תורה אלקטרומגנטית

זהות גרין הראשונה
$$\iiint_v [f\cdot\nabla^2 g+\vec{\nabla} g\cdot\vec{\nabla} f]\,d^3x=\iint_s f\,\hat{n}\cdot\vec{\nabla} g\,da$$

זהות גרין השנייה
$$\iiint_v [f\cdot\nabla^2 g-g\cdot\nabla^2 f]\,d^3x=\iint_s [f\cdot\vec{\nabla} g-g\cdot\vec{\nabla} f]\cdot\hat{n}\,da$$

משפט גאוס
$$\oiint_s \vec{A}\cdot\hat{n}\,da=\iiint_v \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,d^3x$$

משפט סטוקס
$$\iint_s(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\hat{n}\,da=\oint_c \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

פונקצית דלתא בשלושה משתנים
$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')=\delta(x-x')\cdot\delta(y-y')\cdot\delta(z-z')$$
$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')=\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\delta(r-r')\cdot\delta(\theta-\theta')\cdot\delta(\varphi-\varphi')$$

אלקטרוסטטיקה

שדה חשמלי
$$\vec{E}(\vec{x})=\iiint_v \rho(\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'$$

פוטנציאל חשמלי
$$\Phi(\vec{x})=\frac{\iiint_v \rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

חוק גאוס
$$\oiint_s \vec{E}\cdot\hat{n}\,da=4\pi\iiint_v \rho(\vec{x}')\,d^3x'=4\pi Q_{\text{in}}$$

אנרגיה חשמלית
$$W=\frac{1}{8\pi}\cdot\iiint_v |\vec{E}(\vec{x})|^2 d^3x$$

דיפול
$$\vec{P}=q\,\vec{l}$$

פוטנציאל של דיפול
$$\Phi(\vec{x})=\frac{\vec{P}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$$

פוטנציאל של שכבה דיפולית
$$\Phi(\vec{x})=\iint_s D(\vec{x}')\frac{\hat{n}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}da'$$
$$D(\vec{x})=\sigma(\vec{x})\cdot d(\vec{x})$$
$$\Phi_2-\Phi_1=4\pi D$$

זהות גרין הראשונה
$$\iiint_v [\phi\cdot(\nabla^2\psi)+\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi]\,d^3x=\oiint_s \phi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}da$$

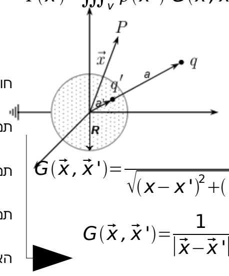
זהות גרין השנייה
$$\iiint_v [\phi(\nabla^2\psi)-\psi(\nabla^2\phi)]\,d^3x=\oiint_s\left[\phi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]da$$

משפט ההפיכות
$$\iiint_v \rho\cdot\Phi'\,d^3x+\oiint_s \sigma\cdot\Phi'\,da=\iiint_v \rho'\cdot\Phi\,d^3x+\oiint_s \sigma'\cdot\Phi\,da$$

פתרון בעיות באמצעות פונקצית גרין

תנאי דריכלה
$$\Phi(\vec{x})=\iiint_v \rho(\vec{x}')\cdot G(\vec{x},\vec{x}')d^3x'-\frac{1}{4\pi}\iint_s \Phi_s(\vec{x}')\frac{\partial G(\vec{x},\vec{x}')}{\partial n'}da'$$

תנאי ניומן
$$\Phi(\vec{x})=\iiint_v \rho(\vec{x}')\cdot G(\vec{x},\vec{x}')d^3x'+\frac{1}{4\pi}\iint_s G(\vec{x},\vec{x}')\frac{\partial\Phi(\vec{x}')}{\partial n'}da'$$



שיטת הדמויות פונקצית גרין

מטען ומישור מוליך מוארק – פונקצית גרין
$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}$$

מטען וכדור מוליך מוארק
$$G(\vec{x},\vec{x}')=\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}-\frac{R}{a\cdot\left|\vec{x}-\frac{R^2}{a^2}\vec{x}'\right|}\qquad q'=-q\cdot\frac{R}{a}\quad ,a'=\frac{R^2}{a}$$

פונקציית גרין – תייל מוליך מעל מישור מוארק
$$G(x,y,x',y')=-\ln[(x-x')^2+(y-y')^2]+\ln[(x-x')^2+(y+y')^2]$$

קליפה גלילית אינסופית
$$G(r,r',\theta,\theta')=-\ln[r^2+(r')^2-2rr'\cos(\theta-\theta')]+\ln\left[\frac{r^2(r')^2}{b^2}+b^2-2rr'\cos(\theta-\theta')\right]$$

תנאי דריכלה ב r =a
$$G(\vec{x},\vec{x}')=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\left[\frac{r_<^l}{r_>^{(l+1)}}-\frac{1}{a}\left(\frac{a^2}{rr'}\right)^{(l+1)}\right]Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

הפרדת משתנים

קורדינטות קרטזיות
$$\Phi(\vec{x})=X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)=e^{\pm i\alpha x}\cdot e^{\pm i\beta y}\cdot e^{\pm\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z}$$

קורדינטות כדוריות
$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\cdot\Phi)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}=0$$
$$\Phi(\vec{x})=\frac{U(r)}{r}\cdot P(\theta)\cdot Q(\varphi)$$

סימטריה אזימוטלית
$$\Phi(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(A\,r^l+B\,r^{-(l+1)})P_l(\cos(\theta))$$

פיתוח לטור לג'נדר
$$g(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l P_l(\cos(\theta))$$
$$a_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-l}^{l}g(\theta)P_l(\cos(\theta))\,d(\cos(\theta))$$

פתרונות ללא סימטריה אזימוטלית
$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[A_{lm}r^l+B_{lm}r^{-(l+1)}]\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\cdot P_l^m(\cos(\theta))\cdot e^{im\varphi}$$
$$P_l^m(x)=(-1)^m\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$$
$$g(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}\cdot Y_{lm}(\theta,\varphi)$$
$$a_{lm}=\int_{-1}^{1}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\cdot g(\theta,\varphi)\,d\Omega$$

פוטנציאל של טבעת טעונה:
$$\Phi(r,\theta)=Q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(0)P_l(\cos(\theta))$$

קורדינטות גליליות
$$\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$
$$\Phi(\vec{x})=R(r)\cdot Q(\varphi)\cdot Z(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_m\sin(m\varphi)+B_m\cos(m\varphi))(C_k e^{kz}+D_k e^{-kz})(E_m J_m(kr)+F_m N_m(kr))$$
$k=\frac{x_{mn}}{a}$ כאשר x_{mn} האפסים של פונקצית בסל

פתרון משוואת לפלאס בדו-מימד:
$$\Phi(r,\varphi)=A+B\varphi+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\rho^{\frac{m\pi}{\beta}}\sin\left(\frac{m\pi}{\beta}\varphi\right)$$

פילוג מטען

פיתוח הפוטנציאל לטור טיילור
$$\Phi(\vec{x})\frac{q}{r}+\frac{\vec{P}\cdot\vec{x}}{r^3}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{x_i x_j}{r^5}+\ldots$$
$$q=\iiint_v \rho(\vec{x}')\,d^3x'$$
$$\vec{P}=\iiint_v \vec{x}'\rho(\vec{x}')\,d^3x'$$
$$Q_{ij}=\iiint_v (3x_i'x_j'-r'^2\delta_{ij})\rho(\vec{x}')\,d^3x'$$

פיתוח האנרגיה לטור
$$W=q\cdot\Phi(0)-\vec{P}\cdot\vec{E}(0)-\frac{1}{6}\sum_{i,j}Q_{ij}\frac{\partial E_j}{\partial x_i}(0)+\ldots$$

שדה חשמלי של דיפול
$$\vec{E}(\vec{x})=\frac{3\hat{n}(\vec{P}\cdot\hat{n})-\vec{P}}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$$
$$\hat{n}=\frac{\vec{x}-\vec{x}_0}{|\vec{x}-\vec{x}_0|}$$

אנרגית האינטרקציה בין דיפולים
$$W_{1,2}=\frac{\vec{P}_1\cdot\vec{P}_2-3(\hat{n}\cdot\vec{P}_1)\cdot(\hat{n}\cdot\vec{P}_2)}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}$$

מומנט הכח על דיפול בשדה חיצוני
$$\vec{N}=\vec{P}\times\vec{E}$$

פיתוח בטור לספריות הרמוניות
$$\Phi(\vec{x})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}q_{lm}\frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{r^{l+1}}$$
$$q_{lm}=\iiint_v Y_{lm}^*(\theta',\varphi')\,r'^l\rho(\vec{x}')\,d^3x'$$
$$q_{l-m}=(-1)^m q_{lm}^*$$

אלקטרוסטטיקה בחומר

ווקטור העתקה
$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}\qquad\vec{P}=\chi_e\vec{E}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho$$
$$\vec{D}=\epsilon\cdot\vec{E}$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\frac{\rho}{\epsilon}$$

חוק גאוס בחומר
$$\oiint_s \vec{D}\cdot\hat{n}\,da=4\pi\iiint_v \rho(\vec{x})\,d^3x$$

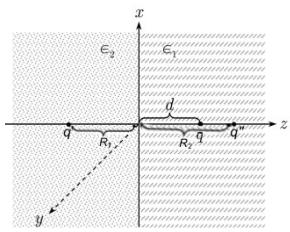
תנאי השפה בכיוון הניצב לתווך
$$(D_2-D_1)\cdot\hat{n}_{2\text{->}1}=4\pi\sigma$$

תנאי השפה המשיק תווך
$$E_{1\text{t}}=E_{2\text{t}}$$

תנאי השפה פולריזציה
$$P_{2\text{n}}-P_{1\text{n}}=\sigma_{pol}$$

האנרגיה האגורה בשדה אלקטרוסטטי
$$W=\frac{1}{8\pi}\iiint_v \vec{E}\cdot\vec{D}\,d^3x$$

שיטת הדמויות בחומר



$$\Phi_{z<0}=\frac{1}{\varepsilon_2}\cdot\frac{q''}{R_1}\qquad\Phi_{z>0}=\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{q}{R_1}+\frac{q'}{R_2}\right)$$
$$R_1=\sqrt{r^2+(d-z)^2}\qquad R_2=\sqrt{r^2+(d+z)^2}$$
$$q'=-\left(\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q\qquad q''=\left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\right)q$$

עבור מעטפת כדורית מסתובבת:
$$\vec{A}_{out}(r,\theta)=\frac{4\pi}{3c}\frac{\omega\sigma R^4\sin(\theta)}{r^2}\hat{\varphi}$$
$$\vec{A}_{\text{in}}(r,\theta)=\frac{4\pi}{3c}\omega\sigma Rr\sin(\theta)\hat{\varphi}$$

מגנטוסטטיקה

זרם
$$I=\iint_s \vec{J}\cdot\hat{n}\,da$$

משוואת הרציפות
$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0$$

מעטפת כדורית מסתובבת
$$J_\varphi=\omega R\sigma\sin(\theta)\cdot\delta(r-R)$$

מעטפת גלילית מסתובבת
$$J_\varphi=\omega R\sigma\cdot\delta(r-R)$$

חוק ביו סבר
$$d\vec{B}=\frac{I}{c}\cdot\frac{d\vec{l}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$
$$\vec{B}(\vec{x})=\frac{1}{c}\iiint_v \vec{J}(\vec{x}')\times\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'$$

חוק אמפר
$$d\vec{F}=\frac{I}{c}d\vec{l}\times\vec{B}\qquad\vec{F}=\iiint_v \vec{J}(\vec{x})\times\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}d^3x'$$

מומנט הכח
$$\vec{N}=\frac{1}{c}\iiint_v \vec{x}\times[\vec{J}(\vec{x})\times\vec{B}(\vec{x})]\,d^3x$$

הכח בין שתי לולאות זרם
$$\vec{F}_{12}=\frac{-I_1 I_2}{c}\frac{\oint_{c1}\oint_{c2}(d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2)\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^3}$$

חוק אמפר
$$\oint_{c=\partial s}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\frac{4\pi}{c}\iint_s \vec{J}\cdot\hat{n}\,da=\frac{4\pi}{c}I$$

פוטנציאל ווקטורי
$$\vec{B}(\vec{x})=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x})$$
$$\nabla^2\vec{A}=\frac{-4\pi}{c}\vec{J}$$
$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{1}{c}\iiint_v \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'$$

פיתוח למולטיפולים מגנטיים

מומנט דיפול מגנטי $\vec{m}=\frac{1}{2c}\iiint_v \vec{x}'\times\vec{J}(\vec{x}')d3x'$

פוטנציאל ווקטורי של דיפול מגנטי $\vec{A}(\vec{x})=\frac{\vec{m}\times(\vec{x}-\vec{x}_0)}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$

השדה המגנטי של דיפול $\vec{B}(\vec{x})=\frac{3\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{m})-\vec{m}}{|\vec{x}-\vec{x}_0|^3}$

מומנט הדיפול עבור זרם בלולאה מישורית $\vec{m}=\frac{1}{2c}\oint_c \vec{x}\times d\vec{l}$

a שטח הלולאה $|\vec{m}|=\frac{Ia}{c}$

מומנט הכח $\vec{N}=\vec{m}\times\vec{B}$

אנרגיה של דיפול $U=-\vec{m}\cdot\vec{B}$

מגנטיזציה $\vec{M}=\frac{1}{2c}\vec{x}\times\vec{J}(\vec{x})$

$\vec{m}=\iiint_v \vec{M}d^3x$

מגנטוסטטיקה בחומר

$\vec{B}=\mu\vec{H}$

ווקטור העתקה $\vec{H}=\vec{B}-4\pi\vec{M}$ $\quad\vec{M}=\chi_m\vec{H}$

תנאי שפה בכוון ניצב $B_{2n}-B_{1n}=0$

תנאי שפה בכוון משיק $H_{2t}-H_{1t}=\frac{4\pi}{c}K$

האנרגיה האגורה בשדה מגנטי $W=\frac{1}{8\pi}\iiint_v \vec{B}\cdot\vec{H}d^3x=\frac{1}{2c}\iiint_v \vec{J}\cdot\vec{A}d^3x$

עבור חומרים דיאמגנטים $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

עבור חומרים דיאמגנטים ללא זרמים חופשיים $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

עבור חומרים מגנטים $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

ריק $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

הפוטנציאל המגנטי סקלרי

כאשר אין זרמים חופשים $\vec{\nabla}\times\vec{H}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{H}=-\vec{\nabla}\Phi_m$

$\nabla^2\Phi_m=-4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{M}=-4\pi\rho_m$

$\Phi_m=-\iiint_v\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d^3x'+\oiint_s\frac{\hat{n}'\cdot\vec{M}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}da'$

שדות משתנים בזמן

כח לורנץ $\vec{F}=\frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$

חוק פארדיי $\varepsilon=\oint_c\vec{E}'\cdot d\vec{l}=\frac{-1}{c}\cdot\frac{d}{dt}\iint_s\vec{B}\cdot\hat{n}da$

שטף שדה המגנטי $F=\iint_s\vec{B}\cdot\hat{n}da$

כא"מ $\varepsilon=\frac{-1}{c}\cdot\frac{dF}{dt}$

משוואת מקסוול בחומר (מטענים וזרמים)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

משוואת מקסוול בחומר (ללא מטענים וזרמים)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

משוואת מקסוול (מטענים וזרמים)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=4\pi\rho\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}+\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

משוואת מקסוול בריק

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0\qquad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

חופש כיול

$\vec{E}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\Phi$

פוטנציאל תחת כיול לורנץ

$\nabla^2\Phi-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho$

$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=\frac{-4\pi}{c}\vec{J}$

ווקטור פוינטינג

הגדרה $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}(\vec{E}\times\vec{H})$

שינוי האנרגיה בנפח $\frac{\partial u}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=-\vec{J}\cdot\vec{E}$

צפיפות אנרגיה $u=\frac{1}{8\pi}(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{h})$

האנרגיה $W=\frac{1}{8\pi}\iiint_v(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{B}\cdot\vec{h})d^3x$

גלים אלקטרומגנטיים בריק

משוואות הגלים

$\nabla^2\vec{E}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$

$\nabla^2\vec{B}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$

פתרונות המשוואות

$\vec{E}(\vec{k}\cdot\vec{x}-ct),\vec{E}(\vec{k}\cdot\vec{x}+ct)$

$\vec{B}(\vec{k}\cdot\vec{x}-ct),\vec{B}(\vec{k}\cdot\vec{x}+ct)$

נוסחאות שימושיות

פולינומי לג'נדר

$\int P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}(P_{l+1}(x)-P_{l-1}(x))$

$\int_{-1}^{1}P_{l'}(x)\cdot P_l(x)dx=\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$

$\int_0^1 P_l(x)dx=\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{l-2}{2}}\cdot\frac{(l-2)!!}{2\cdot\left(\frac{l+1}{2}\right)!}$

$\int_{-1}^{1}x\cdot P_l(x)\cdot P_{l'}(x)dx=\begin{cases}\frac{2(l+1)}{(2l+1)(2l+3)} & l'=l+1\\ \frac{2l}{(2l-1)(2l+1)} & l'=l-1\end{cases}$

$\int_{-1}^{1}x^2\cdot P_l(x)\cdot P_{l'}(x)dx=\begin{cases}\frac{2(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)(2l+5)} & l'=l+2\\ \frac{2(2l^2+2l-1)}{(2l-1)(2l+1)(2l+3)} & l'=l\end{cases}$

$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos(\gamma))$

$P_l(\cos(\gamma))=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$\cos(\gamma)=\cos(\theta')\cos(\theta)-\sin(\theta')\sin(\theta)\cos(\varphi-\varphi')$

ספריות הרמוניות

$P_l^m(x)=(-1)^m\cdot(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{d^m}{dx^m}P_l(x)$

$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\cdot P_l^m(x)$

$\int_{-1}^{1}P_{l'}^m\cdot P_l^m dx=\frac{2}{2l+1}\cdot\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\cdot\delta_{ll'}$

$Y_{l-m}(\theta,\varphi)=(-1)^m Y_{lm}^*(\theta,\varphi)$

$Y_{lm}(\pi-\theta,\varphi+\pi)=(-1)^l Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$Y_{lm}(\pi-\theta,\varphi)=(-1)^{l+m}Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$Y_{lm}(\theta,\pi+\varphi)=(-1)^m Y_{lm}(\theta,\varphi)$

$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta[Y_{l'm'}(\theta,\varphi)Y_{lm}^*(\theta,\varphi)]=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$

$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)]=\delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos(\theta)-\cos(\theta'))$

$\sin(\theta)\sin(\varphi)=\frac{1}{2}i\sqrt{\frac{8\pi}{3}}[Y_{1,1}+Y_{1,-1}]$

$\sin(\theta)\cos(\varphi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}[Y_{1,1}-Y_{1,-1}]$

נספח :הפרדת משתנים בעיגול

$\Phi(r,\varphi)=R_v(r)\cdot\Psi_v(\varphi)$

$v=0\begin{cases}R_0(r)=a_0+b_0\ln(r)\\ \Psi_0(\varphi)=A_0+B_0\varphi\end{cases}$

$v\neq0\begin{cases}R_v(r)=a_v r^v+b_v r^{-v}\\ \Psi_v(\varphi)=A_v\cos(v\varphi)+B_v\sin(v\varphi)\end{cases}$

בסל נוימן והנקל

$J_v(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^v\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)\cdot\Gamma(j+v+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$

$J_{-v}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^v\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j!)\cdot\Gamma(j-v+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}$

$N_v(x)=\frac{J_v(x)\cdot\cos(\pi v)-J_{-v}(x)}{\sin(\pi v)}$

$H_v^{(1)}(x)=J_v(x)+iN_v(x)$

$H_v^{(2)}(x)=J_v(x)-iN_v(x)$

$J_v(x)\to\frac{1}{\Gamma(v+1)}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^v\qquad x<<1$

$N_v(x)\to\begin{cases}\frac{2}{\pi}[\ln(\frac{1}{2}x)]+0.5772 & v=0\\ -\frac{\Gamma(v)}{\pi}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^v & v\neq0\end{cases}$

$J_v(x)\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\qquad x>>1$

$N_v(x)\to\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin(x-\frac{v\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$

$\int_0^a r\cdot J_v(\frac{X_{vn'}\cdot r}{a})\cdot J_v(\frac{X_{vn}\cdot r}{a})dr=\frac{1}{2}a^2[J_{v+1}(X_{vn})]^2\cdot\delta_{nn'}$

$g(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{vn}\cdot J_v(X_{vn}\cdot\frac{r}{a})$

$a_n=\frac{2}{a^2[J_{v+1}(X_{vn})]^2}\int_0^a r\cdot g(r)\cdot J_v(X_{vn}\cdot\frac{r}{a})dr$

$g(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}J_m(k_{mn}r)\cdot[a_{mn}\sin(m\varphi)+b_{mn}\cos(m\varphi)]$

$a_{mn}=\frac{2}{\pi a^2[J_m+1(k_{mna})]^2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a dr[r\cdot g(r,\varphi)\cdot J_m(k_{mn}r)\sin(m\varphi)]$

$b_{mn}=\frac{2}{\pi a^2[J_m+1(k_{mna})]^2}\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a dr[r\cdot g(r,\varphi)\cdot J_m(k_{mn}r)\cos(m\varphi)]$

זהויות וקטוריות

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{C}\times\vec{B})\times\vec{A}=\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})+\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{A})+\vec{C}\times(\vec{A}\times\vec{B})=0$

$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D})=(\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot(\vec{C}\cdot\vec{D})-(\vec{B}\cdot\vec{C})\cdot(\vec{A}\cdot\vec{D})$

זהויות של האופרטור ∇

$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{A})=f(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$

$\vec{\nabla}\times(f\vec{A})=f(\vec{\nabla}\times\vec{A})+\vec{\nabla}f\times\vec{A}$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})-\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$

$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rA_r)+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r}+\left(\frac{\partial A_z}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial z}\right)\hat{\varphi}+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right)\hat{z}$

$\vec{\nabla}f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\varphi}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\theta)-\frac{1}{r\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$

$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\frac{1}{r\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{r}-\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{1}{r\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\hat{\theta}$

$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\hat{\varphi}$

המרת קורדינטות:

$\hat{r}=\cos(\varphi)\sin(\theta)\hat{x}+\sin(\varphi)\sin(\theta)\hat{y}+\cos(\theta)\hat{z}$

$\hat{\theta}=\cos(\varphi)\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{y}-\sin(\theta)\hat{z}$

$\hat{\varphi}=-\sin(\varphi)\hat{x}+\cos(\varphi)\hat{y}$

$\hat{x}=\cos(\varphi)\sin(\theta)\hat{r}+\cos(\varphi)\cos(\theta)\hat{\theta}-\sin(\varphi)\hat{\varphi}$

$\hat{y}=\sin(\varphi)\sin(\theta)\hat{r}+\sin(\varphi)\cos(\theta)\hat{\theta}+\cos(\varphi)\hat{\varphi}$

$\hat{z}=\cos(\theta)\hat{r}-\sin(\theta)\hat{\theta}$

$\hat{\theta}=\hat{\varphi}\times\hat{r},\ \hat{r}=\hat{\theta}\times\hat{\varphi},\ \hat{\varphi}=\hat{r}\times\hat{\theta}$