יחידות וגדלים

$1\,\mathrm{eV}$ היא האנרגיה שצובר אלקטרון שהואץ במתח של $1\,\mathrm{V}$. קבוע פלאנק h מקשר בין האנרגיה של פוטון לתדירות שלו: $E_\gamma = h\nu$. מוגדר גם $\hbar = h/2\pi$, ואז מתקיים הקשר $E_\gamma = \hbar\omega$. קבועים ב-MKS: $h = 6.626\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s},\ c = 3\times10^{8}\,\mathrm{m/s},\ q_e = -1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e = 9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg},\ m_p = 1.672\times10^{-27}\,\mathrm{kg},\ m_n = 1.674\times10^{-27}\,\mathrm{kg},\ 1\,\mathrm{eV} = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{Joule}$. צירופי יחידות וגדלים שימושיים: $hc = 12,400\,\mathrm{\mathring{A}\cdot eV},\ \hbar c = 1,973\,\mathrm{\mathring{A}\cdot eV},\ \lambda_c = h/m_e c = 0.0243\,\mathrm{\mathring{A}},\ m_e = 0.511\,\mathrm{MeV/c^2},\ m_p = 938.3\,\mathrm{MeV/c^2},\ m_n = 939.6\,\mathrm{MeV/c^2}$.

קצת יחסות

$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2 = {E_0}^2 + p^2c^2$, אך כאשר $E_k \ll mc^2$ ניתן להשתמש בביטוי הניוטוני: $E_k = p^2/2m$. אורך גל דה-ברולי: $\lambda = \frac{h}{p}$.

אפקטים מודרניים

האפקט הפוטואלקטרי – האנרגיה של האלקטרון שנפלט היא $h\nu - W$, כאשר ν תדירות היא הפוטון ו-W זו פונקציית העבודה של המתכת. גאוני. אפקט קומפטון – שפוטונים שפוגעים בחלקיק מתפזרים בזווית θ יחסית לכיוון המקורי, ומתקיים $\lambda_{new} - \lambda_{old} = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta)$. נהדר. התופעה באה לידי ביטוי רק עבור קרינה עם אורכי גל מסדר גודל של אנגסטרם (קרינת רנטגן), שכן זהו סדר הגודל של אורך גל קומפטון λ_c. ואחרון חביב, פיזור בראג – קרינת רנטגן, שהפעם פוגעת בגביש אטומי. על מנת לקבל התאבכות בונה נדרוש $\sin\theta = \frac{n\lambda}{2a}$, כאשר λ זה אורך גל הקרינה ו-a הוא המרחק בין מישורי האטומים בשריג. θ היא הזווית בין הקרינה לבין מישור השריג (ולא הזווית עם האנך).

גלים והתאבכות

באופן כללי, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$. מהירות הפאזה היא המהירות שבה חולף מישור פאזה על פני צופה נייח, והיא נתונה על ידי $v_{ph} = \lambda/T = \omega/k$. עקיפה של שני סדקים צרים, במרחק b אחד מהשני ועם מסך במרחק L, עם גל באמפליטודה A ומספר גל k – $I(x) = \frac{4|A|^2}{L^2+x^2}\cos^2\left(\frac{bxk}{2L}\right)$, כאשר מחזור התמונה הוא $\Delta x = \frac{2\pi L}{kb} = \lambda\frac{L}{b}$. בעקיפה מסדק ברוחב d של גלים עם אורך גל λ, נקבל $I(x) = d\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi d}{\lambda L}x\right)$ או לחילופין $I(\theta) = d\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi d}{\lambda}\theta\right)$ (כאשר θ היא הזווית שיוצרת קרן ממרכז הסדק לנקודה, עם האופק).

מודל בוהר

הנחת היסוד: התנע הזוויתי מקוונטט, כלומר $L = n\hbar$. רדיוס המסלולים: $r_n = \frac{h^2}{4m_e e^2\pi^2}n^2$, האנרגיות: $E_n = -\frac{2\pi^2e^4m}{h^2}\cdot\frac{1}{n^2} \cong \frac{-13.6\mathrm{eV}}{n^2}$.

אורך הגל של הפוטון שנפלט במעבר רמות: $\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2e^4m}{h^3c}\left(\frac{1}{{n_2}^2}-\frac{1}{{n_1}^2}\right) \cong \frac{1}{10^3\,\mathrm{\mathring{A}}}\left(\frac{1}{{n_2}^2}-\frac{1}{{n_1}^2}\right)$. לאטום אחר (עם אלקטרון אחד), כותבים Z^2e^2.

פונקציית דלתא

מוגדרת על ידי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$. הגדרות נוספות: $\delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon}e^{-|x|/\varepsilon},\ \delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},\ \delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\varepsilon^2}$, $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}dk,\quad \delta^\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi}\frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2},\quad \delta^\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$. תכונות הפונקציה: $\delta(x) = \delta(-x)$, $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x)$ וכן עבור $g(x)$ עם שורשים בדידים $\{x_i\}$ כך ש-$g'(x_i) \neq 0$: $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|g'(x_i)|}$. ניתן גם להגדיר את פונקציית המדרגה $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x}\delta(x)\,dx$ שמקיימת $\theta(x<0) = 0$ ו-$\theta(x>0) = 1$. אזי $\delta(x) = \theta'(x)$.

מכפלה פנימית

העתקה $V\times V \to \mathbb{F}$. לינאריות באיבר השני: $\langle u, \alpha v_1 + \beta v_2\rangle = \alpha\langle u, v_1\rangle + \beta\langle u, v_2\rangle$, הרמיטיות: $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle^*$, חיוביות: $\langle u, u\rangle \geq 0$ ושיוויון עבור $u = 0$ בלבד. נורמה של וקטור מוגדרת על ידי $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. אי-שיוויון קושי-שוורץ: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$, ושיוויון עבור u, v מקבילים בלבד. אי-שיוויון המשולש: $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. בהינתן בסיס אורתונורמלי $\{e_n\}$, כלומר $\langle e_m, e_n\rangle = \delta_{mn}$, ניתן לכתוב $v = \sum v_i e_i$ כאשר $v_i = \langle e_i, v\rangle$. כלומר, $v = \sum\langle e_i, v\rangle e_i$.

טורי פורייה

עבור פונקציה מחזורית $f(x)=f(x+L)$ ניתן להגדיר בסיס פונקציות $e_n(x)=e^{ik_nx}$, כאשר $k_n=2\pi n/L$. זהו בסיס אורתונורמלי, וניתן לכתוב $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e_n(x)$, כאשר המקדמים הם $c_n=\langle e_n(x),f(x)\rangle=\frac{1}{L}\int_0^L e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}f(x)\,dx$. מתקיים: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2=\frac{1}{L}\int_0^L|f(x)|^2\,dx$.

טרנספורם פורייה

גבול של טור פורייה על קטע אינסופי. מפתחים את $f(x)$ לטור אינסופי שהופך לאינטגרל: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{ikx}}_{base}\underbrace{\tilde{f}(k)}_{coeff.}dk$, והמקדמים ניתנים על ידי: $\tilde{f}(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}f(x)\,dx$. $\tilde{f}(k)$ נקרא טרנספורם פורייה של $f(x)$. מבחינה פיסיקלית, הן טרנספורם פורייה והן טור פורייה מייצגים למעשה סופרפוזיציה משוקללת של גלים e^{ikx} עם מספרי גל שונים. מתקיים $F[f'(x)]=ik\cdot F[f(x)]$. תכונות חשובות, עבור $F[f(x)]=F(k)$ מתקיימים כל הקשרים הבאים: $F[f(ax)]=\frac{1}{|a|}F(k/a),\ \ F[f(x+a)]=e^{ika}F(k),\ \ F[\alpha(f(x)+g(x))]=\alpha F(k)+\alpha G(k)$

$F\left[e^{ik_0x}f(x)\right]=F(k-k_0),\ \ F^2[f(x)]=f(-x)$.

פיזור סטציונרי של גלים

מקדם ההעברה הוא החלק היחסי של הגל שעבר את המחסום: $T=j_T/j_I$. כאשר הפוטנציאל משני צידי המחסום זהה, נקבל ש- $T=|B|^2$ כאשר B הוא המקדם של הגל שעבר מימין. מקדם ההחזרה הוא $R=j_R/j_I=|A|^2$. משימור הסתברות חייב להתקיים $T+R=1$. תמיד דורשים רציפות של פונקציית הגל $\psi(x)$. עבור פוטנציאל סופי, יש רציפות גם בנגזרת $\psi'(x)$, ועבור פוטנציאל אינסופי: $\psi'(a^+)-\psi'(a^-)=\frac{2m}{\hbar^2}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}V(x)\,\psi(x)\,dx$. למשל עבור $V(x)=|a|\,\delta(x)$, $\psi'(0^+)-\psi'(0^-)=\frac{2m\,|a|}{\hbar^2}\psi(0)$. תמיד נפתור את משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן, $Hu=Eu$. הפתרונות בכל תחום הם בדרך כלל $e^{\pm ikx}$, כאשר מוגדר $k=\sqrt{2m(E-V)}/\hbar$. חשוב לוודא שאין גל שמגיע מאינסוף וכן שמופיעות רק פונקציות גל אינטגרביליות בריבוע. מקדם העברה למחסום ברוחב a ובגובה V: $|T|^2=\frac{(2kq)^2}{(k^2+q^2)^2\sinh^2(qa)+(2kq)^2}$. קירוב WKB: $|T|^2=\exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{V>E}\sqrt{2m(V(x)-E)}dx\right)$.

מצבים קשורים

עבור פוטנציאל שסימטרי תחת שיקוף $x\leftrightarrow -x$, מצב היסוד יהיה סימטרי גם הוא. כמו כן, במצבים כאלה רצוי להיעזר בסימטריה ובכך שתחת שיקוף $x\leftrightarrow -x$ נקבל גם $A\leftrightarrow D,\ B\leftrightarrow C$ כאשר A הוא המקדם של הגל הנכנס, D הוא גל יוצא, ו- B ו- C מקדמי הגל בתווך (למשל). בדרך כלל נגיע מתוך תנאי הרציפות למשוואות על המקדמים ועל האנרגיה של המצב, שמתוכם ניתן למצוא את המצבים הקשורים (אם לא בדרך אנליטית אז באמצעים גרפיים – חיתוך בין פונקציות וכד'). אם נקבל למשל משוואות שמקשרות בין A ו- D, נרצה לרשום זאת כמערכת משוואות הומוגנית בנעלמים (A,D) ואז לדרוש שהמטריצה תהא סינגולרית (על מנת לקבל פיתרון לא טריוויאלי).

סטטיסטיקה של משתנה בדיד

עבור משתנה מקרי X, שיכול לקבל ערכים $x_1,\dots,x_n$ בהסתברות $p_1,\dots,p_n$ בהתאמה, ונסמן $P(X=x_i)=p_i$. תנאי הנירמול: $\sum_i p_i=1$. ערך התוחלת של X הוא: $\bar{X}=\langle X\rangle=\sum_i p_ix_i$, וזוהי פעולה לינארית. המומנט ה-n-י של X מוגדר כך: $\langle X^n\rangle=M_n(X)=\sum_i p_ix_i^n$. השונות של המשתנה מוגדרת כך: $\mathrm{var}(X)=(\Delta X)^2=\left\langle(X-\langle X\rangle)^2\right\rangle=\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2$. עבור N מדידות, שהסיכוי של כל אחת מהן להצליח הוא p והסיכוי שתיכשל $q=1-p$, ההסתברות ש- n מדידות יצליחו היא $P(n)=\binom{N}{n}p^nq^{N-n}$, כאשר אין חשיבות לסדר, ו- $\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}$.

סטטיסטיקה של משתנה רציף

עבור משתנה מקרי X שיכול לקבל ערכים ברצף על $\mathbb{R}$. הפונקציה $f(x)$ מתארת את צפיפות ההסתברות, כלומר ההסתברות למדוד לחלקיק ערך $x\in[x,x+dx]$ היא $f(x)\,dx$, וההסתברות למדוד לו ערך $x\in[a,b]$ היא $\int_a^b f(x)\,dx$. תנאי הנירמול הוא $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$, תוחלת המשתנה X היא $\langle X\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx$. מומנטים ושונות מוגדרים בצורה דומה – $\langle X^n\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x^nf(x)\,dx$, וכן $(\Delta X)^2=\langle X^2\rangle-\langle X\rangle^2$.

פונקציית הגל

$\psi(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, כאשר $|\psi(x)|^2=\psi^*(x)\psi(x)$ זו צפיפות ההסתברות למצוא את החלקיק במרחב. עלינו להיות מסוגלים לנרמל את הפונקציה כך ש- $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$, ואז נאמר ש- $\psi(x)$ אינטגרבילית בריבוע. המקום הממוצע של החלקיק, או ערך התצפית של המקום, ניתן על ידי: $\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)x\psi(x)dx$. אי-הוודאות במדידת מיקום החלקיק היא השונות: $(\Delta x)^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$. ערך התצפית של כל מדידה, או הממוצע שלה, תמיד ניתן על ידי: $\langle\hat{A}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\hat{A}\psi(x)dx$. למשל $\langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)dx$ או $\langle E\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)H\psi(x)dx$, כאשר H הוא ההמילטוניאן: $H=\frac{p^2}{2m}+V(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)$. ψ מקיימת את משוואת שרדינגר: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$. עבור H תי תלוי בזמן, המשוואה היא $Hu(x)=Eu(x)$ ואז הפיתרון הוא $\psi(x,t)=Cu(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, וזהו פיתרון סטציונרי שכן צפיפות ההסתברות קבועה בזמן $|\psi|^2=|Cu(x)|^2$. עבור פונקציית גל ממשית, בהכרח התנע הממוצע מתאפס $\langle p\rangle=0$, וכמו כן זרם ההסתברות, שמוגדר על ידי: $j=\frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$, מתאפס. משוואת הרציפות: $\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0$ כאשר $P=|\psi|^2$ זו צפיפות ההסתברות. קצב שינוי ההסתברות למצוא את החלקיק ב-(a,b) הוא: $\frac{d}{dt}\int_a^b Pdx=j(b)-j(a)$. עבור חלקיק עם תנע מוגדר p, זרם ההסתברות הוא $j=p/m=v$.

כתיב $Dirac$

צורת רישום של וקטורים, מכפלות פנימיות ואופרטורים. בכתיב זה וקטור עמודה מיוצג על ידי *ket*, $|u\rangle$, ואילו ה-*bra* מייצג וקטור שורה והצמדה קומפלקסית: $\langle v|=\begin{pmatrix}v_1^* & \dots & v_n^*\end{pmatrix}$. מכפלה פנימית נכתבת כ- $\langle v,u\rangle=v_1^*u_1+\dots+v_n^*u_n$.

אלגברה לינארית

במרחב וקטורי V, האופרטור $A:V\to V$ לינארי אם לכל וקטורים u,v ולכל סקלרים בשדה α,β יתקיים: $A(\alpha u+\beta v)=\alpha Au+\beta Av$. אם לאופרטור במרחב n-מימדי יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים, אזי האופרטור לכסין – ניתן למצוא בסיס בו המטריצה המייצגת אותו תהיה אלכסונית. בסיס זה הוא בדיוק אוסף הוקטורים העצמיים הבלתי תלויים, ולאחר הליכסון נקבל את הערכים העצמיים באלכסון. וקטורים עצמיים של אופרטור A מייצגים כיוונים במרחב שאינם משתנים תחת A (לכל היותר, הם נמתחים או מתכווצים). למשל, לכל אופרטור של סיבוב במרחב יש וקטור עצמי עם ערך עצמי 1, שמייצג את ציר הסיבוב. הערכים העצמיים מקיימים שמכפלתם היא $\det A$ וסכומם הוא $\operatorname{trace} A$.

אופרטור צמוד הרמיטי

מוגדר כאופרטור $T^\dagger$ שמקיים לכל זוג וקטורים u,v: $\langle u|Tv\rangle=\langle T^\dagger u|v\rangle$. בהצגה מטריצית, מתקיים $(T^\dagger)_{ij}=(T)^*_{ji}$. כמו כן, מתקיימות התכונות הבאות: $(T^\dagger)^\dagger=T,\ (\alpha T)^\dagger=\alpha^*T^\dagger,\ (T+S)^\dagger=T^\dagger+S^\dagger,\ (ST)^\dagger=T^\dagger S^\dagger$. אופרטור נורמלי מקיים $TT^\dagger=T^\dagger T$. אופרטור הרמיטי מקיים $T=T^\dagger$ ואילו אופרטור אנטי הרמיטי מקיים $T=-T^\dagger$. אופרטור אוניטרי הוא כזה ש- $T^{-1}=T^\dagger$, כלומר $TT^\dagger=I$. ובפרט – כולם נורמלים. מעל הממשיים, כל אופרטור סימטרי הוא הרמיטי, כל אופרטור אנטי סימטרי הוא אנטי הרמיטי, כל אופרטור אורתוגונלי הוא אוניטרי. ועבור אופרטור הרמיטי T, האופרטור iT הוא אנטי הרמיטי. כמו כן, הדברים הבאים שקולים: T אוניטרי, $\langle Tu|Tv\rangle=\langle u|v\rangle$ (T משמר מכפלה פנימית), ו-$\|Tv\|=\|v\|$ (T משמר נורמה), לכל וקטורים u,v. שני אופרטורים הרמיטיים A,B יהיו חילופיים $[A,B]=0$ אס"ם יש להם ו"ע משותפים. כל אופרטור מדיד הוא בהכרח הרמיטי, שה-ו"ע שלו מהווים בסיס שלם לכל המרחב.

הטלה אורתוגונלית

כל אופרטור לינארי P המקיים $P^2=P$ נקרא הטלה (משמעות: לאחר שהפעלנו את P פעם אחת, לא יקרה דבר אם נפעילו שוב ושוב). הטלה המקיימת $P=P^\dagger$ נקראת הטלה אורתוגונלית. לכל וקטור יחידה $|u\rangle$, האופרטור $P_u=|u\rangle\langle u|$ הינו הטלה אורתוגונלית על $\operatorname{span}\{|u\rangle\}$, ומתקיים $P_u|v\rangle=|u\rangle\langle u|v\rangle=\lambda|u\rangle\in\operatorname{span}\{|u\rangle\}$.

הצגה מטריציונית של אופרטור

עבור $\{|e_n\rangle\}$ בסיס אורתונורמלי, האופרטור $P=\sum_i|e_i\rangle\langle e_i|$ הינו אופרטור היחידה I. וגם, ניתן לכתוב כל וקטור לפי רכיביו $|v\rangle=\sum_i v_i|e_i\rangle$, כאשר המקדמים הם $v_i=\langle e_i|v\rangle$. גם לאופרטור T יש ייצוג לפי הבסיס: $T=\sum_{i,j}(T)_{ij}|e_i\rangle\langle e_j|$ כאשר $(T)_{ij}=\langle e_i|Te_j\rangle$.

תכונות ספקטרליות של אופרטורים נורמלים

לפי משפט *Schur*, כל אופרטור נורמלי הוא לכסין. מכאן שגם כל אופרטור הרמיטי, אנטי הרמיטי ואוניטרי (שכולם נורמלים) לכסינים. תכונות: לכל וקטור v, $\left\|T^\dagger v\right\| = \|Tv\|$; עבור ע"ע ו-ו"ע $T|v\rangle = \lambda|v\rangle$, גם $T^\dagger|v\rangle = \lambda^*|v\rangle$; ו"ע של ע"ע שונים הם בהכרח אורתוגונליים. ומכיוון ש-ו"ע של אותו ע"ע הם תמיד בלתי תלויים, ניתן ליצור מהם סט אורתוגונלי (גרהם-שמידט), ובסך הכל נוכל לקבל סט אורתונורמלי של ו"ע של T, ובעזרתו ללכסן את האופרטור, כאשר המטריצה המלכסנת היא אוניטרית (כי עמודותיה סט אורתונורמלי). עבור $\left\{|e_i\rangle\right\}$ סט של ו"ע אורתונורמליים של T, עם ע"ע $\{\lambda_i\}$ בהתאמה, מתקיים $T = \sum_i \lambda_i P_i$ כאשר $P_i = |e_i\rangle\langle e_i|$ היא ההטלה האורתוגונלית על $|e_i\rangle$. בנוסף מתקיים $P_iP_j = P_i\delta_{ij}$. תכונות ספקטרליות: עבור H הרמיטי, כל הע"ע ממשיים; עבור A אנטי הרמיטי, כל הע"ע מדומים טהורים; עבור U אוניטרית, כל הע"ע נמצאים על מעגל היחידה ב-$\mathbb{C}$. מכאן, שמבין כל האופרטורים הנורמלים רק האופרטורים ההרמיטיים הם לכסינים מעל $\mathbb{R}$.

ניוון של מצבים עצמיים

מקרה שבו לאופרטור מדיד A יש ע"ע a עם יותר מ-ו"ע עצמי אחד, $A|\varphi_1\rangle = a|\varphi_1\rangle,\ A|\varphi_2\rangle = a|\varphi_2\rangle,\ \ldots$. תמיד ניתן, בעזרת תהליך גרהם-שמידט, להגיע לסט $\left\{|\varphi_n\rangle\right\}$ אורתונורמלי. במקרה כזה, מדידה של A לא בהכרח מגלה לנו את מצב המערכת, שכן עבור תוצאה a קיימים כמה מצבים אפשריים (אנו רק מצמצים את האפשרויות לתת-מרחב). אך תמיד ניתן לבחור אופרטור מדיד נוסף B שהוא חילופי עם A, כך שמדידה של A ושל B (שאינה פוגעת במצב המערכת, שכן לשני האופרטורים מצבים עצמיים משותפים) תגלה לנו בדיוק את מצב המערכת. סט כזה של אופרטורים מדידים וחילופיים $A,B,C,\ldots$ שעבורו אין ניוון, נקרא מערכת שלמה של אופרטורים מדידים חילופיים ($CSCO$).

האקסיומות של מכניקת הקוונטים

1. מצב מערכת מיוצג על ידי וקטור מצב במרחב המצבים הפיסיקליים; 2. גודל פיסיקלי מדיד מיוצג ע"י אופרטור הרמיטי בעל בסיס שלם במרחב הנ"ל; 3. מדידת הגודל הנ"ל יכולה להניב אך ורק אחד מן הערכים העצמיים שלו; 4. ההסתברות למדידת ערך עצמי a עם מצב עצמי φ_a היא $\Pr(a) = \left|\langle\varphi_a|\psi\rangle\right|^2$ כאשר ψ הוא מצב המערכת (כאשר יש ניוון, נקבל $\Pr(a) = \sum_i \left|\langle\varphi_a^i|\psi\rangle\right|^2$), ועבור ערכים עצמיים רציפים ההסתברות למדוד ערך בקטע $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ היא $d\Pr(\alpha) = \left|\langle\varphi_\alpha|\psi\rangle\right|^2 d\alpha$; 5. התפתחות מצב המערכת בזמן נתון על ידי ההמילטוניאן: $i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle$; 6. אם מדדנו למערכת ערך עצמי a, המערכת מיד קורסת למצב העצמי שמתאים לו (או לצירוף לינארי שלהם, אם יש ניוון); 7. יחס החילוף $[p,x] = -i\hbar$. לכל זוג אופרטורים הרמיטיים A,B מתקיים $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle\right|$, ומכאן עיקרון אי-הוודאות: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}|i\hbar| = \frac{\hbar}{2}$.

התפתחות מצב בזמן

$|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t_0)}|\psi\rangle_{t=t_0}$. עבור המילטוניאן $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V$ שאינו תלוי מפורשות בזמן, מתקיים לכל אופרטור מדיד A הקשר: $\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi(t)|[A,H]|\psi(t)\rangle$. מכאן שאם A חילופי עם H, ערך התצפית שלו $\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle$ קבוע בזמן, וגם הערכים העצמיים של A קבועים בזמן ($\langle\varphi_a|A|\varphi_a\rangle = a = const$). אם H שייך למערכת שלמה של אופרטורים מדידים $[A,B,\ldots,H]$, כולם חילופיים זה עם זה ולכן ערכי התצפית של $A,B,\ldots$, והאנרגיה, קבועים בזמן וניתן לאפיין את המערכת בעזרת קבועים אלה. משוואות ארנפסט: $\langle p\rangle = m\frac{d\langle x\rangle}{dt},\quad \frac{d\langle p\rangle}{dt} = m\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} = -\left\langle\frac{dV}{dx}\right\rangle$.

משפטי הפיתוח

במרחב המקום, אופרטור התנע הוא $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}$. במרחב התנע, אופרטור המקום הוא $\hat{x} = -\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dp}$. ניתן לעבור בין פונקציות הגל במרחב המקום והתנע בעזרת: $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(p)e^{\frac{i}{\hbar}px}dp$, $\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}px}dx$ (זהו טרנספורם פורייה הפוך), וזהו למעשה משפט הפיתוח לפי פונקציות עצמיות של התנע, שהן $u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}px}$. $|\phi(p)|^2$ זו צפיפות ההסתברות למדוד לחלקיק תנע p. פיתוח לפי ערכים עצמיים בדידים: $\psi(x,t) = \sum_m A_m e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}u_m(x)$, כאשר המקדמים ניתנים על ידי ההטלה: $A_m e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} = \int_{-\infty}^{\infty}u_m^*(x)\psi(x,t)dx$. $|A_m|^2$ מייצג את ההסתברות למדוד לחלקיק את המצב $u_m(x)$. תנאי האורתונורמליות במקרה זה הוא: $\int_{-\infty}^{\infty}u_m^*(x)u_n(x)dx = \delta_{mn}$.

סודוקו

למקרה שישעמם לך בבוחן:

	3		6	9				2
2		8		5				9
	9				3			5
	7				9			
4		3		7		9		1
			5				4	
3			9				2	
8				3		1		4
6				1	5		3	

(בין הפותרים נכונה תוגרל החולצה של פרופ' גרונאו.)