**דף נוסחאות**

**אופטיקה 114210**

מורן אסיף    אביב תשס"ח

## משוואות מקסוול

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{D}=4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\bullet\vec{B}=0$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

## משוואות הגלים

$$\nabla^2\vec{E}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0$$

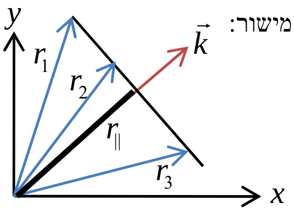
$$\nabla^2\vec{B}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=0$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

מהירות פאזה:

$$V=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{c}{n}$$

פתרונן יהיה: $\vec{E}=\hat{x}E_0\cos(kz-\omega t)$ , גל זה נקרא מישורי מפני ש-$\vec{k}\cdot\vec{r}$ הוא ההיטל של וקטור המקום על $\vec{k}$ ולכן עבור וקטורים שונים נקבל את אותו ההיטל ונקבל מישור:




זהו גל מישורי מקוטב ליניארית שניתן לכתיבה

גם כ: $\vec{E}=\vec{E}_0e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

כאשר $\vec{B}=\vec{B}_0e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$

ומתקיים: $\vec{B}\perp\vec{k}\ ,\ \vec{E}\perp\vec{k}$

$$\vec{B}=\frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}\qquad |B|=\sqrt{\mu\varepsilon}\,|E|$$

וקטור פוינטינג:

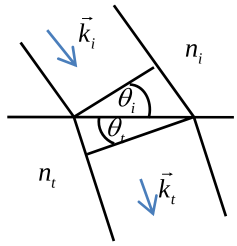
$$\vec{S}_{\text{vaccuum}}=c^2\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\left[\frac{energy}{area\times time}\right]$$

$$\vec{S}_{\text{interface}}=v^2\varepsilon\vec{E}\times\vec{B}\left[\frac{energy}{area\times time}\right]$$

ועוצמת האור היא:

$$I=\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle=\begin{cases}\frac{1}{2}c\varepsilon_0E_0^2\\ \frac{1}{2}v\varepsilon E_0^2\end{cases}$$

## שבירה והחזרה

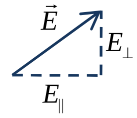



חוק ההחזרה:

$$\theta_i=\theta_r$$

חוק סנל לשבירה: $n_i\sin(\theta_i)=n_t\sin(\theta_t)$

במעבר בתווך




$E_\parallel, D_\perp, B_\perp H_\parallel$

רציפים כאשר

## גלים אלקטרומגנטיים בתווך הומוגני איזוטרופי

עבור המעבר בתווך:

$$\omega_i=\omega_r=\omega_t$$

$$\vec{k}_i\cdot\vec{r}=\vec{k}_r\cdot\vec{r}=\vec{k}_t\cdot\vec{r}$$

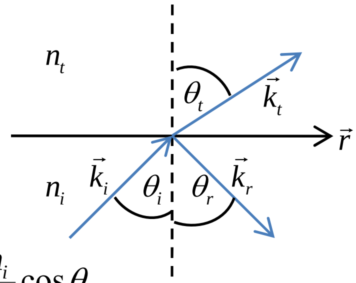
$$\frac{k_t}{k_i}=\frac{\lambda_i}{\lambda_t}=\frac{n_t}{n_i}$$

נרצה לדעת כמה מהקרן עבר את התווך וכמה חזר, נחלק את הבעיה למספר אפשרויות. האפשרות הראשונה היא שהשדה החשמלי מאונך למישור הגל. (זהו מישור הדף) נגדיר את $r_\perp$ בתור מקדם ההחזרה כאשר:

$$r_\perp\equiv\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i-\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t}{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i+\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t}$$

כמו כן נגדיר את מקדם ההעברה:

$$t_\perp\equiv\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i}{\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i+\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_t}$$




במקרה השני השדה החשמלי מקביל למישור הגל ואז נקבל:

$$r_\parallel\equiv\frac{E_{r0}}{E_{i0}}=\frac{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_i-\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_t}{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_i+\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_t}$$

$$t_\parallel\equiv\frac{E_{t0}}{E_{i0}}=\frac{2\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_i}{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_i+\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_t}$$

*כדאי לציין שאין קשר בין החלקים המקבילים והניצבים של חלק זה לחלקים של שבירה והחזרה.
כמו כן, הנחנו שהשדה המקביל חוזר בכיוון הפוך לכיוון ממנו הוא בא

אם נרצה לדעת כמה מהאנרגיה עברה או הוחזרה מהתווך נשתמש ב:

$$R=\left(\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\right)^2=r^2\qquad T=\frac{n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i}\left(\frac{E_{t0}}{E_{t0}}\right)^2=\frac{n_t\cos\theta_t}{n_i\cos\theta_i}t^2$$

## זווית ברוסטר

נרצה למצוא את הזווית שעבורה אין החזרה של האור, כאשר החומר לא מגנטי $(\mu=1)$ ונקבל:

$$r_\parallel=\frac{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_i-\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_t}{\frac{n_t}{\mu_t}\cos\theta_i+\frac{n_i}{\mu_i}\cos\theta_t}=0$$

$$\tan\theta_i=\tan\theta_B=\frac{n_t}{n_i}$$

כמו כן מתקיים: $\theta_t+\theta_B=90°$

## החזרה פנימית מלאה

כאשר $n_i>n_t$ ניתן לקבל לפי חוק סנל שסינוס זווית ההעברה גדול מ-1 עבור זוויות כניסה שגדולות מזווית קריטית. זווית זו נתונה על ידי $\theta_t=90°$ אם זווית הכניסה היא בדיוק הזווית הקריטית נקבל $\sin\theta_{critical}=\frac{n_t}{n_i}$. עבור זוויות שגדולות מהזווית הקריטית, הגל העובר איננו גל מישורי אלא "גל נעלם" מהצורה $\vec{E}_t=\vec{E}_{t0}e^{ik_t\sin\theta_tx}e^{-\beta z}e^{i\omega t}$, ניתן לראות שזהו גל מישורי רגיל שדועך בציר $z$ כאשר $\beta=k_t\sqrt{\sin^2\theta_t-1}$

Skin depth מוגדר בתור המרחק שבו עוצמת הגל יורדת ל-$\frac{1}{e}$ מערכה ההתחלתי, הגדרה זו נכונה גם לחומרים שבהם יש דעיכה כלומר

$$S.D.=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\operatorname{Im}\{k\}}$$

## זהויות וקטוריות

$$a\cdot(b\times c)=b\cdot(c\times a)=c\cdot(a\times b)$$

$$a\times(b\times c)=(a\cdot c)b-(a\cdot b)c$$

$$\nabla\times(\nabla\times a)=\nabla(\nabla\cdot a)-\nabla^2a$$

$$\nabla\cdot(a\times b)=b\cdot(\nabla\times a)-a\cdot(\nabla\times b)$$

$$\nabla\times(a\times b)=a(\nabla\cdot b)-b(\nabla\cdot a)+(b\cdot\nabla)a-(a\cdot\nabla)b$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times a)=0$$

$$\nabla\times\nabla\psi=0$$

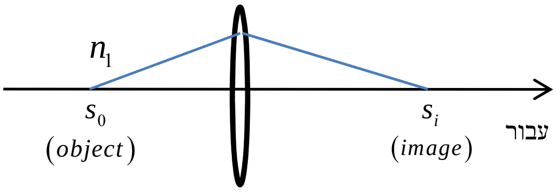
## טורי טיילור

$$\frac{1}{1-x}\approx1+x+x^2+\ldots\qquad \sin(x)\approx x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots$$

$$\frac{1}{1+x}\approx1-x+x^2-\ldots\qquad \cos(x)\approx1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots$$

$$\sqrt{1+x}\approx1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\ldots\qquad \sqrt{1-x}\approx1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\ldots$$

## עדשות דקות




נרצה למצוא את היחס בין $s_0$ ל- $s_i$ . לשם כך נפצל את העדשה לשני חלקים, החצי הקמור והחצי הקעור. נאמר שמי שנמצא בתוך העדשה חושב שהקרן באה מ- $v$. העדשה עשויה מחומר בעל מקדם שבירה $n_2$ . עבור המעבר בתוך הראשון נקבל: $-\frac{n_2}{v}+\frac{n_1}{s_0}=\frac{n_1-n_2}{R_1}$ כאשר $R_1$ הוא הרדיוס של המשטח. עבור המשטח השני נקבל: $-\frac{n_1}{s_i}+\frac{n_2}{v}=\frac{n_2-n_1}{R_2}$

כאשר הרדיוס של המשטח יהיה חיובי אם הוא מהצורה ' ( ' ושלילי אם הוא מהצורה ' ) '. נשלב את שתי המשוואות ונקבל את משוואת העדשה הדקה:

$$-\frac{1}{s_0}+\frac{1}{s_i}=\left(\frac{n_2}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\equiv\frac{1}{f}$$

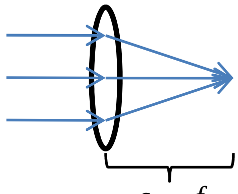
כאשר שמים שתי עדשות, אחת צמודה לשנייה:

$$\frac{1}{f_{eq}}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

בתור כלל אצבע ניתן לומר שאם העדשה הכי עבה במרכזה אז היא נקראת "עדשה מרכזת" ו- $f>0$, אם כלל זה לא מתקיים העדשה נקראת "עדשה מפזרת" ו- $f<0$ .

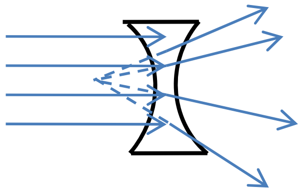
<u>עדשה מרכזת:</u> התמונה אמיתית, כלומר אפשר לשים אותה על מסך. מסומנות סכמטית כ- $\updownarrow$

$$s_0=-\infty\Rightarrow -\frac{1}{(-\infty)}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$




<u>עדשה מפזרת:</u> התמונה שרואה מי שנמצא מימין לעדשה לא אמיתית (וירטואלית), בגלל שאם נשים מסך בנקודה שבה הקרניים לכאורה מתרכזות, לא נראה תמונה

$$s_i=\infty\Rightarrow -\frac{1}{s_0}+\frac{1}{\infty}=\frac{1}{f}$$

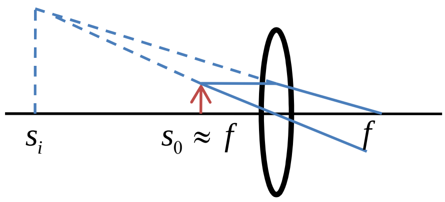


<u>מעבר קרניים בעדשה:</u> כל הקרניים המקבילות בצד אחד של העדשה הולכות לאותה נקודה במישור המוקד (זהו המישור שמרחקו מהעדשה הוא $f$ ). כמו כן, הקרן שעוברת דרך מרכז העדשה ממשיכה בקו ישר, לכן גם אפשר לדעת שקרניים מקבילות שמגיעות במאונך לעדשה יתכנסו לנקודת המוקד, וגם להפך – כל הקרניים שעוברות דרך נקודת המוקד בצד אחד של העדשה ימשיכו במקביל לציר בצד השני.

## זכוכית מגדלת

התמונה היא וירטואלית

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}+\frac{1}{s_0}$$

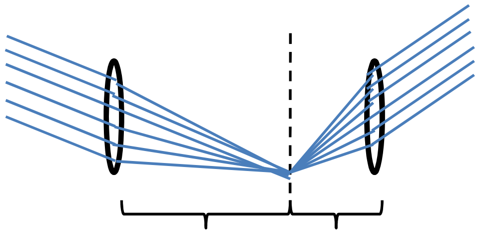



נקבל:

$$\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}+\frac{1}{-f+\varepsilon}\approx-\frac{\varepsilon}{f^2}\Rightarrow s_0\approx-\frac{f^2}{\varepsilon}$$

כלומר כאשר מסתכלים על גוף קטן שנמצא במרחק קטן מאוד מהמוקד, אפשר להגדיל את התמונה לאינסוף. ההגדלה היא: $M=\frac{s_i}{s_0}$ . ניתן לראות שאנו מקבלים $M>0$ כלומר התמונה נראית כלפי מעלה. אם $M<0$ נקבל תמונה הפוכה.

## טלסקופ



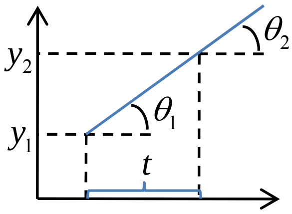

נאמר שזווית הכניסה היא $\alpha$ וזווית היציאה היא $\beta$ , נקבל ש- $\beta>\alpha$ , כלומר הכוכב שנראה כאילו נמצא באינסוף יראה גדול יותר. אפקט זה מושג באמצעות שתי עדשות דקות כך שמתקיים $f_1>f_2$ .

מתקבלת הגדלה זוויתית: $MP=\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{f_1}{f_2}$ . בגלל ש- $MP<0$ (שתי העדשות מרכזות) נקבל תמונה הפוכה. אם נרצה זווית צפייה מקסימאלית נשים את העין בנקודה בה העדשה השנייה מראה את תמונת העדשה הראשונה, כלומר ב:

$$-\frac{1}{-f_1-f_2}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f_2}\Rightarrow d=\frac{f_2}{f_1}\left(f_1+f_2\right)$$

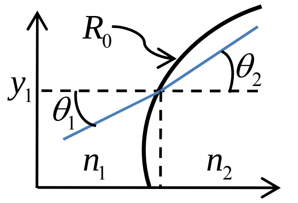
## פורמליזם מטריצי של זוויות קטנות

<u>מטריצת מעבר:</u>



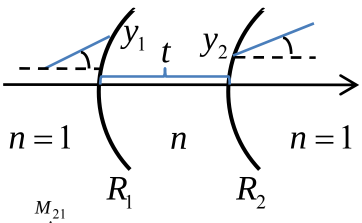

$$\begin{pmatrix}y_2\\n\theta_2\end{pmatrix}=\overbrace{\begin{pmatrix}1&\frac{t}{n}\\0&1\end{pmatrix}}^{T}\begin{pmatrix}y_1\\n\theta_1\end{pmatrix}$$

<u>מטריצת שבירה של משטח כדורי:</u>




$$\begin{pmatrix}y_2\\n_2\theta_2\end{pmatrix}=\overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\\frac{n_1-n_2}{R_0}&1\end{pmatrix}}^{R}\begin{pmatrix}y_1\\n_1\theta_1\end{pmatrix}$$

<u>מטריצת עדשה:</u>




$$\begin{pmatrix}y_2\\n_2\theta_2\end{pmatrix}=\overbrace{\begin{pmatrix}1-\frac{t}{R_1}\frac{n-1}{n}&\frac{t}{n}\\(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)-t\frac{(n-1)^2}{nR_1R_2}&1+\frac{t}{R_2}\frac{n-1}{n}\end{pmatrix}}^{M_{21}}\begin{pmatrix}y_1\\n_1\theta_1\end{pmatrix}$$

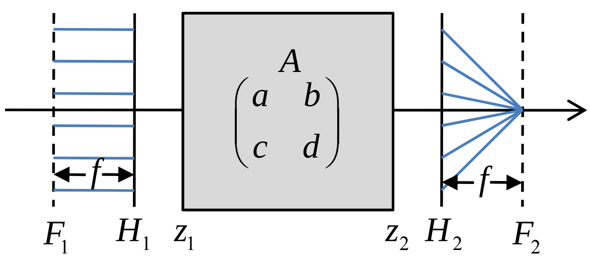
בעדשה דקה $t=0$ ונקבל:

$$M_{21}=\begin{pmatrix}1&0\\(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)&1\end{pmatrix}$$

משוואת ניוטון:

$$\left(-f-s_0\right)\left(s_i-f\right)=f^2$$

כדי להשתמש במטריצות אלה נסתכל על מערכת כללית (שנמצאת בין $z_1$ לבין $z_2$ ) שמכילה עדשות, שבירות ומעברים בתור קופסא שחורה. נדמה את פעולת המערכת (המתוארת על ידי המטריצה A) לפעולה של עדשה דקה, כאשר $H_1$ ו- $H_2$ מבטאים את ההתחלה והסוף של העדשה. לאחר פתרון של הבעיה נקבל את המשוואות שמשמאל. שתי המשוואות הראשונות הן של "נקודות עיקריות", השתיים הנוספות הן "נקודות פוקוס" ו- $M$ היא ההגדלה.




$$H_1=z_1+s_{0p}=z_1+\frac{d-1}{c}$$

$$H_2=z_2+s_{ip}=z_2+\frac{1-a}{c}$$

$$F_1=z_1+s_0=z_1+\frac{d}{c}=H_1-f$$

$$F_2=z_2+s_i=z_2-\frac{a}{c}=H_2+f$$

$$M=a+s_ic=\frac{s_i-s_{ip}}{s_0-s_{0p}}$$

$$\frac{1}{M}=d-cs_0$$

$$f_{eff}=-\frac{1}{c}$$

## קיטוב

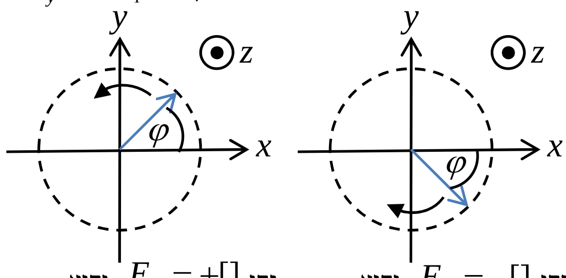
לינארי: $\vec{E}_1=\hat{x}E_1e^{i(kz-\omega t)}$  $\vec{E}_2=\hat{y}E_2e^{i(kz-\omega t)}$

אם $E_1$ ו- $E_2$ ממשיים אז גם $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$ מקוטב לינארית. קיטוב זה נקרא לינארי כי השדה גדל וקטן לאורך ציר אחד קבוע.

מעגלי: אם מתקיים $|E_1|=|E_2|$ וגם $E_2=e^{\pm i\frac{\pi}{2}}E_1$ אז $\vec{E}$ מקוטב מעגלית: $\vec{E}=E_1(\hat{x}\pm i\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}$

או: $E_x=E_1\cos(kz-\omega t)=E_1\cos\varphi$

$E_y=\mp E_1\sin\varphi$




זהו $E_y=-[]$ וזהו קיטוב בסיבוב ימני.

זהו $E_y=+[]$ וזהו קיטוב בסיבוב שמאלי.

כדי לדעת לאן מתקדם הגל, נגדיל את t ונראה איך צריך לשנות את z כך שהאקספוננט יישאר קבוע. בדוגמא הנ"ל, אם מגדילים את t צריך גם להגדיל את z ולכן הגל מתקדם "אל מחוץ לדף".

הגל הימני מסתובב נגד כיוון השעון בזמן (כי $\varphi$ קטן), אבל מסתובב עם כיוון השעון בציר $z$ (כי $\varphi$ גדל).

חיבור של שני גלים מקוטבים מעגלית יכול לתת גל מקוטב לינארית אם הכיוונים מתאימים, לדוגמא אם ניקח $\vec{E}_+=E_1(\hat{x}+i\hat{y})e^{i\varphi}$ ו- $\vec{E}_-=E_1(\hat{x}-i\hat{y})e^{i\varphi}$ אז $\vec{E}=\vec{E}_++\vec{E}_-$ מקוטב לינארית

*פוטונים הם ביטוי של אור מקוטב מעגלית

אליפטי: מתקבל כאשר הפאזה היא מעגלית אבל הגודל של שני השדות שונה: $\vec{E}=E_1(\hat{x}\pm ib\hat{y})e^{i(kz-\omega t)}$

## פיתוח פורייה

ניתן לבטא כל פונקציה מחזורית (יפה מספיק) עם אורך גל $\lambda_0$ בתור סכום של סינוסים וקוסינוסים בעלי אורך גל של $\frac{\lambda_0}{n}$ כאשר $n$ הוא מספר שלם בצורה הבאה:

$$f(x)=\frac{1}{2}A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nk_0x)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nk_0x)$$

ניתן לכתוב זאת גם בתור: $$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_ne^{ink_0x}$$

אם נשווה בין שני הפיתוחים נקבל: $F_n=\frac{1}{2}(A_n-iB_n)$ , $F_{-n}=\frac{1}{2}(A_n+iB_n)$

נניח שהפונקציה היא ממשית, מכך נובע שגם המקדמים ממשיים, לכן מקבלים ש- $F_n=F^*_{-n}$. כלומר מספיק לדעת רק חצי מהם. נשאר ש- $\mathrm{Im}\{F_n\}\leftrightarrow-\frac{1}{2}B_n$ , $\mathrm{Re}\{F_n\}\leftrightarrow\frac{1}{2}A_n$

*פונקציה זוגית: $F_n=F_{-n}=\frac{1}{2}A_n$

*פונקציה זוגית ממשית: $F_n=F^*_{-n}=F_{-n}$

*פונקציה אי זוגית: $F_n=-F_{-n}=-\frac{1}{2}iB_n$

*פונקציה אי זוגית ממשית: $F_n=-F^*_{-n}=-F_n$

את המקדמים מוצאים לפי: $F_n=\frac{1}{\lambda_0}\int_{-\frac{\lambda_0}{2}}^{\frac{\lambda_0}{2}}f(x)e^{-ink_0x}dx$

## התקדמות גלים בתווך לא איזוטרופי

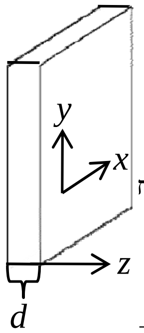
בניגוד לחומר איזוטרופי, נאמר שבכל כיוון בחומר יש מקדם דיאלקטרי שונה ולכן נקבל ש: $D_x=\varepsilon_xE_x$ $D_y=\varepsilon_yE_y$ $D_z=\varepsilon_zE_z$ , לאחר פתרון משוואות מקסוול בתנאים של חוסר מטען וזרם נקבל $\vec{H}\perp\vec{E}$ , $\vec{H}\perp\vec{k}$ , $\vec{D}\perp\vec{H}$ , $\vec{D}\perp\vec{k}$

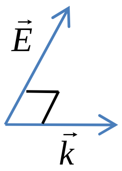
משטח רבע גל:

השדה מקוטב לינארית והוא מגיע למשטח כשהוא יוצר זווית של 45° עם שני הצירים. בכל ציר יש מקדם שונה ולכן נקבל:

$$\vec{E}=E_0e^{i(n_xk_0z-\omega t)}\left[\hat{x}+\hat{y}e^{i(n_y-n_x)k_0z}\right]$$

לכן אם נבחר $(n_y-n_x)k_0d=\frac{\pi}{2}$ נקבל ביציאה מהמשטח גל מקוטב מעגלית.




משטח חצי גל:

אם השדה מגיע בזווית כללית $\theta$ הגל המתקבל הוא $\vec{E}=E_0e^{i(n_xk_0z-\omega t)}\left[\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}e^{i(n_y-n_x)k_0z}\right]$ ואם נבחר $(n_y-n_x)k_0d=\pi$

נקבל ביציאה מהמשטח גל מקוטב לינארית בכיוון $\cos\theta\hat{x}-\sin\theta\hat{y}$ , כלומר קיטוב הגל סובב בזווית של $2\theta$. ניתן להשתמש בלוח כדי לסובב את הקיטוב בכל זווית על ידי מיקום ציר $x$ של המשטח באמצע הזווית בין כיוון הקיטוב הנכון לכיוון הקיטוב הרצוי.

אותו משטח יכול לתפקד גם כמשטח חצי גל וגם כרבע גל, כתלות באורך הגל.

## פעימות ומהירות חבורה

אם ניקח שני גלים מישוריים באותו כיוון עם פאזות שונות $\varphi_1$ ו- $\varphi_2$ ונחבר ביניהם, נקבל:

$$\vec{E}=E_o\hat{x}2\cos\left[\frac{(k_1-k_2)z-(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t}{2}\right]$$

נוכל לכתוב זאת גם כך:

$$\vec{E}=E_o\hat{x}2\underbrace{\cos[\Delta kz-\Delta\omega t]}_{low\ frequency}\underbrace{\cos[\bar{k}z-\bar{\omega}t]}_{high\ frequency}$$

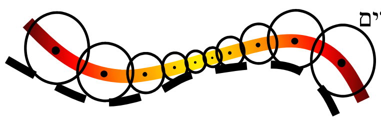
$v_g$ היא מהירות החבורה והיא המהירות של התדר הנמוך, מהירות זו מוגדרת כ- $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$

$v$ היא מהירות הפאזה והיא המהירות של התדר הגבוה, מהירות זו מוגדרת כ- $\frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$

כאשר שתי הפאזות המקוריות מאוד קרובות זו לזו נקבל $v_g=\frac{d\omega}{dk}$ , $v=\frac{\omega}{k}$

## גלים בתווך לא הומוגני

תווך לא הומוגני הוא תווך שבו $n=n(\vec{r})$. בתווך כזה נזניח אפקטים של קיטוב ונתחשב רק ברכיב אחד של השדה החשמלי (קירוב של גלים סקלאריים).

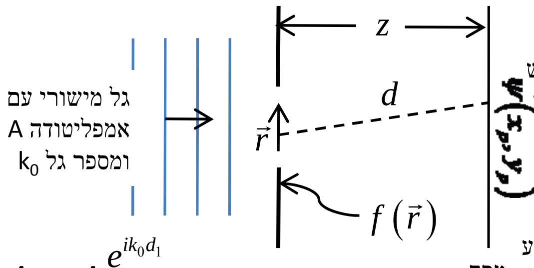


בניית הויגנס: כל נקודה בחזית הגל מפיקה גלים כדוריים שיוצרים חזית גל חדשה. הרדיוסים של הגלים הכדוריים פרופורציוניים ל- $v=\frac{c}{n(\vec{r})}$

כלומר, במקומות שבהם מקדם השבירה קטן יותר – האור ינוע מהר יותר והרדיוס גדול יותר.

עקרון פרמה: האור ינוע בדרך האופטית המינימאלית או המקסימאלית. הדרך האופטית מוגדרת בתור: $OPL\equiv\int_A^B n(s)ds$

## עקיפה




כדי לקבל את תבנית העקיפה נשתמש בבניית הויגנס ונקבל (לאחר שימוש במשוואות מקסוול):

$$\psi=\frac{ik_0A}{2\pi}\int_R d^2rf(\vec{r})\frac{e^{ik_0d}}{d}$$

כאשר הנחנו שהגל הנכנס והגל הפוגע הם מישוריים. עוצמת הגל נתונה על ידי: $I=\frac{1}{2}|\psi|^2=\frac{1}{2}\psi\psi^*$

אם הגל הנכנס הוא כדורי נקבל: $A\to A\frac{e^{ik_0d_1}}{d_1}$

כאשר $d_1$ הוא המרחק בין המוקד למסך.

**התמרת פוריה**

עבור פונקציה לא מחזורית, נשכפל אותה על ציר $x$ ואז ניקח את אורך המחזור לאינסוף ונקבל: $F(k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx$

תכונות:

*הזזת המקור במקום: $f_1(x)=f(x-x_0)$

תגרום לסיבוב בתדר $F_1(k)=e^{ikx_0}F(k)$

*פונקציה זוגית: $F(k)=F(-k)$

*פונקציה זוגית ממשית: $F(k)$ ממשי

*פונקציה אי זוגית: $F(k)=-F(-k)$

*פונקציה אי זוגית ממשית: $F(k)$ מדומה

התמרה הפוכה: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k)e^{ikx}dk$

קונבולוציה: $F(k)*G(k)=2\pi\,\widehat{f(x)g(x)}$

$h(x)=f(x)*g(x)\Rightarrow H(k)=F(k)G(k)$

התמרה דו מימדית:

$$F(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dyf(x,y)e^{-i(xk_x+yk_y)}$$

*אם $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ אז ניתן לכתוב

$F(k_x,k_y)=F_1(k_x)F_2(k_y)$

**עקיפת פראונהופר** (תקפה כאשר מתקיים $\frac{k_0x^2}{z}\ll 1$)

זהו מקרה פרטי של עקיפה שבו המרחק בין המסכה למסך גדול מאוד. לאחר הקירובים המתאימים:

$$\psi(k_x,k_y)=\frac{ik_0A}{2\pi}\frac{e^{ik_0z}}{z}\int dxdyf(x,y)e^{-i(k_xx+k_yy)}\qquad k_x\equiv\frac{k_0x_p}{z},k_y\equiv\frac{k_0y_p}{z}$$

ואם נגדיר את הזוויות $\theta_x=\frac{x_p}{z},\theta_y=\frac{y_p}{z}$ אז $k_x=k_0\theta_x,k_y=k_0\theta_y$ ונקבל:

$\psi(k_x,k_y)=\psi(k_0\theta_x,k_0\theta_y)$ ולכל נקודה על המסך מתאימה זווית מסוימת.

ניתן לראות שלמעשה, <u>תמונת העקיפה המתקבלת היא התמרת פורייה של פונקציית המסכה.</u>

**דוגמאות לעקיפה**

<u>חור מלבני:</u> $f(x,y)=\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y}{b}\right)$: $\psi\propto ab\,\text{sinc}\left(\frac{k_xa}{2}\right)\text{sinc}\left(\frac{k_yb}{2}\right)$

<u>חור עגול:</u> $f(x,y)=\begin{cases}1 & r<R\\ 0 & r>R\end{cases}$: $\psi\propto 2\pi R^2\frac{J_1(kR)}{kR}\quad\left(k\equiv\frac{k_0r_p}{F}\right)$

<u>סריג עם N חריצים:</u> $f(x,y)=\text{rect}\left(\frac{x}{d}\right)*\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-dn)\cdot\text{rect}\left(\frac{x}{Nd}\right)\right]$ :

$$\psi(k_x,k_y)\propto a\,\text{sinc}\left(\frac{k_xa}{2}\right)\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(k_x-\frac{2\pi m}{d}\right)*Nd\,\text{sinc}\left(k_x\frac{Nd}{2}\right)\right]$$

כאשר m הוא סדר העקיפה. בסדר ראשון נקבל נקודות מקסימום מקומיות ב... $\theta=0,\frac{\lambda}{d},\frac{2\lambda}{d}$

עבור $k_x=k_0\theta$

**דוגמאות להתמרות**

*חלון בגובה $H$ ורוחב $h$: $F(k)=Hh\,\text{sinc}\left(\frac{kh}{2}\right)$

*פונקציית דלתא: $f(x)=\delta(x-d)$ עוברת ל: $F(k)=e^{-ikd}$

*רכבת הלמים במקום $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-nd)$

עוברת לרכבת הלמים בתדר: $F(k)=\frac{4}{d}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(k-\frac{2\pi m}{d}\right)$

*גאוסיאן $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$

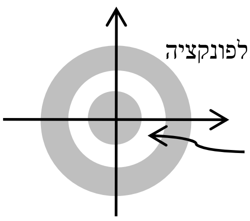
במקום עובר לגאוסיאן בתדר: $F(k)=\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$

כלומר, גאוסיאן רחב במקום עובר לגאוסיאן צר בתדר.

*סכום דלתות: $f(x)=\delta(x+d)+\delta(x-d)$ עובר ל $F(k)=2\cos(kd)$

*הפרש דלתות: $f(x)=\delta(x+d)-\delta(x-d)$ עובר ל $F(k)=2i\sin(kd)$

**פונקציית בסל $J_1$**



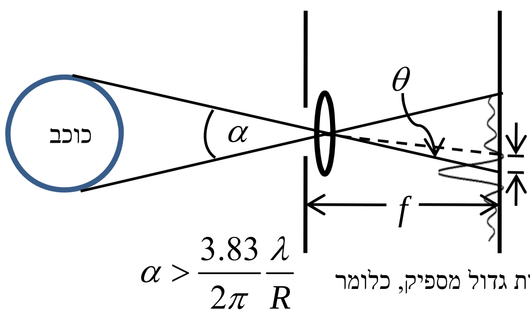
$\frac{J_1(kR)}{(kR)}$ דומה ל-sinc לפונקציה.

זו מספר אפסים שהראשון שבהם הוא ב- $kR=3.83$

צורה זו נקראת תבנית איירי

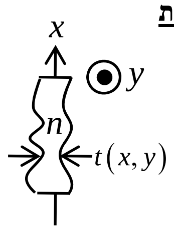
**רזולוציה**

אם מסתכלים על כוכב דרך חור עגול, $\theta$ היא הזווית הקטנה ביותר שאפשר לראות לפי עיקרון ריילי הקובע את ההפרש המינימאלי בין שתי פונקציות איירי כדי שנוכל להבחין $kR=3.83$ ביניהן. (R הוא רדיוס העדשה $\theta=\frac{3.83}{2\pi}\frac{\lambda}{R}$ או רדיוס אישון העין)




לכן, כדי שנוכל לראות את הכוכב הוא צריך להיות גדול מספיק, כלומר $\alpha>\frac{3.83}{2\pi}\frac{\lambda}{R}$

**עקיפה מאובייקט עם מגוון פאזות**

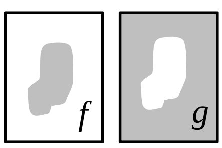



$f(x,y)=e^{ik_0t(x,y)(n-1)}$

כלומר חומר עם מקדם שבירה n ועובי t גורם לעיכוב פאזה של

$\Delta\phi=knt=k\cdot OPL$

**מסכים משלימים**




$g(x,y)=1-f(x,y)$

לאחר חישוב נקבל

$\psi_g=(2\pi)^2\delta(k_x)\delta(k_y)-\psi_f$

עוצמת האור זהה בשני המקרים פרט לנקודה $(0,0)$

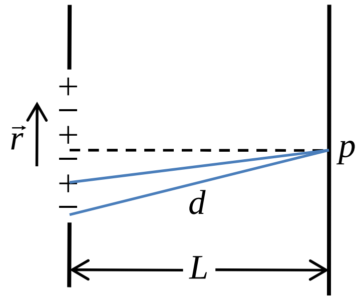
**עקיפת פרנל למסכות קטנות** (תקפה כאשר $\frac{k_0x^2}{z}\geq 1$)

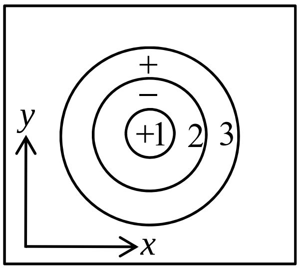
נאמר ש- $r\ll L$ ונקבל: $\psi\approx\frac{ik_0A}{2\pi}\frac{e^{ik_0L}}{L}\int_R d^2rf(\vec{r})e^{i\frac{k_0r^2}{2L}}$. אם למסכה יש סימטריה רדיאלית נגדיר $s=r^2$ ו: $\psi=\frac{ik_0A}{2}\frac{e^{ik_0L}}{L}\int_0^{\infty}dsg(s)e^{i\frac{k_0s}{2L}}$

כאשר $f(\vec{r})=g(r^2)=g(s)$ וקיבלנו ש-$\psi$ היא התמרת פורייה של המסכה (עד כדי גבולות אינטגרציה)

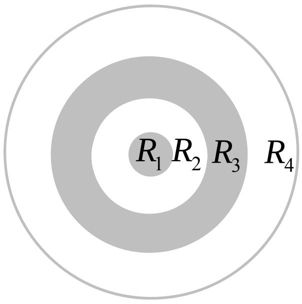
## איזורי פרנל

הקרניים לא עוברות את אותה הדרך ולכן איזורים של – ואיזורים של + לא מגיעים באותה פאזה. בנקודה P נקבל עוצמה חזקה או חלשה בהתאם ליחס בין איזורי ה+ לאיזורי ה- (מספר שווה יביא להתאבכות הורסת, יתרון לאחד הצדדים יביא לעוצמה מסוימת כתלות ביתרון). יש לשים לב שאין כאן מסכה, זהו חור רגיל. כמו כן, העיתון "לאישה" מופיע בשיר "ישנן בנות".




האיזורים 1,2,3 נקראים איזורי פרנל ומתקיים: $r_m=\sqrt{mL\lambda}$



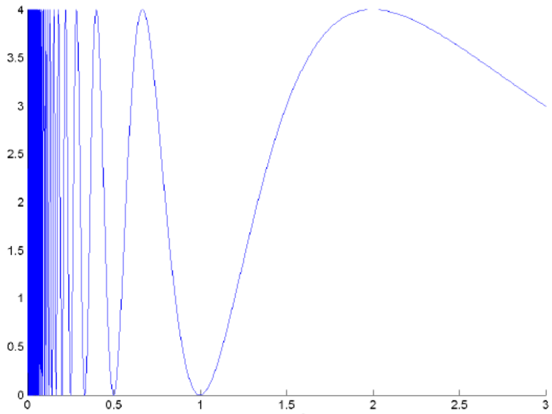

אם נבחר מסכה מהצורה שמשמאל, נוכל למשל להסתיר את איזורי ה+ ולקבל מסכה שלמעשה מתפקדת בתור עדשה ממקדת. לשם כך נבחר $L=f_1$ ואת הרדיוסים של המסכה בתור

$$R_m=\sqrt{mf_1\lambda}=\sqrt{mL\lambda}=r_m$$

אם נבחר $L=\frac{f_1}{n}$ נצטרך לבחור $R_m=r_{n\cdot m}$ כאשר עבור $n$ זוגי נקבל עוצמה 0 ועבור אי זוגי נקבל מיקוד.

## פרנל לעומת פראונהופר

ניתן לראות בגרף שמשמאל את עוצמת האור שמתקבלת על מרכז מסך כפונקציה של מרחק המסך מהמסיכה. כאשר המסך קרוב למסיכה נמצאים בתחום של עקיפת פרנל, ניתן לראות בתחום זה שיש אוסצילציות בין עוצמה נמוכה לגבוהה. כלומר, אם נרחיק את המסך בהדרגה מהמסכה נוכל לראות את האור במרכז מתחזק ונחלש לסירוגין. לאחר שנרחיק את המסך מספיק נעבור לתחום של עקיפת פראונהופר, שם אין אוסצילציות.




## זהויות טריגונומטריות

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin\alpha=$$

$$=2\cos^2\alpha-1=$$

$$=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin(3\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

## מסכות

כאשר יוצרים מסכה, איזורים בהם המסכה מעבירה אור יקבלו את הערך 1 ואיזורים אטומים את הערך 0. לרוב משתמשים בפונקציה $rect\left(\frac{x}{d}\right)$ שמייצגת פונקציית חלון ברוחב כולל d סביב הראשית. ניתן גם לבצע קונבולוציות עם פונקציות דלתא מוזזות מהצורה $\delta(x-a)$ כדי לקבל הזזה של הפונקציה בשיעור a בכיוון החיובי של ציר x. כאשר חלק גורם לעיכוב פאזה $\beta$, מכפילים את האיבר שמייצג אותו ב-$\left(e^{i\beta}-1\right)$.

## עקיפת פרנל ממערכת ליניארית

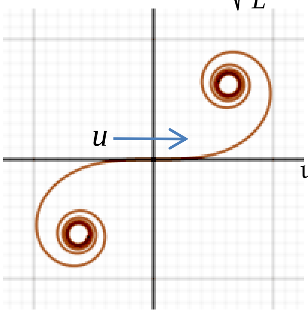
הנוסחה של עקיפת פרנל נכונה עבור נקודה על הציר האופטי. אם נרצה לחשב את העקיפה עבור נקודה שאינה על הציר האופטי, נזיז את הציר האופטי אליה ואז נבצע את האינטגרל ביחס לציר החדש. עבור חריץ אינסופי בכיוון y וסופי בכיוון x נקבל את הפונקציה:

$$g(x,y)=\begin{cases}1 & x_1<x<x_2\\ 0 & else\end{cases}$$

כאשר גבולות החריץ נקבעים לפי הציר האופטי החדש. לכן

$$\psi\propto\int_{-\infty}^{\infty}dxg(x)e^{i\frac{k_0x^2}{2L}}=\int_{x_1}^{x_2}dxe^{i\frac{k_0x^2}{2L}}=\sqrt{\frac{L}{k_0}}\int_{u_1}^{u_2}due^{i\frac{u^2}{2}}$$

כאשר ביצענו את ההחלפה $u=\sqrt{\frac{k_0}{L}}x$. נמצא את פתרון האינטגרל נומרית:




ציר x הוא החלק הממשי של פונקציית העקיפה וציר y הוא החלק המדומה שלה. המשתנה u רץ לאורך המסילה, גודל פונקציית העקיפה הוא למעשה המרחק של הנקודה $u_1$ על הגרף ממרחק הנקודה $u_2$ עליו. הגרף מתכנס לשתי נקודות שהמרחק ביניהן בריבוע פרופורציונאלי לעוצמת האור אם לא היה חריץ. לכן, אם נסתכל על שני חריצים ונרצה לדעת מי מהם נותן עוצמת אור חזקה יותר, נבדוק עבור איזה חריץ המרחק בין שתי הנקודות המתאימות על הגרף גדול יותר.

## טיפים לבחון

*כאשר עובדים עם Ray tracing ורוצים לדעת איפה מקבלים דמות, מוציאים שתי קרניים: אחת במאונך לדמות המקורית ואחת למרכז העדשה הקרובה, בכל מקום בו הקרניים הללו ייפגשו, נקבל דמות.

*כאשר יש מסכה במישור המוקד של עדשה והיא מוארת על ידי גל מישורי, התמרת פוריה של המסכה תתקבל במישור המוקד מצדה השני של העדשה.

*פונקציית ההעברה (עבור עקיפה) של עוצמת גל נתונה היא שורש העוצמה.

*כאשר מחשבים אינטגרלים של עקיפה ומקבלים $e^{i\cdot\infty}$, ניתן להגיד שזה אפס, לפי חוק המסכים המשלימים.

*אם נפלת על מבחן ממש קשה ולא הולך לך, הצץ אל הנבחן שמימינך, אם שמו בישראל איננו יונתן רוזמרין, גם הוא לא מצליח משהו ☺