מונחים

צבר מיקרוקאנוני אוסף מערכות מבודדות אם כמות חלקיקים קבועה ואותה האנרגיה.

מספר המצבים $\Omega(E)$ מספר מצבי המערכת עבור אנרגיה מסוימת

הנחה ארגודית בשווי משקל ההסתברות למצוא את המערכת בכל אחד מן המצבים שווה.

הגדרת האנטרופיה - $S=k_B\ln\Omega$

צבר קאנוני אוסף מערכות מבודדות אם כמות חלקיקים קבועה, הנמצאות בשווי משקל טרמי.

פונקצית החלוקה Z $Z=\sum_r e^{-\beta E_r}$ $\quad \beta=\frac{1}{k_BT}$

אם המערכת מורכבת מ-N חלקיקים בלתי-תלויים (שונים)

אזי פונקצית החלוקה הכוללת $Z_N=\prod_{i=1}^{N}Z_i$ ו- $E_N=\sum_{i=1}^{N}E_i$

הסתברות למצב r $P(r)=\frac{e^{-\beta E_r}}{Z}$

חישוב גדלים מקרוסקופיים $\bar X=\sum_r X_r P(r)$

אנרגיה ממוצעת $\bar E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$

אנרגיה חופשית ממוצעת $\bar F=-k_BT\ln Z$

לחץ ממוצע $\bar P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N}$

אנטרופיה ממוצעת $\bar S=-k_B\sum_r P(r)\ln P(r)=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V,N}$

צבר גרנד-קאנוני אוסף מערכות הנמצאות בש"מ טרמי ודיפוסי.

פונקצית חלוקה גרנד-קנונית $Z_G=\sum_r e^{\beta(N_r\mu-\varepsilon_r)}$

הסתברות למצב $P(r)=\frac{e^{\beta(N_r\mu-\varepsilon_r)}}{Z_G}$

מספר חלקיקים ממוצע $\bar N=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln Z_G$

אנרגיה ממוצעת $\bar E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_G+\mu\bar N$

גרנד פוטנציאל $\Omega=F-\mu N=-PV=-k_BT\ln Z_G$

צפיפות מצבים/ניוון

ניוון/צפיפות מצבים $g(\varepsilon)=\sum_r\delta\left(\varepsilon-\varepsilon_r\right)$

מרחק ממוצע בין רמות אנרגיה $\Delta=\frac{1}{\bar g(\varepsilon)}$

קירוב פונקצית החלוקה $Z=\int g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}d\varepsilon \quad k_BT\gg\Delta$

צפיפות מצבים במודל חלקיק בקופסא (ללא ספין):

חד-מימדי $\bar g(\varepsilon)=\frac{L}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon}} \quad \varepsilon>0$

דו-מימדי $\bar g(\varepsilon)=\frac{mA}{2\pi\hbar^2}$

תלת-מימדי $\bar g(\varepsilon)=\frac{V(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\sqrt{\varepsilon}$

נפח כדור N מימדי $\mathrm{N}(\varepsilon)=\frac{1}{2^N}\cdot\frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(1+N/2)}R^N$

פראדוקס בולצמאן $Z_N=\frac{1}{N!}Z_1^N$

פ' חלוקה קנונית לגז אידיאלי $Z_1=V\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2}$

פ' חלוקה גרנד קנונית לגז אידיאלי $Z_G=\exp\left(e^{\beta\mu}\cdot Z_1\right)$

מודל דבאי

$E=|\bar p|c=\hbar\omega$ + תדירות ω_D מעליה אין מודים.

צפיפות המצבים חד-מימדי $\bar g(\omega)=\frac{3L}{\pi c}$

דו-מימדי $\bar g(\omega)=\frac{3A\omega}{2\pi c^2}$

תלת-מימדי $\bar g(\omega)=\frac{3V\omega^2}{2\pi^2c^3}$

n מימדי $\bar g(\omega)=3Nn\frac{\omega^{n-1}}{\omega_D^n}$

מציאת ω_D $3N=\int_0^{\omega_D}\bar g(\omega)d\omega$

אנרגית גביש $\bar E=\int_0^{\omega_D}\bar g(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega$

קרינת גוף שחור

צפיפות מצבים של קרינה חד-מימדי $\bar g(\omega)=\frac{2L}{\pi c}$ דו-מימד $\bar g(\omega)=\frac{A\omega}{\pi c^2}$ תלת-מימדי $\bar g(\omega)=\frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}$

מספר פוטונים $\bar N=\int\bar g(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}$ **קרינת גוף שחור** $\sigma=\frac{\pi^2k_B^4}{60\hbar^2c^2}$ $\bar U=4\sigma V\frac{T^4}{c}$ **לחץ של קרינה** $P=\frac{1}{3}\bar u$

עזרים מתמטיים

קירוב סטירלינג $\ln N!=N\ln N-N+\frac{1}{2}\ln(2\pi N)$ $\quad N!=\left(\frac{N}{e}\right)^N$

אינטגרלים שימושיים $\int\frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}=-\frac{1}{\beta}\ln\left[e^{\beta(\mu-\varepsilon)}+1\right]$ $\quad \int\frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}=\frac{1}{\beta}\ln\left[1-e^{\beta(\mu-\varepsilon)}\right]$ $\quad \int_0^\infty x^ne^{-ax}dx=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$

גזים קוונטיים

הגבול הקלאסי $e^{\beta(\varepsilon-\mu)} \gg 1$

n חלקיקים ב-m מצבים שונים $\Omega = m^n$ בוזונים $\Omega = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$ פרמיונים $\Omega = \left(\frac{m!}{n!(m-n)!}\right)$

פ' חלוקה פר מצב קוונטי בוזונים $Z_{G,r} = \left(1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_r)}\right)^{-1}$ פרמיונים $Z_{G,r} = 1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_r)}$

כאשר r מצב קוונטי מוגדר ויחיד

מספר חלקיקים במצב קוונטי בוזונים $n_{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}-1}$ פרמיונים $n_{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_r-\mu)}+1}$

מספר חלקיקים $\bar{N} = \int \bar{g}(\varepsilon) n_{BE/FD}(\varepsilon-\mu)\,d\varepsilon$ **אנרגיה ממוצעת** $\bar{E} = \int \bar{g}(\varepsilon)\cdot\varepsilon\cdot n_{BE/FD}(\varepsilon-\mu)\,d\varepsilon$

גרנד פוטנציאל $\Omega = -\int f(\varepsilon) n_{BE/FD}(\varepsilon-\mu)\,d\varepsilon$ כאשר $f(\omega) = \int \bar{g}(\omega)\,d\omega$

לחץ $P = -\Omega/V$ **אנטרופיה** $S = -\left(\frac{\partial\Omega}{\partial T}\right)_V$

תנאי לעיבוי בוזה-איינשטיין קיום $T \neq 0$ שעבורו האינטגרל $\bar{N} = \int \bar{g}(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}$ מתכנס

בטמפרטורות נמוכות $n_{FD}(\varepsilon-\mu) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \to 1$ **מציאת אנרגיית פרמי** $N = \int_0^{\varepsilon_f} \bar{g}(\varepsilon)\,d\varepsilon$

אנרגיית פרמי של חלקיק בתיבה חד-מימדי $\varepsilon_f = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{L}\right)^2$ דו-מימדי $\varepsilon_f = \frac{\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{A}\right)$ תלת-מימדי $\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$

אנרגית פרמיונים ($T=0$) $U_0 = \int_0^{\varepsilon_f} \bar{g}(\varepsilon)\varepsilon\cdot d\varepsilon$

קירוב סומרפלד

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(\varepsilon) n_{FD}(\varepsilon-\mu)\,d\varepsilon = \int_{-\infty}^{\mu} H(\varepsilon)\,d\varepsilon + \tfrac{\pi^2}{6}(k_B T)^2 H'(\mu) + ..$$

כאשר ע"י קירוב גבול האינטגרציה מתקבל $\int_0^{\mu} H(\varepsilon)\,d\varepsilon \approx \int_0^{\varepsilon_f} H(\varepsilon)\,d\varepsilon + (\mu-\varepsilon_f)H(\varepsilon_f) + ..$

פוטנציאלים תרמודינמיים

תכונות

1) פונקציות אקסטנסיביות

2) פונקציות הומוגניות (במשתנים אקסטנסיביים)

האנטרופיה $dQ = TdS$

משוואות אוילר

אנרגיה פנימית $U = TS - PV + \mu_i N_i$

פוטנציאל הלמהולץ $F = U - ST = -PV + \mu_i N_i$

פוטנציאל גיבס $G = F + PV = \mu_i N_i$

המשתנים הטבעיים

אנרגיה פנימית $dU = TdS - PdV$

פוטנציאל הלמהולץ $dF = -SdT - PdV$

פוטנציאל גיבס $dG = -SdT + VdP$

תנאי לשווי מישקל כאשר המשתנים הטיבעיים קבועים הפוטנציאל התרמודינמי המתאים מקבל מינימום, כלומר $dX = 0$

הפוטנציאל הכימי $\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial N_i}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N_i}\right)_{T,V} = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N_i}\right)_{U,V}$

קיבול חום $C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ $C_X = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_X$

תכונות $C_P - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$

יחסים תרמודינמיים

$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P$ $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$

$P = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ $V = \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$

יחסי מקסוואל

$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V$ $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P$

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$ $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$

$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial S}{\partial N_i}\right)_{T,V}$ $\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial N_i}\right)_{T,P}$

$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)_{S,P}$ $\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial N_i}\right)_{T,P}$

$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial N_i}\right)_{S,V}$ $\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial P}{\partial N_i}\right)_{T,V}$

משוואת האנרגיה $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$