמיוניים. (**לא** לפי חיצי התנע!)
- כל מסלול פרמיוני, שמתחיל ומסתיים בקו חיצוני, תורם לאמפליטודה ביטוי שהוא סקלר במרחב הספינורי. (גם הפרופ' הפוטוניים כאלה)
- עוברים בדיאגרמה על כל המסלולים הפרמיונים האפשריים וכופלים את הביטוי שמקבלים מכל אחד. בסוף כופלים גם בפרופגטורים הפוטוניים. אלה סקלרים – הסדר שבו כופלים לא משנה.
- בכל קודקוד חייבים להיפגש 3 קווים – שני פרמיונים (חץ יוצא וחץ נכנס) ובוזון (פוטון), שכן כל קודקוד מגיע מכיווץ של $\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$.
- קיום שימור תנע, אנרגיה ומטען בכל קודקוד.
- יש לכפול את הביטוי כולו בשימור תנע-אנרגיה: $$(2\pi)^4\delta^{(4)}\left[\sum(p_{\text{in}}+k_{\text{in}})-\sum(p_{\text{out}}+k_{\text{out}})\right]$$
- כל דיאגרמה מסדר n מתקבלת $n!$ פעמים, כמספר האפשרויות לבחור את האינדקסים של הקודקודים $(\mu,\nu,\sigma,\ldots)$.
- להוסיף -1 לכל לולאה פרמיונית בדיאגרמה.
- להוסיף -1 לכל מסלול פרמיוני שמתחיל ומסתיים בפוזיטרון. (פוזיטרון שיוצא ונכנס)
- הבדל של -1 בין כל שתי דיאגרמות שנבדלות זו מזו בהחלפת שני קווים פרמיוניים זהים.

חישוב חתך פעולה

בכל תרגיל יש להחליט עבור איזה חלקיק אנו מחשבים חתך פעולה. למשל בפיזור קומפטון, אפשר לחשב את חתך הפעולה של הפוטון או את זה של האלקטרון. תמיד יש לבצע אינטגרל על התנע של החלקיקים שלא איכפת לנו לאן הם מתפזרים, ועל החלקיק שכן מעניין אותנו עושים אינטגרל רק על **גודל** התנע שלו. אם אנו רוצים רק את חתך הפעולה הכולל, אז עושים גם אינטגרל על הזווית המרחבית של התנע. בהינתן אמפליטודת הפיזור, S_{fi}, קצב המעברים dW לתוך אלמנט $d^3\mathbf{p}_f$ הוא:

$$dW=\frac{\left|S_{fi}\right|^2}{T}\frac{V}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{p}_f$$

כאשר הזמן T ייבלע לתוך פונקצית הדלתא בריבוע:

$$\left[(2\pi)^4\delta^{(4)}(p)\right]^2=(2\pi)^4\delta^{(4)}(p)\cdot VT$$

קצב המעברים לזווית הוא:

$$\frac{dW}{d\Omega}=\int d\left|\mathbf{p}_f\right|\frac{\left|S_{fi}\right|^2}{T}\frac{V\left|\mathbf{p}_f\right|^2}{(2\pi)^3}$$

המעבר מהקצב dW לחתך הפעולה $d\sigma$ נעשה על ידי חלוקה בשטף $j_{\text{in}}=v/V$, כאשר v היא מהירות החלקיקים הפוגעים. בסה"כ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{V}{v}\int d\left|\mathbf{p}_f\right|\frac{\left|S_{fi}\right|^2}{T}\frac{V\left|\mathbf{p}_f\right|^2}{(2\pi)^3}$$

לזכור: $v/c=|\mathbf{p}|c/E$.
לעתים נוח לבצע אינטגרציה על האנרגיה דווקא, כך:

$$E_fdE_f=\left|\mathbf{p}_f\right|d\left|\mathbf{p}_f\right|$$

יש לוודא שחתך הפעולה לא תלוי בנפח הנירמול V! כמו כן יש לזכור לבצע אינטגרציה על כל וקטורי התנע שלא מעניינים אותנו.

כיווצים

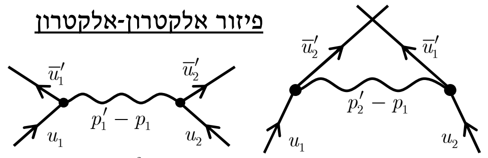
$$S_{fi}\propto\langle f|T\left[\hat{\bar{\psi}}(x_1)\gamma^\mu A_\mu(x_1)\hat{\psi}(x_1)\cdots\hat{\bar{\psi}}(x_n)\gamma^\rho A_\rho(x_n)\hat{\psi}(x_n)\right]|i\rangle$$

את האופרטורים ב-$|i\rangle$ וב-$|f\rangle$ מכניסים לתוך $T[\ldots]$ בשני הצדדים, משום שהמצב ההתחלתי מגיע עם זמן $-\infty$ והמצב הסופי עם זמן $+\infty$. ניתן לכווץ בנפרד את החלק הפוטוני של הביטוי ($a,a^\dagger$ עם A_μ) ואת החלק האלקטרוני שלו ($\bar{\psi},\psi$ עם $(b,b^\dagger,d,d^\dagger)$). אפשר לכווץ רק $b^\dagger\psi,b\bar{\psi},d^\dagger\bar{\psi},d\psi$, השאר יתנו אפס. כיווץ של A_μ,A_ν ייתן פרופגטור פוטוני $iD_{\mu\nu}$, כיווץ של $\psi,\bar{\psi}$ ייתן פרופגטור פרמיוני iK.
חשוב לשים לב שלא ניתן לכווץ $\psi,\bar{\psi}$ שיש ביניהם מטריצת γ! אם צריך, מחליפים לצורך כך את סדר השלשות בתוך T. לאחר הכיווץ, יש לשמור על הסדר של $\bar{\psi},\psi$ ביחס למטריצות γ. אם מציירים את קשתות הכיווצים רק מתחת או מעל לשורה, ניתן לקבל את סימן המינוס (מספר ההחלפות) מתוך מספר חיתוכים בין הקשתות.

דוגמאות לתהליכי פיזור

$(\hbar = c = 1)$

פיזור אלקטרון-אלקטרון

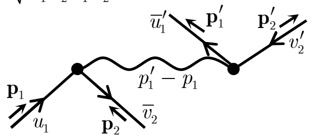


$$-e^2\frac{m^2}{V^2\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}}(2\pi)^4\,\delta\left(p_1'+p_2'-p_1-p_2\right)\times$$

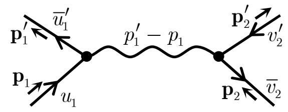
$$\left(\bar u_1'\gamma^\mu u_1\right)\frac{-4\pi i g_{\mu\nu}}{\left(p_1'-p_1\right)^2}\left(\bar u_2'\gamma^\nu u_2\right) -\left(\bar u_2'\gamma^\mu u_1\right)\frac{-4\pi i g_{\mu\nu}}{\left(p_2'-p_1\right)^2}\left(\bar u_1'\gamma^\nu u_2\right)$$

פיזור פוזיטרון-אלקטרון

$$\frac{-e^2m^2(2\pi)^4}{V^2\sqrt{E_1E_2E_1'E_2'}}\,\delta\left(p_1'+p_2'-p_1-p_2\right)\times$$

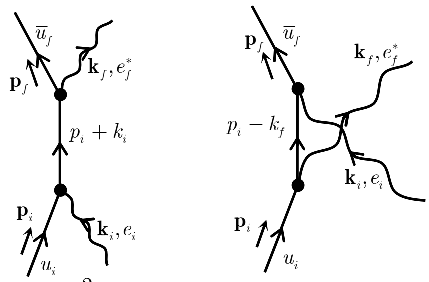


$$+\left(\bar u_1'\gamma^\mu v_2'\right)\frac{-4\pi i g_{\mu\nu}}{\left(p_1+p_2\right)^2}\left(\bar v_2\gamma^\nu u_1\right)$$



$$-\left(\bar u_1'\gamma^\mu u_1\right)\frac{-4\pi i g_{\mu\nu}}{\left(p_1'-p_1\right)^2}\left(\bar v_2\gamma^\nu v_2'\right)$$

פיזור קומפטון (אלקטרון-פוטון)



$$-e^2\frac{2\pi m}{V\sqrt{E_fE_i\omega_f\omega_i}}(2\pi)^4\,\delta\left(p_f+k_f-p_i-k_i\right)\times$$

$$\bar u_f\,\not e_f^*\,\frac{i}{\not p_i+\not k_i-m}\,\not e_i\,u_i+\bar u_f\,\not e_i\,\frac{i}{\not p_i-\not k_f-m}\,\not e_f^*\,u_i$$

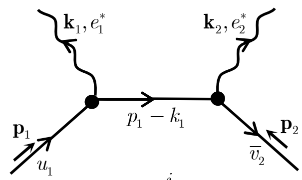
$$\omega_f=\frac{\omega_i}{1+\frac{\omega_i}{m}(1-\cos\theta)},\qquad \frac{d\sigma}{d\Omega}=\left(\frac{\omega_f}{\omega_i}\right)^2\left|\mathcal{M}_{fi}\right|^2$$

$$S_{fi}=\frac{2\pi m}{V^2}\frac{1}{\sqrt{E_iE_f\omega_i\omega_f}}(2\pi)^4\,\delta\left(p_f+k_f-p_i-k_i\right)\mathcal{M}_{fi}$$

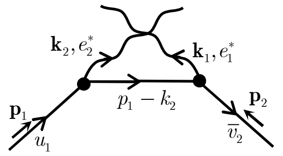
$$\mathcal{M}_{fi}=ie^2\bar u_f\left(\frac{\not e_f^*\,\not e_i\,\not k_i}{2p_i\cdot k_i}+\frac{\not e_i\,\not e_f^*\,\not k_f}{2p_i\cdot k_f}\right)u_i$$

חיסול זוג פוזיטרון-אלקטרון

$$\frac{-e^2}{V^2}\sqrt{\frac{m}{E_1E_2}\frac{(2\pi)^2}{\omega_1\omega_2}}(2\pi)^4\,\delta(\ldots)\times$$



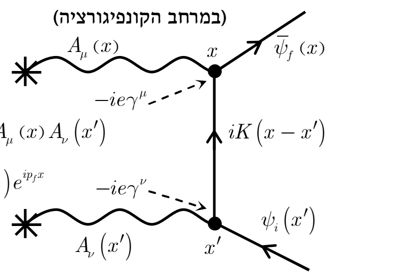
$$+\bar v_2\,\not e_2^*\,\frac{i}{\not p_1-\not k_1-m}\,\not e_1^*\,u_1$$



$$+\bar v_2\,\not e_1^*\,\frac{i}{\not p_1-\not k_2-m}\,\not e_2^*\,u_1$$

פיזור אלקטרון ממקור קלאסי (סדר שני)

(במרחב הקונפיגורציה)



$$S_{fi}^{(2)}=(-ie)^2\iint d^4x\,d^4x'\;\bar\psi_f(x)\,\gamma^\mu iK\left(x-x'\right)\gamma^\nu\psi_i\left(x'\right)A_\mu(x)\,A_\nu\left(x'\right)$$

$$\psi_i(x)\equiv\sqrt{\frac{m}{E_iV}}\;u\left(\mathbf{p}_i,s_i\right)e^{-ip_ix},\quad \bar\psi_f(x)\equiv\sqrt{\frac{m}{E_fV}}\;\bar u\left(\mathbf{p}_f,s_f\right)e^{ip_fx}$$

סיבוב מצבים (בורגיות)

$(\hbar = c = 1)$

הפתרונות שרשמנו עבור משוואת דיראק הם, עבור $\mathbf{p}=p\mathbf{z}$, בעלי בורגיות מוגדרת (חיובית עבור $s=1$ ושלילית עבור $s=2$). על מנת לקבל חלקיק בתנועה בכיוון אחר אך בעל בורגיות מוגדרת באותו כיוון, ניתן לסובב את המצב הרלוונטי $u(\mathbf{p},s)$ בזווית θ סביב ציר מתאים $\mathbf{n}$. למשל, על מנת לקבל בורגיות בכיוון $\mathbf{x}$, נסובב ב-$\pi/2$ סביב ציר $\mathbf{y}$. $R(\theta,\mathbf{n})=\exp\left(-{}^{i}\!/_{2}\,\theta\left(\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{n}\right)\right)$

הערכות של סדרי גודל לחתכי פעולה

בתורת ההפרעות שלנו e הוא הפרמטר הקטן. ביחידות טבעיות ($\hbar=c=1$) גודל זה הוא אכן חסר מימדים, ושווה ל-$\sqrt{1/137}$. (ביחידות סטנדרטיות, הפרמטר הקטן הוא למעשה $\sqrt{\alpha}$.) בפיזור מסדר n יופיע באמפליטודת הפיזור מקדם e^n, ולכן בחתך הפעולה (שמתקבל מתוך אמפליטודת הפיזור בריבוע) יופיע מקדם e^{2n}. אך גודל זה הוא חסר מימדים כאמור, וחתך הפעולה צריך להיות בעל מימדים של שטח. בדרך כלל קיימים בבעיה שני גדלים עם מימד של שטח: m^{-2} ו-E^{-2}. כאשר הבעיה היא בגבול הלא-יחסותי, הגודל הרלוונטי הוא מסת האלקטרון; בגבול האולטרה-יחסותי, האנרגיה של האלקטרון היא הרלוונטית לבעיה. כלומר:

$$\sigma_{\text{non-rel.}}\sim e^{2n}/m^2,\qquad \sigma_{\text{ultra-rel.}}\sim e^{2n}/E^2$$

טרנספורמציות כיול

כל הגדלים המדידים, ובפרט אמפליטודת הפיזור אינווריאנטים תחת כיול: $\psi\to e^{-ie\alpha(x)}\psi$

$$A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\alpha(x),\quad e^\mu\to e^\mu+ia_0k^\mu$$

כאשר הקבוע a_0 קשור בדרך כלשהי להתמרת הפורייה של פונקצית הכיול, $\alpha(x)$.

על פי זהות Ward, אם אמפליטודת הפיזור היא מהצורה $\mathcal{M}_{fi}=Q_\mu e^\mu$ (כאשר e^μ הוא וקטור הקיטוב של פוטון נכנס או יוצא, ו-Q_μ הוא יתר הביטוי של האמפליטודה), הרי שמתקיים: $Q_\mu k^\mu=0$

כאשר k^μ הוא הארבע-תנע שמתאים לפוטון.

נוסחאות פיסיקליות

$(\hbar = c = 1)$

לאלקט' ופוזיט': $m^2=p^2=E^2-\mathbf{p}^2$

לפוטונים: $k^2=0,\quad k\cdot e=0,\quad e^2=-1$

מטריצות בהצגת דיראק: $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}=\begin{pmatrix}p_z & p_-\\ p_+ & -p_z\end{pmatrix}$

$$\not p=\gamma^\mu p_\mu=\begin{pmatrix}E_{\mathbf{p}} & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -E_{\mathbf{p}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{\mathbf{p}} & 0 & -p_z & -p_-\\ 0 & E_{\mathbf{p}} & -p_+ & p_z\\ p_z & p_- & -E_{\mathbf{p}} & 0\\ p_+ & -p_z & 0 & -E_{\mathbf{p}}\end{pmatrix}$$

מתקיים לכל ארבע-תנע של חלקיק עם מסה m:

$$\left(\not p-m\right)\left(\not p+m\right)=\not p\,\not p-m^2=p^2-m^2=0$$

נוסחאות מתמטיות

יחס אורתוגונליות של אוסף הפונקציות $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ בנפח V כאשר מוגדר $k_{x,y,z}=\left(2\pi/L\right)n_{x,y,z}$:

$$\int_V d^3\mathbf{r}\,e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}=V\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}$$

זה נכון רק כאשר $\mathbf{k}$ הוא דיסקרטי. כאשר $V\to\infty$, ה-$\mathbf{k}$ים הופכים לרציפים ואז:

$$\int d^3\mathbf{r}\,e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{r}}=(2\pi)^3\,\delta^{(3)}\left(\mathbf{k}-\mathbf{q}\right)$$

יש לזכור כי פונקצית הדלתא מוגדרת רק תחת סימן סכימה/אינטגרל, לכן זה גם מסתדר עם כל שבגבול $V\to\infty$:

$$\sum_{\mathbf{k}}\to\int\frac{Vd^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$$

לכל שני ארבע-וקטורי A,B: $\not A\,\not B+\not B\,\not A=2A\cdot B$

ובפרט: $\not A\,\not A=A^2$

פונקצית דלתא: $\delta(x)=\delta(-x),\quad \delta(cx)=\frac{1}{|c|}\delta(x)$

הרכבה של דלתא: $\delta\left(g(x)\right)=\sum_i\frac{\delta\left(x-x_i\right)}{\left|g'\left(x_i\right)\right|}$

כאשר $\{x_i\}$ הם השורשים של $g(x)$, ומתקיים $g'\left(x_i\right)\neq0$.

פונקציית דלתא מוגדרת גם כנגזרת של פונקציית המדרגה:

$$\delta(x)=\theta'(x),\qquad \theta(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$$

טיפול בפונקצית דלתא בריבוע: $\left[\delta(x)\right]^2=\lim_{T\to\infty}\frac{T}{2\pi}\delta(x)$