מכאניקה אנליטית

עמרי סנדיק – 2007

מבוסס על הרצאותיו של עדי נסר, תרגוליו של אורן רז וספרו של landau lifshitz

תוכן עניינים

רשימת איורים

רשימת טבלאות

1. הקדמה – מבואות והגדרות

1.1 מעט תזכורות מפיסיקה 1מ'\2מ'

1.1.1 הקדמה

מטרת הקורס היא להציג פורמליזם מתמטי שמאפשר לתקוף בעיות פיזיקליות ללא שיקולי כוחות אלא מתוך שיקולי אנרגיה. לכן בגדול ניתן לשים בצד את משוואת ניוטון ומשוואות התנועה. מן הסתם עדיין צריך לדעת להביט בבעיה פיזיקלית ולכתוב את מערך האנרגיות הקיים בבעיה וכד'. בעיות בנושא גוף קשיח, תנודות הרמוניות וכד' ייפתרו מאוד באלגנטיות

1.1.2 קינמיטקה

כמה נק' ששוות אזכור –

- הקשר שבין פוטנציאל לכוחות - $F=-\vec{\nabla}U$ (עבור כוחות משמרים)
- כוחות : כח קפיץ - $F=-kx,U=\frac{1}{2}kx^2$, פוטנציאל כובדי - $U=mgh$

  כח קולון - $\vec{F}=k\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$, כח מגנטי - $\vec{F}=\frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}\left[mks\right]$
- תנע - $\vec{P}=mv$ (לא לבלבל עם תנע קנוני שנראה בהמשך !!!)
- שיווי משקל מתקבל כאשר $\frac{\partial U}{\partial x}=0$.ש"מ יציב - $\frac{\partial^2U}{\partial x^2}>0$, ש"מ לא יציב - $\frac{\partial^2U}{\partial x^2}<0$
- מרכז מסה - $R_{CM}=\frac{\sum_i r_im_i}{\sum_i m_i},V_{CM}=\frac{\sum_i v_im_i}{\sum_i m_i}$

1.1.3 תנודות הרמוניות

- מיקום - $x=A\cos\left(\omega t+\phi\right)=A\sin\left(\omega t\right)+A\cos\left(\omega t\right)$
- מהירות - $v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin\left(\omega t+\phi\right)=-\omega\sqrt{A^2-x^2}$
- תאוצה - $a=-\omega^2A\cos\left(\omega t+\phi\right)=-\omega^2x$
- תדירות זוויתית - $\omega=2\pi f,T=1/f$
- זמן מחזור במערכות שונות - קפיץ ומסה - $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$,מטוטלת - $\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$

1.1.4 גוף קשיח

- מהירות זוויתית - $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{v}{R}$, תאוצה מרכזית - $\alpha=\frac{v^2}{R}$
- אנרגיה קינטית - $E=\frac{1}{2}I\omega^2$
- מומנט - $\vec{N}=\vec{F}\times\vec{R}=I\times\alpha=\frac{d}{dt}J$
- תנע זוויתי - $\vec{M}=\vec{R}\times\vec{P}=I\vec{\omega}$
- מומנטי אינרציה של גופים שונים –

מוט אחיד סביב מרכזו	$I=\frac{ml^2}{12}$	ספרה סביב המרכז	$I=\frac{2mR^2}{3}$	דיסקה מלאה\גליל מלא סביב המרכז	$I=\frac{1}{2}mR^2$
מוט אחיד סביב קצהו	$I=\frac{ml^2}{3}$	כדור מלא סביב המרכז	$I=\frac{2mR^2}{5}$		

טבעת דקה\מעטפת גליליל סביב המרכז	$I=mR^2$	לוח\תיבה מלבניים סביב המרכז	$I=\dfrac{m\left(a^2+b^2\right)}{12}$

טבלה מספר 1 – מומנטי אינרציה של גופים שונים

1.2 קואורדינטות מוכללות

בקביעת מיקומו של חלקיק במרחב (במע' צירים קרטזית, עבור מרחב תלת ממדי) עלינו להשתמש בשלוש קואורדינטות. *מספר דרגות החופש* במערכת הינו מספר הקואורדינטות הנדרשות ע"מ לתאר תנועותו של חלקיק במרחב. כל בחירה של מע' קואורדינטות אשר מהווה ייצוג (נוח) עבור הבעיה תיקרא *קואורדינטות מוכללות.* כידוע מפיסיקה 1מ, ידיעת קואורדינטות התנועה, ומהירויות החלקיק מאפשר (ע"י פתרון מד"ר) לקבוע את משוואות התנועה. נציין שע"י ידיעת המהירויות והקואורדינטות ניתן לדעת את הסטאטוס המכאני <u>המלא</u> של המע' !

1.2.1 קואורדינטות והקשר ביניהן

קואורדינטות מעגליות

- $\hat{r}=\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}$
  $\hat{\theta}=-\sin\theta\hat{x}+\cos\theta\hat{y}$
- $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\frac{d}{dt}\left(r\hat{r}\right)=\dot{r}\hat{r}+r\frac{d\hat{r}}{dt}=\dot{r}\hat{r}+r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$
- $\vec{a}=\ddot{\vec{r}}=\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\right)\hat{r}+\left(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$

1.3 הגדרות חדשות

1.3.1 מרחב הומוגני

מרחב בו באם נתבונן *במקום* כלשהו על תופעה מכאנית לא נבחין בהבדל באם נבחן את התופעה *במקום אחר*. חוסר העדפה במקום.

1.3.2 מרחב איזוטרפי

מרחב בו באם נתבונן *מכיוון* כלשהו על תופעה מכאנית לא נבחין בהבדל כלשהו באם נתבונן בתופעה *מכיוון* אחר. חוסר העדפה בכיוון.

1.4 חשבון ווריאציות

כמו שאנו רגילים לשאול מה יקרה לגודל תלוי אם נשנה את המשתנה הבלתי תלוי בקצת (לדוגמה מה יקרה למהירות אם נשנה את הזמן בקצת), כלומר מהי הנגזרת (השלמה במקרה זה ולא החלקית) עלינו לעתים לשאול מה יקרה לפונק' אם נשנה את כולה בקצת (לדוגמה מה יקרה אם נשנה את כל המסלול של חלקיק בקצת). זו תיקרא ווריאציה על הפונק' ותסומן מעתה δx.
לדוגמה, נבחן את בעיית שינוי האנרגיה כתוצאה מווריאציה במסלול δx. אם האנרגיה במקור הייתה E כעת (באופן אינטואיטיבי) השוני באנרגיה יינתן ע"י מכפלת הנגזרת (החלקית) של E בווריאציה על המסלול כלומר $\delta E=\frac{\partial E}{\partial x}\delta x$ או לחילופין $E\left(x(t)+\delta x(t)\right)=E\left(x(t)\right)+\frac{\partial E}{\partial x}\delta x$.
נשים לב שבדוגמה זו שינוי δx יביא גם לשינוי δv. מהו δv, שהוא השינוי בשיפוע (מהירות היא שיפוע\נגזרת המקום). אם δx קטן, אז *השינוי בשיפוע הוא בדיוק השיפוע של השינוי*. לכן קיבלנו כי $\delta v=\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\delta x$

כלומר החלפנו בסדר בין d ל- δ. ובסה"כ קיבלנו $\delta E=\frac{\partial E}{\partial x}\delta x+\frac{\partial E}{\partial x}\frac{d}{dt}\delta x$.

$$\boxed{\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\delta x \qquad \delta F(x)=\frac{\partial F}{\partial x}\delta x}$$

1.5 עקרון הפעולה המינימלית\עקרון המילטון

עקרון הפעולה המינימלית גורס כי כל מערכת מכאנית מאופיינת ע"י פונק' $L\left(q_1,q_2,...,\dot{q}_1,\dot{q}_2,...,t\right)$. תנועת החלקיק היא כזו אשר ממלאת דרישות כלשהן (למשל דרך מינימלית). פונק' זו תיקרא הלגרנג'יאן (להלן L) והאינטגרל המסוים על L ייקרא הפעולה או S. $\boxed{S=\int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt}$. עבור קיום דרישת המערכת תתקבל פעולה מינמלית או תוצאת אינטגרציה מינימלית.

1.5.1 משואת אוילר לגרנג' (להלן EL)

נשים לב כי ערכי $q(t_1),q(t_2)$ לא יישתנו תחת ווריאציה כי אלו הם תנאי השפה (קצוות המסלול לא יישתנו כי ברצונינו עדיין להגיע מ- A ל- B אך המסלול יעבור ווריאציה) לכן $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$. נבחן מהו השינוי בפעולה תחת הווריאציה. $\delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt=\left[\int_{t_1}^{t_2} L\left(q+\delta q,\dot{q}+\delta\dot{q},t\right)dt-\int_{t_1}^{t_2} L\left(q,\dot{q},t\right)dt\right]=0$.

הדרישה כי הווריאציה תהיה שווה לאפס נובעת מהיות הפעולה *מינימלית* כלומר הווריאציה היא מסדר גודל שקטן מלינארי\ראשון. ע"י החלפת סדר הגזירה עם סדר הווריאציה נקבל

$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\right)dt=0$. כעת $\delta\dot{q}=\frac{d}{dt}\delta q$. ולכן נקבל ע"י אינטגרציה בחלקים כי

$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{d}{dt}\delta q\right)dt=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt=0$. על האינטגרל להתאפס עבור

כל ערכי δq ולכן נקבל כי $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0}$. אלו הן *משוואות אויילר לגרנג'* (EL). במקרה של מערכת עם יותר מדרגת חופש אחת נקבל n משוואת עבור כל קואורדינטה (אלו הן בעצם משוואות תנועה כי הן נותנות קשר בין קואורדינטות, מהירות ותאוצת המערכת. חשוב להפנים שאלו משוואות תנועה עבור קואורדינטות מוכללות כלומר לא בהכרח המקום שאנו מכירים והתנע שאנו מכירים !).

1.5.2 הגדרת הלגרנג'יאן עד כדי נגזרת שלמה בזמן וערך הפעולה

נניח שתי פונק' לגרנג'יאן השונות אחת מהשניה בתוספת נגזרת שלמה ע"פ הזמן של פונק' כלשהי התלויה אך ורק ב- q ו- t כלומר $L_1(q,\dot{q},t)=L_2(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$. נבחן את תוצאת הפעולה עקב תוספת זו.

$$S_1=\int_{t_1}^{t_2} L_1(q,\dot{q},t)dt=\int_{t_1}^{t_2} L_2(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)dt=\int_{t_1}^{t_2} L_2(q,\dot{q},t)dt+f\left(q_{(t_2)},t_2\right)-f\left(q_{(t_1)},t_1\right)=S_2$$

והרי שתחת ווריאציה גודל זה שווה לאפס כי אלו הם תנאי השפה. כלומר *אין שינוי בתוצאת הפעולה עקב תוספת של* $\frac{d}{dt}f(q,t)$ *ללגרנג'יאן.*

נציין כאן כי הפעולה של חלקיק חופשי אינה משתנה במעבר בין מע' ייחוס עד כדי תוספת של נגזרת שלמה ע"פ הזמן.

1.6 הלגרנג'יאן של חלקיק חופשי

בסעיף 1.5.2 ציינו כי אין שוני בפעולות במעבר בין מע' ייחוס. נניח שתי מע' ייחוס שבהן מתקיים $v' = v + \varepsilon$ כאשר (מן הסתם...) $\varepsilon \to 0$. היות ואין הבדל בפעולה בין מע' אינרציאליות שונות על הלגרנג'יאן להיות פונק' של v בלבד (ולא של וקטור המקום או הזמן). היות והוא איזוטרופי, כלומר לא יכול להיות תלוי כיוון, הלגרנג'יאן יהיה פונק' $L\left(v^2\right)$. כעת נבחן את שני הלגרנג'יאנים ונקבל כי

$L\left(v'^2\right) = L\left(\left(v+\varepsilon\right)^2\right) = L\left(v^2 + 2v\bullet\varepsilon + \varepsilon^2\right) = L\left(v^2\right) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2v\bullet\varepsilon$. היות ולא ייתכן כי יתקיים שוני בין הפעולות נדרוש כי $\frac{\partial L}{\partial v^2} 2v\bullet\varepsilon = \frac{d}{dt} f\left(\vec{r},t\right)$ כלומר שתהיה נגזרת שלמה ע"פ הזמן. נקבל כי $\frac{\partial L}{\partial v^2} = const$ או לחילופין כי $L \propto v^2$. מכאן ניתן לקבל את $L = \frac{mv^2}{2}$ המפורסם.

1.7 הלגרנג'יאן של מע' חלקיקים

מע' שבה ישנם קב' של חלקיקים בעלי אינטראקציה האחד עם השני אך ללא השפעה חיצונית נקראת מע' סגורה. נמצא (והנה נפנופי הידיים...) שניתן לקבל את הלגרנג'יאן של מע' כזו ע"י תוספת של פונק' כלשהי ללגרנג'יאן של חלקיק חופשי. כלומר

$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U\left(r_1, r_2, ...\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - U\left(r_1, r_2, ...\right)$. כאן $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ היא האנרגיה הקינטית במע' ו$U\left(r_1, r_2, ...\right)$היא האנרגיה הפוטנציאלית במע'. נשים לב כי האנרגיה הפוטנציאלית תלויה רק במיקום החלקיקים ולא במהירותם. אם נציב את הלגרנג'יאן לעיל במשוואת EL נקבל $m_i \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}$ כלומר את משוואת ניוטון. קיבלנו ביטוי לכח הפועל על החלקיק ה-i. אם נרצה לעבור לקואורדינטות מוכללות נצטרך לבצע העתקה כלשהי (קואורדינטה מוכללת כפונק' של הקואורדינטות הקרטזיות) על הקואורדינטות הקרטזיות כלומר $x_i = f_i\left(q_i\right)$ ולכן $\dot{x}_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \dot{q}_k$. נחליף את הביטויים הללו בלגרנג'יאן ונקבל $L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) - U\left(r_1, r_2, ...\right) = \sum_{i,k} \frac{1}{2} a_{i,k}\left(q\right) \dot{q}_i \dot{q}_k - U\left(q\right)$ כאשר את החילוף הנ"ל ניתן לבצע רק אם האנרגיה הקינטית היא פונקציה קוודרטית (מסדר שני) של הקואורדינטות. הרי אם האנרגיה הקינטית הייתה פונקציה מסדר גבוה יותר, לא היה ביכולתינו להביע את זה במבנה של הלגרנג'יאן החדש. הרי בלגרנג'יאן החדש ניתן להגיע לסדר הגבוה ביותר ע"י כפל של $\dot{q}_i$ בעצמו. ידוע כי $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ לכן ניתן לכתוב כי $\boxed{L = T - U}$. *כך נמצא את הלגרנג'יאן הנתון עבור כל בעיה ע"י כתיבת סך מערך האנרגיות בבעיה וחיסורם של הפוטנציאלים בבעיה.*

2. חוקי שימור

2.1 שימור אנרגיה

היות *והזמן הינו הומוגני* (עבור האנרגיה) הלגרנג'יאן של מע' סגורה (כלומר מתקיים שימור אנרגיה) אינו תלוי בזמן.

כלומר $L=\left(q_i,\dot{q}_i\right)$ ונגזרת שלמה של הלגרנג'יאן ע"פ הזמן תהיה $\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i$. ממשוואות EL

ידוע כי $\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ ולכן $\frac{dL}{dt}=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\dot{q}_i+\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i=\sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$. כעת קיבלנו כי

$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-L\right)=0$. נקרא לגודל הבלתי משתנה הנ"ל E. כעת אם אכן $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ כמו שהנחנו בהתחלה אזי

$E=const$. *נגדיר את הגודל הבא כאנרגיה* של המערכת $\boxed{E=\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\sum_i \underbrace{p_i}_{\substack{generalized\\ momentum}}\dot{q}_i-L}$. (להגדרה)

של p_i ראו בהמשך). *נשים לב כי האנרגיה ע"פ ההגדרה לעיל נשמרת, כלומר* $\frac{\partial}{\partial t}E=0$ *אם"ם הלגרנג'יאן אינו תלוי מפורשות בזמן.*

2.2 שימור תנע קווי

היות *והמרחב הינו הומוגני* (עבור גודלו של התנע הקווי) לגרנג'יאן של מע' סגורה אינו תלוי במקום. כלומר נוכל להזיז את המערכת ב- $\varepsilon\to 0$ ולמצוא את התנאי לכך שהלגרנג'יאן יישאר ללא שינוי. אנו מזיזים את המערכת ייחוס כלומר כל רדיוס וקטור הופך ל- $r_1=r_2+\varepsilon$. המהירויות נשארות זהות כתוצאה מההזזה. כלומר הווריאציה בלגרנג'יאן תהיה $\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\bullet\delta r_i=\varepsilon\bullet\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}=0\to\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}=0$. ממשוואות EL נוכל לכתוב

$\sum_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}=0\to\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}=\frac{\partial L}{\partial v_i}=const$ ונקרא לקבוע זה P. $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=p=\text{תנע מוכלל}}$. חשוב להדגיש שזהו *אינו התנע שאנו מכירים מפיסיקה מ1* !!! (תנע זה יכול להיות לפעמים התנע הפשוט, לפעמים תנע זוויתי ולפעמים גדלים אחרים לגמרי...נראה בהמשך).

נזכיר כי מדובר כאן במע' סגורה ובאינטראקציה של החלקיקים במע' עם עצמם בלבד כלומר אנו בעצם מדברים על הלגרנג'יאן המצויין בסעיף 1.7 $L=\sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2-U\left(r_1,r_2,...\right)$. לכן נשים לב כי בעצם $\frac{\partial L}{\partial r_i}=-\frac{\partial U}{\partial r_i}=F$ ולכן מה שבעצם כתוב הוא החוק השני של ניוטון. כלומר $\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}=\sum_i F_i=0$. $\boxed{\frac{\partial L}{\partial r_i}=F=\text{הכח המוכלל}}$ (גם כוח זה אינו הכח שאנו מכירים מפיסיקה 1מ !!!) הסיבה להגדרה זו היא שכך הכח המוכלל מקיים את המשוואה $F=\frac{dp}{dt}$ כאשר p הוא התנע המוכלל, שזו משוואת תנועה המכלילה את משוואת ניוטון.

2.3 שימור תנע זוויתי

היות והמרחב הינו איזוטרופי הלגרנג'יאן של מע' סגורה אינו תלוי בזווית בה אנו צופים בבעיה. כלומר נוכל לסובב את המערכת ב- $\delta\vec{\phi}$. כיוון השינוי בווריאציה יוגדר באנך למישור הסיבוב וגודלו מן הסתם תלוי גם בגודל הרדיוס וקטור, כלומר $\delta r=\delta\phi\times r$. במקרה זה גם המהירויות משתנות ביחס לסיבוב כי הן משנות כיוון ולכן $\delta v=\delta\phi\times v$.

כעת נציב את שתי אלו במשוואת שמבטאות את העובדה כי הלגרנג'יאן אינו משתנה ונקבל כי

$\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\bullet\delta r_i+\frac{\partial L}{\partial v_i}\bullet\delta v_i=0$ או $\delta L=\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\bullet\left(\delta\phi\times r_i\right)+\frac{\partial L}{\partial v_i}\bullet\left(\delta\phi\times v_i\right)=0$ ע"פ הכלל לפרמוטציה

$A\bullet\left(B\times C\right)=C\bullet\left(A\times B\right)=B\bullet\left(C\times A\right)$ נקבל כי

$\sum_i \delta\phi\bullet\left(r_i\times\frac{\partial L}{\partial r_i}\right)+\delta\phi\bullet\left(v_i\times\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)=\delta\phi\bullet\sum_i\left(r_i\times\frac{\partial L}{\partial r_i}\right)+\left(v_i\times\frac{\partial L}{\partial v_i}\right)=0$. נחליף את הביטויים הבאים $\frac{\partial L}{\partial r_i}=\overset{\bullet}{p}_i, \frac{\partial L}{\partial v_i}=p_i$. ונקבל $\delta\phi\bullet\sum_i\left(r_i\times\overset{\bullet}{p}_i\right)+\left(v_i\times p_i\right)=\delta\phi\bullet\frac{d}{dt}\sum_i\left(r_i\times p_i\right)=0$. כלומר קיבלנו $\sum_i\left(r_i\times p_i\right)=M$.

2.4 דוגמאות

2.4.1 דוגמא 1

נתון הלגרנג'יאן $L\left(x,y,q,\dot{x},\dot{y}\right)=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-gy+q\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-a\right)$ כאשר a הוא קבוע

i. מה היחידות של q ו- a בהנחה כי ל- x,y יחידות של אורך
ii. רשום את התנעים הקנוניים בבעיה
iii. אלו מהתנעים הם שמורי תנועה ומדוע
iv. חשב את האנרגיה בבעיה. האם היא שמור תנועה
v. רשום את משוואות EL עבור הרכיבים x,y,q
vi. הצב במשוואות התנועה את הפתרון $\dot{x}=b\cos\left(\phi\left(t\right)\right), \dot{y}=b\sin\left(\phi\left(t\right)\right)$ ומצא את b

פתרון

i. נתון כי יחידות x,y של אורך כלומר יחידות $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$ הן יחידות של $[m/\sec]$ ולכן יחידות q,a הן גם $[m/\sec]$. באופן כזה מתאפשר החיבור בין הגדלים השונים המרכיבים את הלגרנזיאן.

ii. נמצא את התנע הקנוני ע"פ הגדרה - $p=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$p_x=\dot{x}+\frac{q\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ p_y=\dot{y}+\frac{q\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}},\ p_q=0$$

iii. ע"י בחינת מבנה הלגרנג'יאן ניתן לראות כי התנע הקווי בכיוון x נשמר היות שהזזה בכיוון זה אינה משנה את ערכו.
באותו אופן ניתן לראות כי התנע הקווי בכיוון המהירות של q (זו קואורדינטה של מהירות ולא מקום אך היא בעלת כיוון).

iv. נחשב את האנרגיה בבעיה ע"פ הגדרה -

$$E=\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=\left[\left(\dot{x}+\frac{q\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\dot{x}+\left(\dot{y}+\frac{q\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\dot{y}\right]-L=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+gy+qa$$ היות

ולא קיימת תלות מפורשת בזמן האנרגיה היא שמור תנועה.

v. נרשום את משוואת EL בבעיה

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}+\frac{q\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=\ddot{x}+\frac{\left(\dot{q}\dot{x}+q\ddot{x}\right)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-q\dot{x}\left(\dot{x}+\dot{y}\right)}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{1.5}}=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{d}{dt}\left(\dot{y}+\frac{q\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)+g=\ddot{y}+\frac{\left(\dot{q}\dot{y}+q\ddot{y}\right)\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)-q\dot{y}\left(\dot{x}+\dot{y}\right)}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{1.5}}+g=0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\partial L}{\partial\int qdt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-a\right)=\frac{\dot{x}+\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}-\dot{a}=0$$

vi. נציב במשוואת התנועה כי $\dot{x}=b\cos\left(\phi\left(t\right)\right), \dot{y}=b\sin\left(\phi\left(t\right)\right)$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}+\frac{q\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)=\frac{d}{dt}\Big(b\cos\big(\phi(t)\big)+q\cos\big(\phi(t)\big)\Big)=0\rightarrow$$

$$b\cos\big(\phi(t)\big)+q\cos\big(\phi(t)\big)=C_1$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}-\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{d}{dt}\left(\dot{y}+\frac{q\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)+g=\frac{d}{dt}\Big(b\sin\big(\phi(t)\big)+q\sin\big(\phi(t)\big)\Big)+g=0\rightarrow$$

$$b\sin\big(\phi(t)\big)+q\sin\big(\phi(t)\big)=-gt$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\partial L}{\partial\int q dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}-a\right)=\frac{d}{dt}(b-a)=0\rightarrow$$

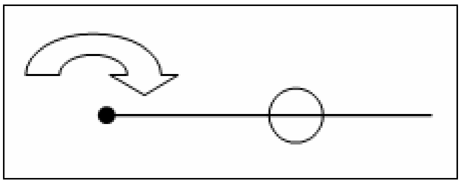
$$b-a=C_2$$

$$b=\frac{C_1}{\cos\big(\phi(t)\big)}-q=\frac{-gt}{\sin\big(\phi(t)\big)}-q\rightarrow C_1=-gt\cot\big(\phi(t)\big)$$

$$b=\frac{-gt}{\sin\big(\phi(t)\big)}-q=C_2+a$$

2.4.2 דוגמא 2

חרוז מושחל על מוט מסתובב (ללא גרוויטציה). מצא את L ואת T. האם במקרה זה האנרגיה כפי שהגדרנו במכאניקה אנליטית נשמרת ? והאנרגיה כפי שהגדרנו בפיסיקה 1מ' ?



איור מספר 1 – 2.4.2 דוגמא 2

פתרון

בבעיה זו הגדלים המבוקשים הינם –

i. הלגרנג'יאן בבעיה מורכב מאנרגיה קינטית בלבד הנובעת ממהירות זוויתית ומהירות לאורך המוט כלומר $L=\frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2r^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2$.

ii. האנרגיה הקינטית היא בדיוק הלגרנג'יאן היות ואין כבידה ולכן אין שום גורם אנרגיה פוטנציאלית.
$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2r^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2$$

iii. נבדוק שימור אנרגיה (בהנחה כי המהירות הזוויתית היא אילוץ ולא קואורדינטה)-
$$E=\sum_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=m\dot{r}^2-L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2-\frac{1}{2}m\dot{\alpha}^2r^2$$
כלומר הגודל הנשמר אינו האנרגיה הקינטית אך גודל זה אכן נשמר היות ואינו תלוי מפורשות בזמן.

iv. האנרגיה כפי שהגדרנו אותה בפיסיקה 1מ אינה נשמרת, זאת ניתן להסיק מהסעיף בו מצאנו את הגודל הנשמר, גודל אשר שונה מהאנרגיה הקינטית.

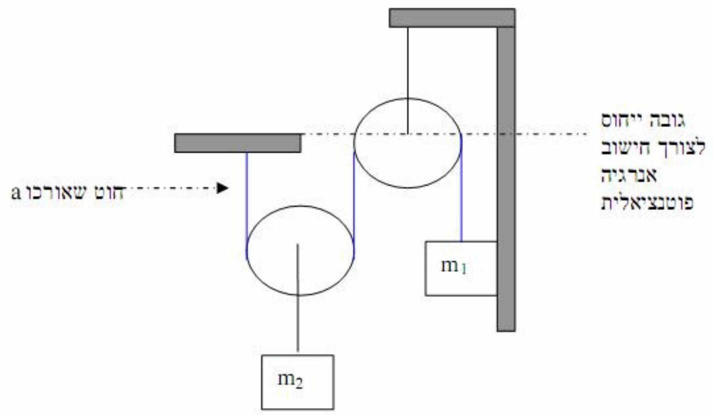
2.4.3 דוגמא 3

נתבונן בבעיה הבאה בשדה כבידה אחיד. אין חיכוך, הגלגלות חסרות מסה, אורך החוט הכחול a , הגלגלת המחוברת לקיר נמצאת בגובה התליה של החבל, רדיוסי הגלגלות ואורך החוט בין הגלגלת למסה 2 זניחים

i. כמה דרגות חופש פיזיקליות יש בבעיה ?

ii. רשום את L כשהאנרגיה הפוטנציאלית של המסות בגובה התליה מוגדרת להיות אפס

iii. רשום את משוואות התנועה ופתור אותן



איור מספר 2 – 2.4.3 דוגמא 3

פתרון

i. קיימת בבעיה דרגת חופש אחת והיא גובה אחת מהמסות מעל נק' ייחוס כלשהי. הרי גובה מסה אחת תלויה בשניה כך ש- $x_1 + 2x_2 = a$.

ii. נרשום את לגרנג'יאן הבעיה

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{-\dot{x}_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{8}m_2\dot{x}_1^2$$

$$U = m_1gx_1 + m_2gx_2 = m_1gx_1 + m_2g\left(\frac{a-x_1}{2}\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{8}m_2\dot{x}_1^2 - \left(m_1gx_1 + m_2g\left(\frac{a-x_1}{2}\right)\right) = \dot{x}_1^2\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{8}\right) - \left(m_1gx_1 + m_2g\left(\frac{a-x_1}{2}\right)\right)$$

iii. נציב את הלגרנג'יאן במשוואת EL

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{d}{dt}\left(2\dot{x}_1\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{8}\right)\right) - \left(-m_1g + \frac{m_2g}{2}\right) = 2\ddot{x}_1\left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{8}\right) + m_1g - \frac{m_2g}{2} = 0 \rightarrow$$

$$\ddot{x}_1 = 2g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}$$

$$\dot{x}_1 = 2g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}t + C_1$$

$$C_1 = 0 \ (inital\ velocity)$$

$$x_1 = g\frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2}t^2 + C_2$$

$$C_2 = x_1 \ (inital\ height)$$

3. **תנועה בפוטנציאל מרכזי ואינטגרציה של משוואות התנועה** (פרק כמעט נטול פורמליזם לגרנג'יאני)

3.1 תנועה במימד אחד

אם קיימת דרגת חופש אחת לצורך תאור תנועתו של גוף במרחב נאמר כי זו תנועה במימד אחד. ידוע כי $E=T+U$ (זו הגדרת האנרגיה המוכרת ללא שום קשר להגדרה בסעיף 2.1) או $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U\left(x\right)$ (ישנה דרגת חופש אחת לכן זו הצורה הכללית ביותר של פונק' האנרגיה). ע"י ביצוע אינטרציה לשני האגפים נקבל $dx=\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U\left(x\right)\right)}dt$ או $\boxed{t=\int\sqrt{\frac{m}{2\left(E-U\left(x\right)\right)}}dx}$. נחמד לראות דרך זאת כי היות והזמן תמיד מוגדר כחיובי (תלוי ייחוס) וממשי מן הסתם האנרגיה תמיד גבוהה\שווה לפוטנציאל אך לא קורה שבאופן קלאסי הפוטנציאל "עוקף" את רמת האנרגיה.

3.2 מסה מצומצמת

סעיף זה עוסק בהוכחה כי ניתן למצוא פתרון כללי לגמרי לבעיה העוסקת בתנועה של שני גופים המקיימים אינטראקציה ביניהם (כוכבי לכת, אטומים וכד').
תחילה נפריד את הבעיה לבעיה בה קיימת תנועת מרכז המסה ותנועתן היחסית של המסות. הלגרנג'יאן בבעיה יהיה נתון ע"י $L=\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2-U\left(\left|r_1-r_2\right|\right)$ כאשר נניח כי ראשית הצירים נמצאת במרכז מסה (כלומר $m_1r_1+m_2r_2=0$). נגדיר כי $r=r_1-r_2$ וכי $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ ונקבל כי $\begin{matrix} r_1=m_2r/\left(m_1+m_2\right) \\ r_2=-m_1r/\left(m_1+m_2\right)\end{matrix}$. נקבל כי $L=\frac{1}{2}\mu r^2-U\left(r\right)$. כלומר הגענו להצגה של הבעיה ששקולה לגוף יחיד בשדה כוח (מרכזי) שסימטרי ביחס לנק' מסויימת קבועה במרחב. וכמובן שע"י שימוש בקשרים $\begin{matrix} r_1=m_2r/\left(m_1+m_2\right) \\ r_2=-m_1r/\left(m_1+m_2\right)\end{matrix}$ ניתן למצוא את מסלולן של כל אחת מהמסות הנפרדות.

3.3 תנועה בשדה כוח מרכזי

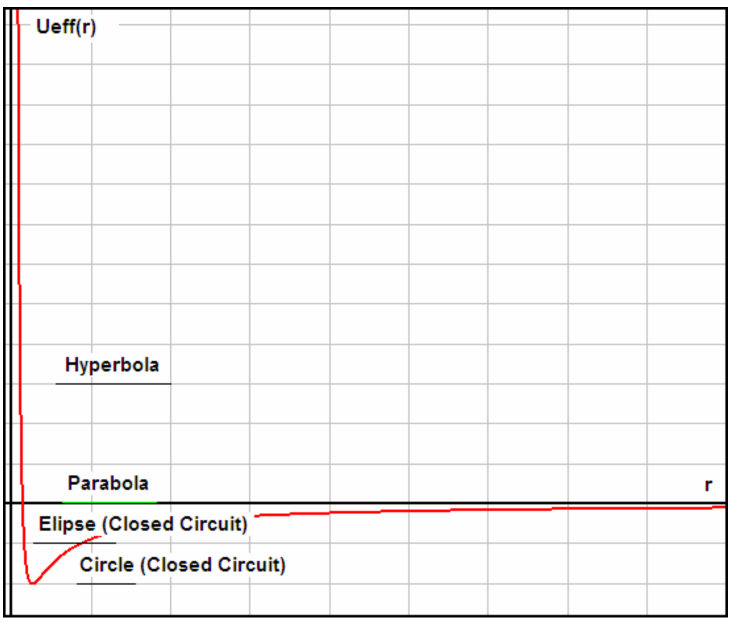
בסעיף 3.2 הגענו להצגה של הבעיה הדו גופית ששקולה לתנועה של גוף בודד בשדה כח מרכזי כלומר כח מחזיר שכיווני בכיוון הרדיוס וקטור. ידוע כי בשדה כח מסוג זה קיים שימור תנע זוויתי ולכן $\vec{J}=\vec{r}\times\vec{p}$ קבוע. J מאונך לרדיוס וקטור וגם קבוע. לכן *תנועת הגוף היא במישור* ($\dot{\vec{J}}=\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\vec{p}}_{\dot{r}\times v=v\times v=0}+\vec{r}\times\underbrace{\dot{\vec{p}}}_{F}=\vec{r}\times\underbrace{\left(-\vec{\nabla}U\right)}_{central\ feild\to\vec{\nabla}U\|r}=0$)! לכן כעת ידוע כי ניתן לתאר את הבעיה באמצעות זוג קואורדינטות (תנועה במישור). באמצעות קואורדינטות פולריות נציג את הבעיה באופן אחר - $\vec{J}=\mu\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=\mu r^2\dot{\theta}\hat{z}\to r^2\dot{\theta}^2=\frac{\vec{J}^2}{\mu^2r^2}$ ולכן $E\left(r,\theta,z\right)=\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2\hat{r}+r^2\dot{\theta}^2\hat{\theta}\right)+U\left(r\right)=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\hat{r}+\frac{1}{2}\frac{\vec{J}^2}{\mu r^2}\hat{\theta}+U\left(r\right)$. כלומר ע"י מניפולציה אלגברית תארנו את הבעיה באמצעות קואורדינטה אחת. ניתן גם להציג את הבעיה כמורכבת מפוטנציאל אפקטיבי $E\left(r,\theta,z\right)=\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\hat{r}+\underbrace{U_{eff}\left(r\right)}_{\frac{1}{2}\frac{\vec{J}^2}{\mu r^2}\hat{\theta}+U\left(r\right)}$ ובעיה מהצורה הזו כבר פתרנו בסעיף 3.1 - $\boxed{t=\int\sqrt{\frac{m}{2\left(E-U_{eff}\left(x\right)\right)}}dx}$.

באמצעות הקשר $\vec{J}=\mu r^2\dot{\theta}\hat{z}$ נקבל כי $\dot{\theta}=\frac{d}{dt}\theta=\frac{\vec{J}}{\mu r^2}\to\theta=\int\frac{\vec{J}}{\mu r^2}dt+\theta_0$. כעת ע"י הצבה חזרה של dt נקבל כי $\boxed{\Delta\theta=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{Jdr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E-U_{eff}\right)}}=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{Jdr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E-U\right)-J^2/r^2}}}$. ניתן לראות כי $\Delta\theta>0$ כלומר לא

ייתכן כי כיוון הסיבוב משתנה. ע"מ לקבל מסלולים סגורים נדרוש כי $\Delta\theta = 2\pi m / n$ כאשר m,n מספרים רציונליים כלומר לאחר n מחזורים בוצעו m סיבובים והושלם מסלול. לכן באופן כללי לא מתקיימת תנועה בעלת מסלול סגור. קיימים רק שני פוטנציאלים אשר כל המסלולים הסופיים של גופים אשר נעים תחת השפעתם הם בהכרח סגורים. פוטנציאל קפלרי $U = \frac{-\alpha}{r}$ ופוטנציאל אוסצילטורי $U = \alpha r^2$ (משפט ברטרנד).

3.4 בעית קפלר

פוטנציאל קפלרי כאמור בסעיף 3.3 הינו מהמבנה $\boxed{U = \frac{-K}{r}}$ כאשר $K > 0$. כלומר $U_{eff}(r) = \frac{-K}{r} + \frac{\vec{J}^2}{2\mu r^2}$.
ניתן לראות מאיור מספר 1 – 2.4.2 דוגמא 2 כי מתקיימים מסלולים סגורים כאשר $E \le 0$ ולהיפך. ניתן לגזור את צורת המסלולים מהפתרון לסעיף 3.3. $\Delta\theta = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{Jdr}{r^2\sqrt{2\mu\left(E - \frac{J^2}{2\mu r^2} + \frac{K}{r}\right)}}$. הפתרון לאינטגרל הזה הוא
$\Delta\theta = \arccos\left(\frac{\frac{J}{r} - \frac{\mu K}{J}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 K^2}{J^2}}}\right) + \theta_0$. נגדיר $p = \frac{J^2}{\mu K}, e = \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{\mu K^2}}$ ואז נוכל לכתוב את משוואת התנועה ע"י $p / r = 1 + e\cos\theta$. זו משוואה של חתכים קוניים כאשר e נקרא האקסצנטריות. ניתן לראות כי אם $E < 0$ אז האקסצנטריות $e < 1$ ואז זו אליפסה. בנוסף מתקיים עבור אליפסה כי הציר הראשי $a = p / \left(1 - e^2\right)$ והמשני $b = p / \sqrt{\left(1 - e^2\right)}$ וכי המרחקים המקסימליים בהם נמצא הגוף הם
$R_{\min} = p / (1 + e) = a(1 - e), R_{\max} = p / (1 - e) = a(1 + e)$ וכי זמן המחזור הוא $T = \pi a\sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$.
עבור $U_{eff} = \min\left(U_{eff}\right) = -\frac{\mu K^2}{2J^2}$ אז $e = 0$ וזהו מסלול מעגלי ומתקיים כי $r = \frac{J^2}{K\mu}$.
עבור $E > 0, e > 1$ מסלול התנועה הוא היפרבולה ו $r_{\min} = \frac{K(e-1)}{2E}$. עבור $E = 0, e = 1$ מסלול התנועה הוא פרבולה ו $r_{\min} = \frac{J^2}{2\mu K}$.



איור מספר 3 – מסלולי גוף תחת פוטנציאל קפלרי

חשוב לשים לב שבאמצעות השרטוט רואים כי גוף אינו יכול להגיע למרכז הכוח כלומר ל $r=0$.

3.4.1 וקטור רונג' לנץ

מסתבר כי בבעית קפלר קיים גודל שנשמר ($\frac{d}{dt}A=0$) שנקרא וקטור רונג' לנץ -

$\boxed{\vec{A}=\vec{P}\times\vec{M}-\mu K\hat{r}}$. $\vec{A}$ נמצא במישור תנועת החלקיק כי הרי $\vec{A}\bullet\vec{M}=0$.

$$\vec{A}\bullet\vec{r}=Ar\cos\theta$$

ניתן להסיק מתוך A את צורת המסלול - $\vec{A}\bullet\vec{r}=\underbrace{\vec{P}\times\vec{M}\bullet\vec{r}}_{A\bullet(B\times C)=C\bullet(A\times B)}-\mu K\hat{r}\bullet\vec{r}=M^2-\mu Kr$. לכן מתקיים

$r=\frac{M^2}{A\cos\theta+\mu K}=\frac{M^2/\mu K}{\frac{A}{\mu K}\cos\theta+1}$ וזו משוואת אליפסה עם אקסצנטריות $e=\frac{A}{\mu K}$.

3.5 דוגמאות

3.5.1 דוגמא 1

חלקיק שמסתו m נמצא בבוא פוטנציאל חד ממדי שצורתו $U(x)=mg|x|$. חשב את זמן המחזור כפונק' של ההעתק המקס' A.

פתרון

נחשב את הזמן של רבע מחזור ולבסוף נכפול ב-4. נחשב את הזמן שלוקח לחלקיק להגיע מהנק' $x=0$ ועד ל- $x=A$. כלומר $x\ge 0$ ולכן $U(x)=mgx$. נציין כי בתחום זה $a<0$ כלומר פונה לכיוון ציר ה-x השלילי.

$$F=-mg\xrightarrow{thus}a=-g$$

$$A=-\frac{1}{2}gt^2 .$$

$$t=\sqrt{\frac{2A}{g}}\to T=4t=\sqrt{\frac{32A}{g}}$$

3.5.2 דוגמא 2

חלקיק נע בפוטנציאל מרכזי הנתון ע"י - $V=-V_0e^{-\alpha r^2}$ כאשר V_0,α קבועים. עבור אילו ערכים של התנע הזוויתי תיתכן תנועה חסומה.

פתרון

נתון כי הפוטנציאל בבעיה הוא מרכזי, לכן התנע הזוויתי נשמר. ע"כ עלינו למצוא ערך תנע זוויתי שיניב אנרגיה פוטנציאלית בעלת מינימה.

$$\dot{\vec{r}}=\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2-V_0e^{-\alpha r^2}=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V_0e^{-\alpha r^2}$$

$$M=m\vec{r}\times\dot{\vec{r}}=m\vec{r}\times\left(\dot{r}\hat{r}+r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)=mr^2\dot{\theta}\hat{z}\longrightarrow\frac{M^2}{r^2m^2}=r^2\dot{\theta}^2$$

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2-V_0e^{-\alpha r^2}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{M^2}{2mr^2}-V_0e^{-\alpha r^2}=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{eff}(r)$$

נרצה שהתנועה תהיה מוגבלת כלומר שתהיה מינימה לפוטנציאל האפקטיבי. לכן נשווה את נגזרת הפוטנציאל האפקטיבי לאפס.

$$U_{eff}\left(r\right)=\frac{M^2}{2mr^2}-V_0e^{-\alpha r^2}\rightarrow \dot{U}_{eff}\left(r\right)=-\frac{M^2}{mr^3}+2\alpha rV_0e^{-\alpha r^2}=0$$

$$M^2=2\alpha mr^4V_0e^{-\alpha r^2}\longrightarrow\frac{M^2}{2\alpha mV_0}=r^4e^{-\alpha r^2}$$

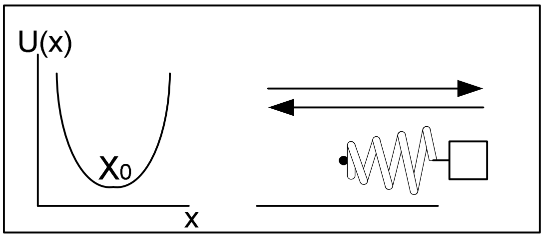
הגודל המקסימאלי של שיכול לקבל הביטוי $r^4e^{-\alpha r^2}$ הוא $\frac{4}{\alpha^2}e^{-2}$. לכן

$$M^2\leq 2\alpha mV_0*\left(\frac{4}{\alpha^2}e^{-2}\right)=\frac{8mV_0e^{-2}}{\alpha}$$

4. תנודות קטנות

4.1 תנודות חופשיות במימד אחד

נניח מע' שבה קיימת תנודה הרמונית סביב נק' במימד אחד. נניח כי הפוטנציאל המינימלי קיים ב- x_0.



איור מספר 4 –4.1 תנודות חופשיות במימד אחד

במקרה זה הלגרנג'יאן $L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-U\left(x\right)$. נגדיר מתשנה חדש $q=x-x_0$ תחת ההנחה כי q קטן מאוד. כך נקבל $L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-U\left(q+x_0\right)$. כעת נפתח לטור את האנרגיה הפוטנציאלית $U\left(q+x_0\right)=U\left(x_0\right)+\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0}q+\frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x_0}q^2+O\left(q^3\right)$. היות ו- x_0 היא נק' מינימום נקבל כי הנגזרת הראשונה מתאפסת ולכן $U\left(q+x_0\right)=U\left(x\right)=U\left(x_0\right)+\frac{1}{2}kq^2$. כעת קיבלנו כי $L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2$. נציב זאת במשוואת EL ונקבל כי $m\ddot{q}+kq=0$. כידוע מפיסיקה 1מ' נוכל להגדיר $\omega^2=\frac{k}{m}$ וכך נקבל כי $\ddot{q}+\omega^2q=0$. את פתרונותיה של משוואה זו אנו מכירים. קיימים שני פתרונות בת"ל, הלא הם $\sin$ ו- $\cos$. לכן הפתרון הכללי למשוואת התנועה היא $x=c_1\cos\left(\omega t\right)+c_2\sin\left(\omega t\right)$ או לחילופין $x=a\cos\left(\omega t+\alpha\right)$.
נשים לב כי התדירות ω אינה תלויה בת.ה. של הבעיה. התוצאה הזו נכונה לקירוב של תנודות קטנות, הרי כשהנחנו תנודות קטנות בעצם הראינו כי הפטנציאל תלוי בקשר ריבועי למקום. כעת ע"י הפתרון שלנו למעלה נוכל גם לכתוב כי $E=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}m\omega^2q^2=\frac{1}{2}m\left(\dot{q}^2-q^2\right)$ כאשר a היא האמפליטודה.

4.2 תנודות מאולצות

נניח כעת כי מתקיימות תנודות מאולצות ע"י הוספת איבר ללגרנג'יאן $L=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2-qF\left(t\right)$ ונדון במקרה פרטי שבו $F\left(t\right)=f\cos\left(\omega_0t\right)$. ע"י הצבה במשוואת EL נקבל $m\ddot{q}+kq-f\cos\left(\omega_0t\right)=0\leftarrow$ $\ddot{q}+\omega^2q=\frac{f\cos\left(\omega_0t\right)}{m}$. ידוע ממד"ר כי פתרון כללי של מערכת לינארית שאינה הומוגנית הינו סופרפוזיציה של פתרון פרטי של המערכת הלא הומוגנית ופתרון כללי של המערכת ההומוגנית. נחפש פתרון פרטי למשל $q=b\cos\left(\omega' t\right)$. כלומר הפתרון הכללי של המערכת הוא $c_1\cos\left(\omega t\right)+c_2\sin\left(\omega t\right)+b\cos\left(\omega' t\right)$. ניתן לראות

כי תנועת המערכת מורכבת מזוג תדירויות האחת הנובעת מהתדירות הפנימית של המערכת והשנייה הנובעת מתדירות הכח המאלץ. שתי התדירויות הללו קיימות במצב שבו $\omega \neq \omega_0$. אנו מתעניינים מה קורה כאשר $\omega_0 = \omega'$ כלומר כאשר הכח המאלץ נע בתדירות זהה לזו של הפתרון הפרטי.

הצבת הפתרון *הפרטי* במשוואה מניב $-\omega'^2 b\cos\left(\omega' t\right)+\omega^2 b\cos\left(\omega' t\right)=\dfrac{f\cos\left(\omega_0 t\right)}{m}$. במצב שבו $\omega_0 = \omega'$

נקבל $b=\dfrac{f}{m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}$. כעת ניתן לראות כי במצב שבו $\omega \neq \omega_0$ (תדירות הכח המאלץ שווה לתדירות העצמית של המערכת) ניתן לכתוב כי הפתרון הכללי לבעיה הוא $q(t)=\underbrace{a\cos\left(\omega t+\alpha\right)}_{\text{homogenous solution}}+\underbrace{\underbrace{\dfrac{f}{m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}}_{b}\cos\left(\omega_0 t\right)}_{\text{private solution}}$. היות

והפרמטר a הוא בינתיים חופשי (לאחר מכן ינבע מתנאי ההתחלה של הבעיה) ניתן להציג את הפתרון גם כ- $q(t)=a\cos\left(\omega t+\alpha\right)+\dfrac{f}{m\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left[\cos\left(\omega_0 t\right)-\cos\left(\omega t\right)\right]$. הצגה כזו מאפשרת לנו לשים לב כי

$$\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{f}{m\left(\omega+\omega_0\right)}\underbrace{\frac{\left[\cos\left(\omega_0 t\right)-\cos\left(\omega t\right)\right]}{\left(\omega-\omega_0\right)}}_{\frac{d\left(\cos(\omega t)\right)}{dt}}=\frac{f}{2m\omega}t\sin\left(\omega t\right).$$

כאשר כעת ניתן לראות כי במצב שבו $\omega=\omega_0$ ניתן לכתוב כי הפתרון הוא

$q(t)=a\cos\left(\omega t+\alpha\right)+\dfrac{f}{2m\omega}t\sin\left(\omega t\right)$. מצב זה נקרא תהודה.

הראינו כי במצב של תהודה האמפליטודה של התנודות גדלה לינארית עם הזמן.

4.3 תנודות מצומדות (תנודות במערכת שבה יש יותר מדרגת חופש אחת)

4.3.1 הנוטציה של איינשטיין לסכימה

זו בסה"כ שיטה נוספת להציג סכימה של טור\סדרה. לדוגמה במקום לכתוב $\sum_i x_i$ נכתוב x_i או למשל $\sum_i x_i y_i \equiv x_{ik} y_{ik}$. *כלומר על מנת לסמן סכימה על אינדקס מסויים נחזור רק על אינדקס זה פעמיים ורק פעמיים*. לעתים גם מסמנים את האינדקס עליו מתבצעת הסכימה רק באגף הימני של המשוואה כלומר $y=x_i=\sum_i x$. עוד כמה דוגמאות להמחשה - $a_{ij}=\sum_k b_{ik}c_{kj}=b_{i\theta}c_{\theta j}$. או למשל סכום אלכסון של מטריצה (סך הערכים העצמיים) $A_{11}+A_{22}+\ldots+A_{ii}=A_{\theta\theta}$. הנוטציה הזו מאוד שימושית יחד עם זהויות אפסילון (טנזור פרמוטציות) ודלתא (דלתא של קרונקר). כך למשל נקבל $\delta_{i\theta}a_\theta=a_i$.

4.3.2 הפורמליזם המתמטי

נניח עתה כי למערכת קיימת אנרגיה פוטנציאלית התלויה בקואורדינטות המוכללות q_i. במע' כזו הלגרנג'יאן נתון ע"י $L=\dfrac{1}{2}\sum_{ij}a_{ij}\left(q_i\right)\dot q_i\dot q_j-U\left(q_1,q_2,\ldots,q_N\right)$[1]. נניח כי יש לפוטנציאל מינימום עבור q_{i0}. נסמן ב- $x_i=q_i-q_{i0}$ את התזוזה משיווי משקל. נבטא את הלגרנג'יאן במע' בצורה אחרת –

[1] ראה סעיף 1.7 לגבי הלגרנג'יאן של מע' חלקיקים

$$a_{ij}(q_i)\dot q_i \dot q_j = \underbrace{a_{ij}(x_i+q_{i0})}_{\substack{\text{my intention is } a_{ij} \text{ as} \\ \text{a function of } (x_i+q_{i0})}} *(\dot{x_i + q_{i0}})*(\dot{x_j + q_{j0}}) = a_{ij}(x_i+q_{i0})*(\dot{x_i})*(\dot{x_j})$$

.

$$U(q_i)=U(q_{i0}+x_i)=U(q_{i0})+\sum_{i=1}^{N}\left.\frac{\partial U}{\partial q_i}\right|_{q_{i0}} x_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial q_i q_j}\right|_{q_{i0}} x_i x_j + O(x^3)$$

אם נגדיר $a_{i,j}=m_{i,j}$ נוכל לקבל כי $L=\frac{1}{2}\sum_{ij} m_{i,j}\dot x_i \dot x_j - U(q_1,q_2,...,q_N)$. באמצעות משוואת EL נמצא את משוואות התנועה –

$$\frac{\partial}{\partial \dot x_k}\frac{1}{2}\sum_{ij} m_{i,j}\dot x_i \dot x_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} m_{i,j}\left(\frac{\partial \dot x_i}{\partial \dot x_k}\dot x_j+\frac{\partial \dot x_j}{\partial \dot x_k}\dot x_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{ij} m_{i,j}\left(\delta_{i,k}\dot x_j+\delta_{j,k}\dot x_i\right)=\frac{1}{2}\sum_{j} m_{k,j}\dot x_j+\frac{1}{2}\sum_{i} m_{k,i}\dot x_i$$

ובאופן דומה $\frac{\partial L}{\partial x_k}=\sum_i k_{k,i}x_i$. בסה"כ קיבלנו $\sum_i m_{k,i}\ddot x_i+\sum_i k_{k,i}x_i=0$.

כלומר הפורמליזם המתמטי בעצם מציג כי כל הפתרונות של מערכת אוסצילטורים מצומדים ניתנים ע"י מציאת ע"ע למטריצה $\overline{\overline{A}}=K-\omega^2 M$. הדטרמיננטה של המטריצה הזו תניב פולינום כפונקציה של ω לו נמצא שורשים שיהיו אופני התנודה הנורמליים. ע"מ למצוא אמפליטודות נמצא וקטורים עצמיים.
היות והמטריצה הזו היא סימטרית ממשית ולכן הרמיטית ניתן ע"י מכפלה במטריצה אוניטרית (מטריצת סיבוב) למצוא מערכת צירים שבה המטריצה מלוכסנת כלומר בהכרח קיימים למטריצה n ערכים עצמיים.

4.4 כמה נק' חשובות פחות (אך שוות אזכור)

- חשוב להזכיר את האופציה להציג את הפתרון עם תנאי נרמול
תנאי נרמול הוא דרך להציג את הפתרון כך שמי שמסתכל עליו יידע שהוא סטנדרטי. מעין הסכם שבצורת ההצגה של הפתרון. תנאי הנרמול מציג את האמפליטודה של הפתרון כך שתקיים $A_i^\dagger \overline{\overline{m}} A_i=1$. לדוגמה עבור ω_2 נבצע נרמול ונקבל

$$|A_1|^2 m+|A_2|^2 0+|A_3|^2 m=1\rightarrow\begin{cases}A_1=\frac{1}{\sqrt{2m}}\\ A_3=-\frac{1}{\sqrt{2m}}\end{cases}$$

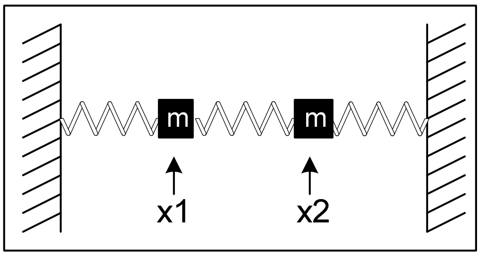
- בבעיה זו האנרגיה הקינטית וגם האנרגיה הפוטנציאלית היא פונק' קוודרטית של הקואורדינטות. לכן ניתן להציג את הלגרנג'יאן כ- $L=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} m_{\alpha,\beta}\dot\eta_\alpha\dot\eta_\beta-k_{\alpha,\beta}\eta_\alpha\eta_\beta$ [2]. כלומר העברנו את הבעיה לבעית קואורדינטות מוכללות.
המטריצות $m_{\alpha,\beta}$ ו- $k_{\alpha,\beta}$ הן סימטריות כי כך הוגדרו. הרי זה לא משנה איפה נמצא האינדקס α ובאיזה צד נמצא האינדקס β. אם נוכל להציג את הבעיה באופן שבו המטריצות $m_{\alpha,\beta}$ ו- $k_{\alpha,\beta}$ הן אלכסוניות אז בעצם מצאנו הצגה לבעיה בקואורדינטות כאלה שאין צימוד בין האוסצילטורים. הרי היות והמטריצות אלכסוניות, בעצם אין כל צימוד בין זוג אוסצילטורים. נצטרך לחפש טרנספורמציה אשר מלכסנת את זוג המטריצות. היות והן סימטריות בטוח ניתן למצוא מטריצה אחת שמקיימת כי $\begin{matrix}A^T m_{\alpha,\beta}A=D_1\\ A^T k_{\alpha,\beta}A=D_2\end{matrix}$ (ע"פ משפט מאלגברה 1מ). לכן בטוח קיימת בחירה כלשהיא של מערכת קואורדינטות שבהן הבעיה מוצגת כמערכת של אוסצילטורים בלתי מצומדים.

- בפיתוח לתנודות קטנות נפתח את משוואות התנועה לסדר ראשון אך את L נפתח לסדר שני היות והוא תלוי בקואורדינטות ביחס ריבועי !!!

[2] ראה סעיף 1.7 לגבי הלגרנג'יאן של מע' חלקיקים

4.5 דוגמאות

4.5.1 דוגמא 1



איור מספר 5 –4.5.1 דוגמא 1

משוואות הכוחות הן $\begin{matrix} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k\left(x_2 - x_1\right) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k\left(x_2 - x_1\right) \end{matrix}$. ושוב $\sum_i m_{k,i}\ddot{x}_i + \sum_i k_{k,i}x_i = 0$. נניח כי $x_i = A_i e^{i\omega t}$.

נציב את זה ומתוך כך נקבל $\sum_i -\omega^2 m_{k,i}A_i e^{i\omega t} + k_{k,i}A_i e^{i\omega t} = 0$ או $\sum_i \left(k_{k,i} - \omega^2 m_{k,i}\right)A_i = 0$. נסמן את המשוואה בכתב מטריצי - $\left(\bar{\bar{k}} - \omega^2\bar{\bar{m}}\right)\bullet\bar{A} = 0$ (שני קווים מסמלים מטריצה ואילו קו אחד יסמל וקטור). לבעיה זו קיים פתרון לא טריוויאלי אם"ם $\det\left(\bar{\bar{k}} - \omega^2\bar{\bar{m}}\right) = 0$. התוצאה תהיה פולינום של ω^2 מסדר N. עבור הבעיה הספציפית לעיל נקבל

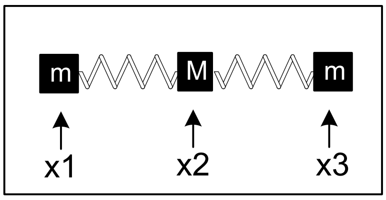
$$\begin{vmatrix} \left(-m\omega^2 + 2k\right) & -k \\ -k & \left(-m\omega^2 + 2k\right) \end{vmatrix} = \left(-m\omega^2 + 2k\right)^2 - k^2 = 0 \rightarrow$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

מצאנו כי למערכת קיימים שני אופני תנודה נורמליים. האחד עבור ω_2 ובמצב זה ניתן לקבל כי $A_1 = A_2$ כלומר כל המערכת זזה ביחד. השני עבור ω_1 ובמצב זה ניתן לקבל כי $A_1 = -A_2$. כלומר הקפיצים זזים בכיוון מנוגד האחד לשני. כעת היות והמע' הינה הומוגנית, כל סופרפוזיציה של הפתרונות לעיל הוא פתרון.

4.5.2 דוגמא 2 (מולקולה תלת אטומית – מתוך לנדאו ליפשיץ)

במצב של ש"מ אורך הקפיצים הוא b. מהשרטוט ניתן לראות כי במצב זה מתקיים $b = x_{02} - x_{01} = x_{03} - x_{02}$.



איור מספר 6 –4.5.2 דוגמא 2 (מולקולה תלת אטומית – מתוך לנדאו ליפשיץ)

האנרגיה הפוטנציאלית בבעיה נתונה ע"י $U = \frac{1}{2}k\left(x_2 - x_1 - b\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(x_3 - x_2 - b\right)^2$. נבצע מעבר משתנים.

$$\eta_1 = x_1 - x_{01}$$
$\eta_2 = x_2 - x_{02}$. כעת נקבל $U = \frac{1}{2}k\left(\eta_2 - \eta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\eta_3 - \eta_2\right)^2$. נצמצם מעט את הביטוי ונקבל
$$\eta_3 = x_3 - x_{03}$$
$U = \frac{1}{2}k\left(\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \eta_3^2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2\eta_3\right)^2$. נוכל לרשום את האנרגיה הפוטנציאלית אחרת

$U = \sum_{\alpha,\beta} k_{\alpha,\beta}\eta_\alpha\eta_\beta$ כאשר $k_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 U}{\partial\eta_\alpha \partial\eta_\beta}$. לכן נקבל - $\bar{\bar{m}} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}, \bar{\bar{k}} = \begin{pmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k-k & \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}$

נשים לב כי ולכן $\dot{x}_i = \dot{\eta}_i$ האנרגיה הקינטית בבעיה היא $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\eta}_1^2 + \dot{\eta}_3^2\right)^2 + \frac{1}{2}M\dot{\eta}_2^2$.

הלגרנג'יאן יהיה נתון ע"י $\sum_i m_{k,i}\ddot{x}_i + \sum_i k_{\alpha,\beta}x_i = 0$

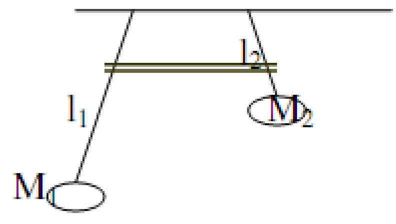
כעת ע"מ למצוא פתרון לא טריוויאלי נחפש $\det\left(\bar{\bar{k}} - \omega^2\bar{\bar{m}}\right) = 0$. פתרון של הדטרמיננט הזה מניב את הפולינום $\omega^2\left(k - \omega^2 m\right)\left[k\left(M + 2m\right) - \omega^2 Mm\right]$ ושורשי הפולינום הנ"ל הם כמובן

$$\omega_1 = 0, A_1 = A_2 = A_3 = 0$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, A_1 = -A_3, A_2 = 0$$
$$\omega_3 = \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}, A_1 = A_3 = \frac{1}{\sqrt{2m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)}}, A_2 = \frac{-1}{M\left(2 + \frac{M}{m}\right)}$$

מצאנו את אופני התנודה הנורמליים ואת האמפליטודות המתאימות. ω_1 הוא עבור מצב שבו כל המע' זזה ביחד במהירות שווה. ω_2 הוא עבור מצב שבו שתי המסות הקטנות זזות לכיוונים מנוגדים והמסה המרכזית אינה זזה. ω_3 אינו מצב אינטואיטיבי אך ניתן להבין את אופי התנועה ע"י התבוננות בפתרון.

4.5.3 דוגמא 3

מצא את התדירויות העצמיות עבור שתי מטוטלות המחוברות בקפיץ, אך אורכן אינו זהה.



איור מספר 7 –4.5.3 דוגמא 3

נרשום את הלגרנג'יאן של הבעיה.

האנרגיה הפוטנציאלית כובדית נתונה בבעיה ע"י $U_g = M_1 g L_1\left(1 - \cos\theta_1\right) + M_2 g L_2\left(1 - \cos\theta_2\right)$. האנרגיה הפוטנציאלית קפיצית בבעיה נתונה ע"י $U_k = \frac{1}{2}k\left(L_1\sin\theta_1 - L_2\sin\theta_2\right)^2$. והאנרגיה הקינטית בבעיה נתונה ע"י $T = \frac{1}{2}M_1\left(L_1\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\left(L_2\dot{\theta}_2\right)^2$. לכן הלגרנג'יאן נתון ע"י

$$L = \frac{1}{2}M_1\left(L_1\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}M_2\left(L_2\dot{\theta}_2\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(L_1\sin\theta_1 - L_2\sin\theta_2\right)^2 - M_1 g L_1\left(1 - \cos\theta_1\right) - M_2 g L_2\left(1 - \cos\theta_2\right)$$

ולאחר זריקת קבועים וביצוע קירוב תנודות קטנות נקבל

$$L=\frac{1}{2}M_1\left(L_1\dot{\theta}_1\right)^2+\frac{1}{2}M_2\left(L_2\dot{\theta}_2\right)^2-\frac{1}{2}k\left(L_1\theta_1-L_2\theta_2\right)^2-M_1gL_1\left(\frac{\theta_1^2}{2}\right)-M_2gL_2\left(\frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

ע"פ משוואות EL נקבל

$$M_1L_1^2\ddot{\theta}_1+kL_1\left(L_1\theta_1-L_2\theta_2\right)+M_1gL_1\theta_1=0$$

$$M_2L_2^2\ddot{\theta}_2-kL_2\left(L_1\theta_1-L_2\theta_2\right)+M_2gL_2\theta_2=0$$

נציע פתרון מתנדנד מהצורה $Ae^{i\omega t}$ ונציבו במשוואות EL. נקבל

$$-\omega^2M_1L_1^2A_1+kL_1\left(L_1A_1-L_2A_2\right)+M_1gL_1A_1=0$$

$$-\omega^2M_2L_2^2A_2-kL_2\left(L_1A_1-L_2A_2\right)+M_2gL_2A_2=0$$

או בצורה מטריצית $\begin{pmatrix}-\omega^2M_1L_1^2+kL_1^2+M_1gL_1 & -kL_1L_2\\ -kL_1L_2 & -\omega^2M_2L_2^2+kL_2^2+M_2gL_2\end{pmatrix}$. ע"מ שתמיד יהיה פתרון נדרוש כי

$$\begin{vmatrix}-\omega^2M_1L_1^2+kL_1^2+M_1gL_1 & -kL_1L_2\\ -kL_1L_2 & -\omega^2M_2L_2^2+kL_2^2+M_2gL_2\end{vmatrix}=0$$

כלומר

$$\left(-\omega^2M_1L_1^2+kL_1^2+M_1gL_1\right)\left(-\omega^2M_2L_2^2+kL_2^2+M_2gL_2\right)-k^2L_1^2L_2^2=0$$

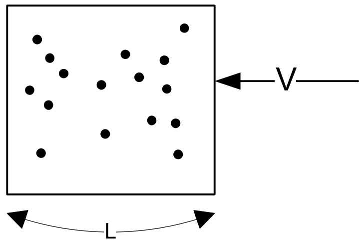
$$\omega^4M_1M_2L_1^2L_2^2--\omega^2\left(M_1L_1^2M_2gL_2-M_2L_2^2M_1gL_1\right)+M_1gL_1M_2gL_2-k^2L_1^2L_2^2=0$$

5. בעיות פיזור

5.1 הגדרות

5.1.1 חתך פעולה

חתך הפעולה לפיזור או *חתך הפעולה* הינו מושג בסיסי בתורת הפיזור המוגדר כיחס בין מספר החלקיקים המפוזרים ליחידת זמן על ידי מטרה, לבין שטף החלקיקים הפוגעים במטרה (מספר חלקיקים העוברים דרך יחידת שטח במשך יחידת זמן).
נשאלת השאלה מהו מספר ההתנגשויות שעושה החלקיק הקטן במעבר אחד דרך הקופסה. ההנחה היא שהחלקיק נע כל כך מהר שהחלקיקים בהם הוא מתנגש אינם משפיעים עליו. גודל זה נקרא החתך פעולה.
התשובה הוא כי $N \propto nL\pi R^2$. כאשר n היא מספר החלקיקים בקופסה ליח' נפח. הביטוי מוכפל ב- πR^2 שהוא בעצם אלמנט שטח של החלקיק שמתנגש בחלקיקים שבקופסה.

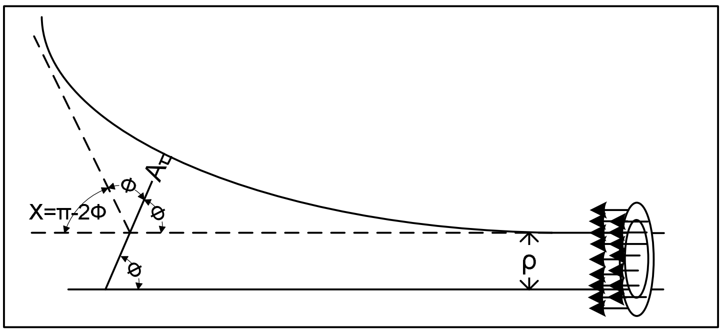


איור מספר 8 – 5.1.1 חתך פעולה

באופן כללי ניתן לכתוב כי מספר ההתנגשויות שעושה החלקיק הקטן במעבר אחד דרך הקופסה הוא $N \propto nL\sigma$ כאשר σ הוא בעל יחידות של שטח.
כעת נשאלת השאלה מהו הזמן הממוצע בין ההתנגשויות t? ניקח את הזמן שהחלקיק מבלה בתיבה ונחלק את זה במספר ההתנגשויות. מתוך כך נקבל $\boxed{t = \dfrac{L/V}{nL\pi R^2} = \dfrac{1}{nV\sigma}}$.

5.2 חתך פעולה במקרה של פיזור ע"י כח מרכזי

נגדיר כמה מושגי יסוד
ρ - Impact parameter
A - הנק' הקרובה ביותר למרכז הכח
χ - זווית הפיזור



איור מספר 9 – 5.2 חתך פעולה

נתבונן בטבעת של חלקיקים שנעים לעבר כח מרכזי. נגדיר כ- F את מספר החלקיקים לשטח ליחידת זמן כלומר שטף.
כעת החלקיקים שנמצאים בין ρ ל- $\rho + d\rho$ מפוזרים בזווית של χ עד $\chi + d\chi$. נגזיר כ- dN את מספר החלקיקים שהתפזרו לתחום χ עד $\chi + d\chi$ ליח' זמן. dN יהיה בעצם שווה לשטח הטבעת כפול השטף - $dN = F2\pi\rho d\rho$.

$d\sigma = \frac{dN}{F}$ כאשר $d\sigma$ הוא חתך פעולה דיפרנציאלי. קיבלנו כי $d\sigma = 2\pi\rho d\rho$. נרצה למצוא קשר בין ρ ל- χ .
כך נמצא את מספר החלקיקים שעובר דרך יחידת שטח עבור זוויות פיזור מסויימות.
הביטוי לאנרגיה בבעיה הוא

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{m\left(v_x + v_y + v_z\right)^2}{2} + U(r) = \frac{m\left(v_x\right)^2}{2} + \frac{m\left(v_y + v_z\right)^2}{2} + U(r) =$$

$$= \frac{m\left(v_x\right)^2}{2} + \frac{m\left(v_y + v_z\right)^2}{2} + U(r) = \frac{m\left(v_x\right)^2}{2} + \frac{m^2 r^2\left(v_y + v_z\right)^2}{2mr^2} + U(r) =$$

$$= \frac{m\left(v_x\right)^2}{2} + \frac{J^2}{2mr^2} + U(r)$$

כעת נבחן את הביטוי לתנ"ז - $J = mr \underbrace{v}_{v_x + v_y} = mr*(r\frac{d\phi}{dt}) = mr^2\frac{d\phi}{dt} \rightarrow dt = mr^2\frac{d\phi}{J}$

נקבל כי

$$\frac{m\left(v_x\right)^2}{2} = E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r) \rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r)\right)} \rightarrow$$

$$\frac{Jdr}{mr^2 d\phi} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r)\right)} \rightarrow$$

$$d\phi = dr\frac{J}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r)\right)}} \rightarrow$$

$$\phi = \int_{r=\infty}^{r_{\min}} \frac{J}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{J^2}{2mr^2} - U(r)\right)}}dr$$

בבעיה קיים שימור תנ"ז (כח מרכזי) ולכן *התנע באינסוף שווה לתנע בכל זמן* ולכן $J = m\rho v(\infty)$. מצאנו קשר ϕ ל- χ . והרי $\chi = \pi - 2\phi$. כלומר מצאנו קשר בין ρ ל- χ .
מתוך כל זה יוצא (בסופו של דבר...) כי חתך הפעולה הדיפרנציאלי הוא

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{2\pi\rho}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\chi \sin\chi = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\Omega$$

ובסופו של דבר קיבלנו $\boxed{d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right| d\Omega}$ כאשר $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ היא זווית מרחבית.

5.3 פיזור Rutherford\נוסחת Rutherford

אחד היישומים החשובים לנוסחה לעיל הוא למקרה של פיזור חלקיקים טעונים בשדה חשמלי. נציב את הפוטנציאל $U=\frac{\alpha}{r}$ בנוסחה לעיל $\phi=\int_{r=\infty}^{r_{\min}}\frac{J}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{J^2}{2mr^2}-U(r)\right)}}dr$ ופתרון של האינטגרל מגיעים לנוסחה כי

$$\boxed{d\sigma=\left(\frac{\alpha}{2mV_\infty^2\sin^2(\theta/2)}\right)^2 d\Omega}.$$

5.4 פיזור בזוויות קטנות

כבר ראינו כי $\phi=\int_{r=\infty}^{r_{\min}}\frac{J}{mr^2}\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{J^2}{2mr^2}-U(r)\right)}}dr$, $d\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\Omega$. ננסה לפתור את הבעיה הזו עבור $\chi\ll 1$. נסתכל על מרכיב המהירות בכיוון y (כאשר x כיוון התקדמות החלקיקים המקורי). מתקיים כי $\sin\chi\cong\chi=V_y{}'/\left|V_\infty{}'\right|$. הקשר בין המהירות לפוטנציאל נתון ע"י $V'_y=\int_{-\infty}^{\infty}a_y dt=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\partial U(r)}{\partial y}dt$. נקרב את החלקיק המוסט לקו ישר - $V'_y=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\partial U\left(\sqrt{x^2+\rho^2}\right)}{\partial y}dt=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-\partial U(x,\rho)}{\partial y}\frac{dx}{V_\infty}$.

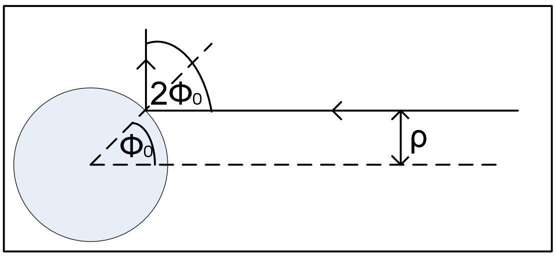
נגזור את הפוטנציאל לפי המשתנים החדשים -

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{dU}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\underbrace{=}_{r=\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dU}{dr}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{dU}{dr}\frac{\rho}{r}$$
$$\frac{dx}{dr}=\frac{r}{\sqrt{r^2-y^2}}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\rho^2}}.$$

מזה נקבל $V'_y=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-dU}{dr}\frac{\rho}{r}\frac{rdr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}\frac{1}{V_\infty}$. ומזה נקבל כי $\boxed{\chi=V'_y/V_\infty}$

5.4.1 דוגמא 1

פיזור ע"פ כדור כאשר הפוטנציאל הוא
$$\begin{matrix}U(r<R)=\infty\\U(r>R)=0\end{matrix}.$$



איור מספר 10 –5.4.1 דוגמא 1

מתקיים כי $\rho=a\sin\phi_0$. נגדיר $\pi-\chi=2\phi_0$ ולכן $\rho=a\cos(\chi/2)$.

$d\sigma=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\Omega=\frac{a\cos(\chi/2)}{\sin\chi}\left|\frac{-1}{2}a\sin(\chi/2)\right|d\Omega=\frac{a^2}{4}d\Omega$. נבצע אינטרציה ונקבל $\sigma=\pi a^2$.

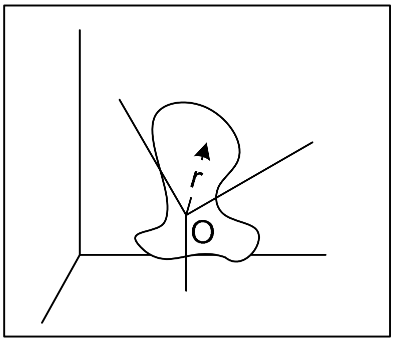
6. גוף קשיח

6.1 הקדמה

גוף קשיח מוגדר כגוף שבו המרחק בין כל שני חלקיקים המרכיבים אותו הוא קבוע.
לכל אורך פרק זה נעשה שימוש בשתי מערכות ייחוס. מערכת ייחוס קרטזית XYZ אינרציאלית ומערכת x_1, x_2, x_3 שצמודה למערכת הגוף הקשיח (לעתים אינה אינרציאלית). נוח להגדיר את ראשית מערכת הצירים שנעה עם הגוף בנק' מרכז המסה.

6.2 מהירות זוויתית

חלק זה עוסק בהוכחה כי עבור גוף קשיח מתקיים כי מהירות כל נק' בגוף במערכת הקבועה הוא $v = V + \Omega \times r$
כלומר ללא תלות בבחירת במערכת הצירים הצמודה, הביטוי למהירות הנק' בגוף יורכב מהמהירות הזוויתית Ω.
כאשר V היא מהירות מרכז המסה (או המהירות של הנק' בה בחרנו את ראשית הצירים) במערכת הקבועה,
Ω היא המהירות הזוויתית (מן הסתם במערכת הקבועה, הרי במערכת הצמודה לגוף לא קיימת מהירות זוויתית)
ו r הוא הרדיוס וקטור במערכת הצמודה לגוף ממרכז המסה (או המהירות של הנק' בה בחרנו את ראשית הצירים) לנק' שבה אנו חפצים לדעת מהי המהירות.



איור מספר 11 – מהירות זוויתית

ידוע כי עבור בחירת הראשית במרכז המסה מתקיים כי $\boxed{v = V + \Omega \times r}$. כעת נבחר נק' ראשית אחרת במרחק a מהראשית הקודמת O ונקרא לה O'. נגדיר כי הרדיוס וקטור מהנק' לראשית O' תיקרא $r = r' + a$. עבור אותה הנק' מתקיים $v = V' + \Omega' \times r'$ מצד אחד, ומצד שני $v = V + \Omega \times a + \Omega \times r'$ ואילו חייב להתקיים שוויון בין שני הביטויים (כי זו אותה המהירות במערכת הקבועה, הרי רק החלפנו את הבחירה של המערכת הצמודה). לכן - $\begin{matrix} V + \Omega \times a = V' \\ \Omega' = \Omega \end{matrix}$. הוכחנו בזאת כי המהירות הזוויתית של הגוף במערכת הקבועה אינו תלוי בבחירה של מערכת הצירים הצמודה. כל הבחירות של מערכות הצירים הצמודות הינן בעלות גודל מהירות הזוויתית שווה ובעלות כיוונים מקבילים של וקטורי המהירות הזוויתית. מהקשר השני ניתן לראות כי מהירות ההעתק של הגוף ביחס לבחירות שונות של המערכת הצמודה אכן משפיעה.

6.3 טנזור האינרציה

ידוע מפיסיקה 1מ' כי האנרגיה של גוף קשיח נתונה ע"י $T = \frac{1}{2}\mu V^2 + \frac{1}{2} I \sum_{i,j} \omega_i \omega_j$. נשאלת השאלה איך מחשבים את I עבור גוף כללי.

$$\boxed{I_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m\left(y^2 + z^2\right), -\sum mxy, -\sum mxz \\ -\sum mxy, \sum m\left(x^2 + z^2\right), -\sum myz \\ -\sum mxz, -\sum myz, \sum m\left(x^2 + y^2\right) \end{bmatrix}}.$$

אם הגוף בעל התפלגות מסה רציפה נחליף את הסכום הדיסקרטי באינטגרל והמסה הופכת לאלמנט מסה ρdV.
ע"י בחירה "נכונה" כל מערכת הצירים ניתן להביא את הטנזור למבנה אלכסוני. לבחירה כזו של מערכת צירים נקרא מערכת צירים ראשיים ורכיבי מומנט האינרציה הראשיים. נסמנם ע"י I_1, I_2, I_3 המתאימים לכיוונים על המערכת הצמודה לגוף x_1, x_2, x_3.

בדיקה טובה לחישוב נכון של מומנט האינרציה הוא כי תמיד מתקיים $\boxed{I_i + I_j \geq I_k}$.

גוף שבו שלושת רכיבי מומנט האינרציה המערכת צירים ראשיית הם שונים ייקרא סביבון אסימטרי. גוף שבו קיים שוויון בין שניים מהרכיבים ייקרא סביבון סימטרי.

ניתן למצוא את התנע הזוויתי במערכת הגוף ע"י הקשר $\boxed{\vec{J_i} = I_{ik}\vec{\omega_k}}$ (בהנחה ש ω היא במערכת זו) וכאשר אני במערכת צירים ראשיים מתקיים $\boxed{\vec{J_1} = I_1\vec{\omega_1}, \vec{J_2} = I_2\vec{\omega_2}, \vec{J_3} = I_3\vec{\omega_3}}$.

נקודה חשובה ושימושית היא כי עבור גוף אשר נמצא במישור xy בלבד מתקיים כי $I_{xx} + I_{yy} = I_{zz}$.

6.3.1 משפט הציר המקביל

אם נבצע העתקה לאורך אחד הצירים נקבל כי $\boxed{I' = I + \mu l^2}$ כאשר רכיב הטנזור לאורך ציר ההעתקה אינו משתנה. זהו משפט שטיינר\משפט הציר המקביל שאנו מכירים מפיסיקה 1מ'.

6.3.2 דוגמאות

6.3.2.1 דוגמא 1

i. הביטו על גוף מישורי למשל פלטה, והתעלמו מהציר הניצב למישור. הוכיחו כי אם לגוף תי מערכות צירים שונות (לא ניצבות) שבהן הוא מלוכסן – אז הוא מלוכסן בכל מערכת צירים באותו מישור ולכן פרופורציוני למטריצת היחידה

ii. חשבו את מומנט האינרציה של פלטה מישורית בצורת משולש שווה צלעות ושל משולש שווה שוקיים.

פתרון

i. נניח כי קיימת מערכת צירים א' בה טנזור האינרציה מלוכסן כלומר $I_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ומערכת נוספת ב' שאינה ניצבת למערכת א' בה גם מתקיים כי טנזור האינרציה מלוכסן כלומר $I_2 = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. היות ומערכת ב' מסובבת ביחס לא' המעבר מ I_1 ל- I_2 נתון ע"י מטריצה אוניטרית. נזכיר כי במטריצה אוניטרית מתקיים כי $R^T = R^{-1}$ כלומר מתקיים $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$. ומכך נקבל תנאים על הטנזורים. $\begin{pmatrix} \theta \neq n\pi/2 \\ \alpha\cos^2\theta + \beta\sin^2\theta = \delta \\ \alpha\sin^2\theta + \beta\cos^2\theta = \gamma \\ (\alpha-\beta)\cos\theta\sin\theta = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \beta$. כלומר טנזור האינרציה I_1 פרופרציוני למטריצת היחידה. ולכן כל מטריצה אוניטרית שתפעל עליו תניב מטריצה מלוכסנת ולכן מלוכסן בכל מערכת שמסובבת ביחס למערכת א'.

ii. משולש שווה שוקיים – ע"פ משפט ידוע כי מרכז המסה של כל משולש הוא בשני שליש האורך מקודוקוד כלשהו במשולש לצלע שצלו. בחרתי משולש שזוויותיו הן $45, 45, 90$.

גובהו של המשולש שווה שוקיים הוא $\frac{a}{\sqrt{2}}$. משוואת הישר של הצלע הימנית היא $y = -x + a\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$I_{xx} = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} dy \int_{0}^{a\frac{\sqrt{2}}{3}-y} y^2 + \underbrace{z^2}_{=0} dx = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} y^2 a\frac{\sqrt{2}}{3} - y^3 dy =$$

$$2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} y^2 a\frac{\sqrt{2}}{3} - y^3 dy = y^3 a\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{y^4}{2}\Bigg|_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} = a^4\left(\frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{y^4}{2}\right) = 0.01388$$

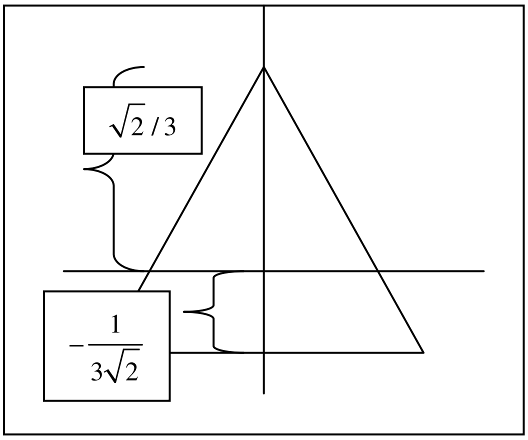
$$I_{yy} = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} dy \int_{0}^{a\frac{\sqrt{2}}{3}-y} x^2 + \underbrace{z^2}_{=0} dx = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} \frac{\left(a\frac{\sqrt{2}}{3} - y\right)^3}{3} dy = 0.04166$$

$$I_{zz} = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} dy \int_{0}^{a\frac{\sqrt{2}}{3}-y} y^2 + x^2 dx = 2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} \left(y^2 a\frac{\sqrt{2}}{3} - y^3 + \frac{\left(a\frac{\sqrt{2}}{3} - y\right)^3}{3} \right) dy = 0.055$$

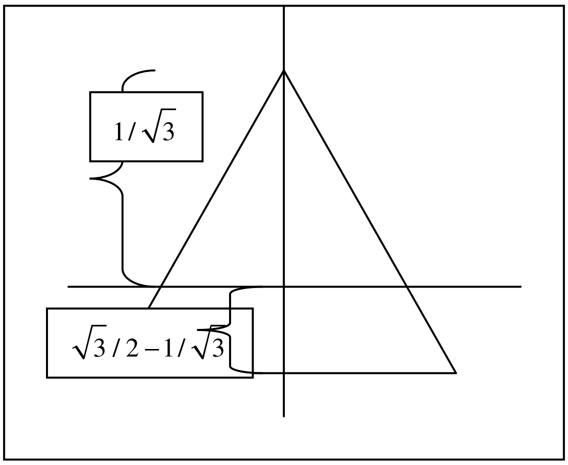
$$I_{xy} = -2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} dy \int_{0}^{a\frac{\sqrt{2}}{3}-y} xydx = -2\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}3}a}^{\frac{\sqrt{2}}{3}a} y\frac{\left(a\frac{\sqrt{2}}{3} - y\right)^2}{2} dy = 0.00589$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$



איור מספר 12 –6.3.2.1 דוגמא 1



איור מספר 13 - 6.3.2.1 דוגמא 1

משוואת הישר של הצלע הימנית של המשולש היא $y=\frac{-x}{\sqrt{3}}+\frac{a}{\sqrt{3}}$.

נחשב את איברי טנזור האינרציה

$$I_{yy}=I_{xx}=2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}dy\int_{0}^{a-\sqrt{3}y}y^2+\underbrace{z^2}_{=0}dx=2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}ay^2-\sqrt{3}y^3dy=$$

$$2\left(\frac{a}{3}y^3-\frac{\sqrt{3}}{4}y^4\Big|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}\right)=2\left(\frac{a}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^3-\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^4-\frac{a}{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}a\right)^4\right)=$$

$$=2a^4\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{8}{27\sqrt{3}}+\frac{4}{9\sqrt{3}}\right)=2a^4\left(\frac{5}{9\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{36}+\frac{8}{27\sqrt{3}}\right)$$

$$I_{zz}=2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}dy\int_{0}^{a-\sqrt{3}y}y^2+x^2dx=2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}ay^2-\sqrt{3}y^3+\frac{\left(a-\sqrt{3}y\right)^3}{3}dy=2.144a^4$$

$$I_{xy}=-2\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}dy\int_{0}^{a-\sqrt{3}y}yxdx=-\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}y\left(a-\sqrt{3}y\right)^2dy=$$

$$=-\int_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}\left(ya^2-2ay\sqrt{3}y+3y^3\right)dy=-\left(a^2\frac{y^2}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}ay^3+\frac{3}{4}y^4\right)\Bigg|_{-\frac{2}{\sqrt{3}}a}^{\frac{1}{\sqrt{3}}a}=$$

$$-\left(\frac{a^4}{6}-\frac{2}{9}a^4+\frac{3}{36}a^4-\left(a^4\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}a^4\frac{8}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{3}a^4\right)\right)=$$

$$-\left(\frac{a^4}{6}-\frac{2}{9}a^4+\frac{3}{36}a^4-\left(a^4\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}a^4\frac{8}{3\sqrt{3}}+\frac{4}{3}a^4\right)\right)=3.75a^4$$

$$I_{xz}=I_{yz}=0$$

6.4 זוויות אוילר

ניתן לתאר את האוריינטציה של גוף במרחב ע"י 3 קואורדינטות של מרכז המסה של (מערכת XYZ) ושלוש נוספות (זוויות) המתארות את מצבו ביחס למערכת XYZ במערכת $x_1x_2x_3$. לשם נוחות נגדיר כי במצב בו שלושת הזוויות שוות לאפס המערכות מתלכדות.

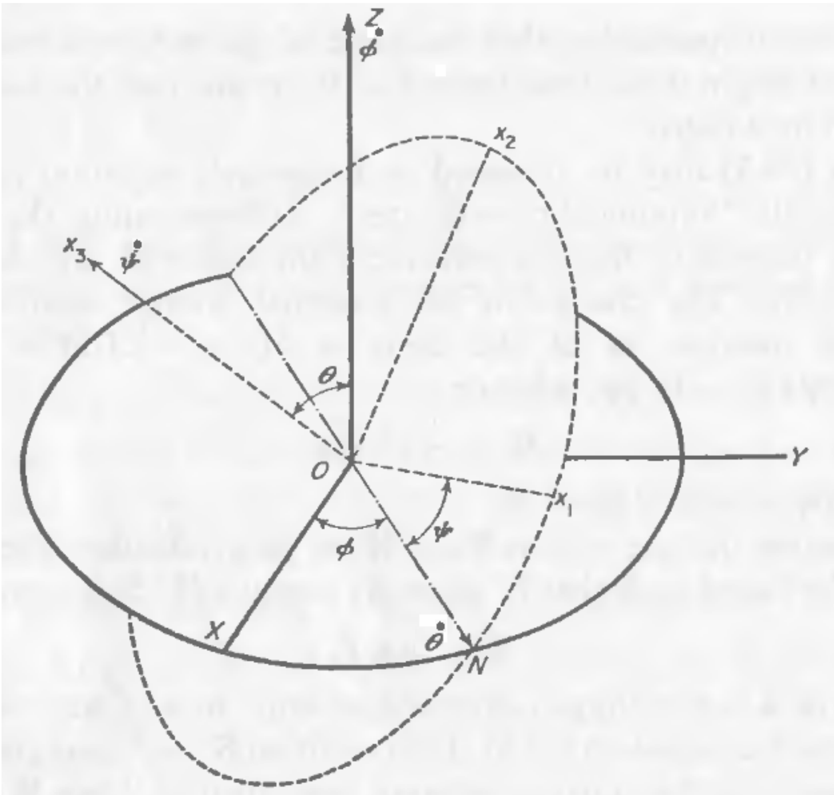
נגדיר כי ϕ היא הזווית בין ציר ה- X לבין קו החיתוך של זוג מעגלים במישורים XY ו- x_1x_2 (Line of Nodes). ערכה $0<\theta<2\pi$

נגדיר כי θ היא הזווית בין ציר ה- Z לבין ציר x_3 (מעיין זווית הטייה). ערכה $0<\theta<\pi$.

נגדיר כי ψ היא הזווית בין קו החיתוך של זוג מעגלים במישורים XY ו- x_1x_2 (Line of Nodes) לבין הציר x_1 . ערכה $0<\theta<2\pi$.

ניתן לבטא את רכיבי המהירות הזוויתית והקשר שלהן לזוויות אוילר –

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega_1 &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi\\ \Omega_2 &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi\\ \Omega_1 &= \dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}\end{aligned}}$$



איור מספר 14 –6.4 זוויות אוילר

6.5 משוואות אוילר

מסתבר שהקשר הפשוט והנוח ביותר בין רכיבי התנע הזוויתי לבין המהירות הזוויתית קיים במערכת $x_1x_2x_3$. ננסה לקשור את את גדלי התנע הזוויתי במערכת זו למערכת XYZ . קצב השינוי של וקטור כללי הנמצא במערכת $x_1x_2x_3$ כפי שנצפה במערכת $x_1x_2x_3$ הוא $\boxed{\frac{dA}{dt}=\frac{d'A}{dt}+\Omega\times A}$. הגודל $\frac{d'A}{dt}$ מבטא את השינוי בוקטור המבוקש כתוצאה מתנועת מרכז המסה והרכיב השני מביע את סיבוב הגוף. כעת אף נשתמש בקשרים $\frac{d'P}{dt}+\Omega\times P=F,\quad \frac{d'J}{dt}+\Omega\times J=N$ ונפרק את הביטויים הללו לשלושת הצירים $x_1x_2x_3$ נקבל מערכת משוואות דפירנציאלית שפתרונה :

$$\boxed{\begin{aligned}I_1 d\Omega_1/dt+(I_3-I_2)\Omega_2\Omega_3&=N_1\\I_2 d\Omega_2/dt+(I_1-I_3)\Omega_1\Omega_3&=N_2\\I_3 d\Omega_3/dt+(I_2-I_1)\Omega_1\Omega_2&=N_3\end{aligned}}$$

אלו הן משוואות אוילר.

6.6 סביבונים

6.6.1 סביבון סימטרי חופשי

בסביבון סימטרי מתקיים $I_1=I_2\neq I_3$. היות וזהו סביבון סימטרי ניתן יהיה לבצע סיבוב שלו סביב ציר x_3 כלומר לשנות את זווית ψ בלי שנוכל לשים לב לכך במערכת XYZ. לכן נוח לבחור את מערכת $x_1x_2x_3$ כך ש $\psi=0$. לכן מהקשרים בסעיף 6.4 נקבל כי

$$\Omega_1=\dot\theta$$
$$\Omega_2=\dot\phi\sin\theta$$
$$\Omega_3=\dot\phi\cos\theta+\dot\psi$$

ולכן מתקיים

$T=\frac{1}{2}I_1\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}I_3\left(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi\right)^2$ (ניתן להגיע לקשרים אלו ע"י השימוש ב $I_1=I_2$).

נבחר את ציר ה- Z כך שיתלכד עם כיוון התנע הזוויתי. כעת מתקיים כי $J\parallel Z$ ובאופן רגעי מתקיים גם $x_1\parallel ON$ (ע"י בחירה חופשית). היות ו- $J=const$ מתקיים כי $\vec J_1=\vec J\bullet\hat x_1=I_1\Omega_1=0$ ולכן קיבלנו כי $\theta=const$. היות והוקטור $\vec J$ קבוע (סביבון חופשי) נקבל כי הוא נמצא במישור של x_2x_3. לכן ברגע זה מתקיים כי

$$J_2=J\sin\theta$$
$$J_3=J\cos\theta$$

. ע"י שימוש נוסף בקשרים מסעיף 6.4 נמצא כי

$$I_2\Omega_2=I_2\dot\phi\sin\theta=M_2=M\sin\theta\rightarrow\dot\phi=M/I_2$$
$$I_3\Omega_3=M_3=M\cos\theta\rightarrow\Omega_3=\left(M/I_3\right)\cos\theta$$

. תנועת הסביבון מורכבת מתנועתו סביב צירו x_3 ומתנועתו סביב ציר Z כלומר תנועת פרצסיה - $\boxed{\omega_{pr}=\dot\phi=M/I_2}$.

6.6.2 סביבון אחרים – כמה נקודות

- סביבון סימטרי לא חופשי

הלגנרג'יאן של סביבון סימטרי לא חופשי נתון ע"י

$L=\frac{1}{2}\left(I_1+\mu l^2\right)\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\sin^2\theta\right)+\frac{1}{2}I_3\left(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi\right)^2-\mu gl\cos\theta$. נמקם את המערכת הסטטית XYZ הנק' O בה הסביבון מחובר. ע"פ משפט שטיינר $I_1+\mu l^2=I_1'$.

- סביבון ספרי חופשי $I_1=I_2=I_3$

בסביבון ספרי חופשי במערכת צירים ראשיים וקטור התנע הזוויתי באותו כיוון ופרופורציונאלי למהירות הזוויתית.

6.7 דוגמאות

6.7.1 דוגמא 1

בשאלה זו ננתח את הסביבון המתהפך כשמסובבים אותו מספיק מהר (tippe top)
נביט על סביבון סימטרי ברדיוס R (הצורה של הסביבון היא כדור, אך מומנט האינרציה שלו סימטרי ולא כדורי. כלומר $I_1=I_2\neq I_3$). שמרכז המסה שלו ממוקם במרחק $\vec a$ ממרכז הכדור לאורך ציר הסימטריה $\hat 3$ של הסביבון. הסביבון מסתובב על שולחן שטוח, ונסמן את הציר הניצב לשולחן ב- Z.

i. תחילה נוכיח שבמערכת יש שמור תנועה $C=\vec M\bullet\left(R\hat z+\vec a\right)$ כשכרגיל M הוא התנע הזוויתי.

ii. נראה כי היות ו C קבוע, האנרגיה הקינטית של המערכת קטנה יותר כשמרכז המסה מעל מרכזהכדור לעומת מתחת למרכז הכדור.

iii. נראה כי אם הסביבון מסתובב מספיק מהר, המצב בו יש מינימום לאנרגיה הוא כשהסביבון מתהפך.

פתרון

i. המומנט כח הפועל על הסביבון הוא מהשולחן, והוא

$$N = \left(R\hat{z}+\vec{a}\right)\times F = \dot{M} \rightarrow$$

$$\dot{M}\bullet\left(R\hat{z}+\vec{a}\right) = \left(R\hat{z}+\vec{a}\right)\bullet\left(\left(R\hat{z}+\vec{a}\right)\times F\right) = 0$$

ידוע כי מתקיים תמיד $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ לכל נק' בסביבון. לכן $\dot{\vec{a}} = \vec{\omega}\times\vec{a}$. ולכן $\dot{a}$ ניצב ל- a.

כעת נבחר את מערכת הצירים כך ש- $\omega_2 = 0$. לכן $\overrightarrow{M}$ הוא במישור I_1, I_3 ולכן בהכרח מתקיים כי

M, a, ω נמצאים באותו מישור.לכן ישירות מהסעיפים הקודמים נובע כי $\dot{C} = 0 \rightarrow C = const$

ii. ידוע כי $C = const$. נבחן את שני המצבים, האחד כאשר מרכז המסה מעל נק' מרכז הכדור והשני כאשר מרכז המסה מתחת למרכז הכדור.

$$M_{up}\bullet\left(R\hat{z}+\vec{a}\right) = Const = M_{down}\bullet\left(R\hat{z}-\vec{a}\right) = Const \rightarrow$$
$$M_{down} > M_{up}, M = I\omega = 2E_k / \omega \rightarrow$$
$$E_{k\_down} > E_{k\_up}$$

iii. נבחן את הביטוי לאנרגיה של הסביבון. $E = \frac{1}{2}I\omega^2 + X$ כאשר X הוא גודל כלשהו אשר אינו תלוי במהירות הסיבוב. לכן כאשר ω מאוד גדול ניתן יהיה להזניח את X. וכעת מהנימוק של סעיף ii ברור כי ישנו מינימום לאנרגיה כאשר הסביבון הפוך.

6.7.2 דוגמא 2

כדור קשיח בעל מסה m ורדיוס R נמצא במעבדה בחלל.

i. איזה מומנט חיצוני N צריך להפעיל הכדור כדי שסיבובו סביב מרכז הכדור יהיה מתואר ע"י זוויות אוילר הבאות $\theta(t) = const, \phi(t) = \alpha t, \psi(t) = 2\alpha t$

ii. בזמן $t = t_1 = \frac{2\pi}{\alpha}$ מתאפס המומנט החיצוני. חשבו את רכיבי ω במערכת הגוף כתלות בזמן.

iii. מה יהיה רכיבי ω במערכת המעבדה עבור זמן $t > t_1$.

פתרון

i. נפרק את רכיבי התאוצות המהירויות הזוויתיות

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5},0,0 \\ 0,\frac{2mR^2}{5},0 \\ 0,0,\frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = 2\alpha + \alpha\cos\theta \rightarrow N_3 = 0 \\ \omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi = \alpha\sin\theta\cos 2\alpha t \rightarrow N_2 = -\frac{2mR^2}{5}2\alpha^2\sin\theta\sin 2\alpha t \\ \omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi = \alpha\sin\theta\sin 2\alpha t \rightarrow N_1 = \frac{2mR^2}{5}2\alpha^2\sin\theta\cos 2\alpha t \end{array} \right.$$

ii. נתון כי בזמן $t = \frac{2\pi}{\alpha}$ המומנטים מתאפסים. כלומר

$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta = 2\alpha + \alpha\cos\theta$$

$\omega_2 = \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi = \alpha\sin\theta\cos 2\alpha t = \alpha\sin\theta$. כאשר אלו גדלים קבועים שלא משתנים בזמן.

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi = \alpha\sin\theta\sin 2\alpha t = 0$$

iii. עבור זמן גדול מ t_1 או באופן כללי עבור כל זמן מתקיים

$$\left.\begin{cases}\omega_3 = 2\alpha + \alpha\cos\theta \\ \omega_2 = \alpha\sin\theta \\ \omega_1 = 0 \\ \theta = const \\ \phi = 2\pi \\ \psi = 4\pi\end{cases}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\omega_x = 0 \\ \omega_y = \omega_2 * \sin(90-\theta) - \omega_3 * \sin\theta = \alpha\sin\theta\cos\theta - 2\alpha\sin\theta + \alpha\cos\theta\sin\theta = -2\alpha\sin\theta \\ \omega_z = \omega_3 * \cos\theta + \omega_2 * \cos(90-\theta) = (2\alpha + \alpha\cos\theta)\cos\theta + \alpha\sin^2\theta = 2\alpha\cos\theta + \alpha\end{array}\right\}$$

7. פורמליזם המילטוניאני

7.1 משוואות המילטון

הפורמליזם הלגרנג'יאני איפשר לנו לתקוף בעיות ע"י הצגתן במרחב הקונפיגורציות בעל s ממדים תוך שימוש במשוואות EL (כלומר עלינו לפתור s משוואות מסדר שני – משוואות EL). הפורמליזם ההמילטוניאני יאפשר לנו לתקוף בעיות ע"י מעבר מלרחב הפאזה עם $2s$ ממדים(יהיה עלינו לפתור $2s$ משוואות מסדר ראשון – משוואות המילטון). המשוואות אשר יאפשרו לנו לעשות זאת נקראות משוואות המילטון. באמצעות טרנספורם לג'נדר ניתן לעבור מ - $L(q,\dot{q})$ ל- $H(p,q)$ (כאשר p הוא התנע הקנוני).

ההמילטוניאן מוגדר כ- $\boxed{H(p_i,q_i,t)=\sum_i p_i\dot{q}_i-L}$ והוא מקיים את משוואות המילטון - $\boxed{\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}}$.

היות והמשוואות הללו סימטריות במבנה שלהן הן נקראות משוואות קנוניות. אלו הן בעצם משוואות התנועה במרחב הפאזה.

נשים לב כי אם H לא תלוי מפורשות בזמן אז נקבל כי מתקיים שימור אנרגיה (ע"פ ההגדרה הלגרנג'יאנית של אנרגיה) – נגזור את ההמליטוניאן לפי הזמן $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i$. נציב את משוואות המילטון בביטוי $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\sum_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=0$. והרי נשים לב כי ההגדרה של ההמילטוניאן היא בדיוק הגדרת האנרגיה ע"פ סעיף 2.1. נשים לב כי גם מתקיים הקשר $\boxed{\frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}}$.

7.1.1 דוגמא

נניח $L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-e\phi(r)+e\vec{A}(r)\bullet\vec{v}$. סכום התנעים הקנוניים יהיה נתון ע"י $p=m\vec{v}+e\vec{A}(r)$ ו- H לכן נתון ע"י $H=m\vec{v}^2+e\vec{A}(r)\bullet\vec{v}-\frac{1}{2}m\vec{v}^2+e\phi(r)-e\vec{A}(r)\bullet\vec{v}=\frac{1}{2m}(\vec{p}-q\vec{A})^2+e\phi(r)$.

7.2 סוגרי פואסון

נניח כי $f(p,q,t)$ היא פונק' כלשהי. הנגזרת השלמה שלה לפי הזמן היא $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i$. ע"י שימוש במשוואות המילטון לביטוי בסכום נקבל כי $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$. נגדיר כי $\boxed{[g,f]=\sum_i\frac{\partial g}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}}$ לכל שתי פונק' f,g. סוגרים אלו נקראים סוגרי פואסון[3] ונקבל כי $\boxed{\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]}$. כעת נוכל לאמר כי f היא שמור תנועה אם ורק אם $[H,f]=0$ ומצאנו דרך למצוא קבועי תנועה !

כמה תכונות של סוגרי פואסון –

- $[f,g]=-[g,f]$
- $[f,const]=0$
- $[f+h,g]=[f,g]+[h,g]$
- $[f\bullet h,g]=f[h,g]+[f,g]h$

[3] אלו בדיוק הקומוטטורים המוכרים מפיזיקה קוונטית

- $\frac{d}{dt}[f,g]=\left[\frac{\partial f}{\partial t},g\right]+\left[f,\frac{\partial g}{\partial t}\right]$
- זהות יעקובי - $[f,[g,h]]+[g,[h,f]]+[h,[f,g]]=0$
- $[q_i,q_k]=0,\quad [p_i,p_k]=0,\quad [p_i,q_k]=\delta_{ik}$

7.3 טרנספורמציות קנוניות ופונק' יוצרות

הבחירה בקואורדינטות מוכללות q היא כידוע בחירה חופשית לחלוטין. לכן ניתן לומר כי עבור שתי בחירות של מערכות קואורדינטות q_i ו- Q_i מתקיים הקשר $Q_i=f(q_i,t)$ כלומר השתיים קשורות דרך טרנספורמציה (לעתים נקראת טרנס' נקודתית). היות ומשוואת והלגרנג'יאן אינו מושפע מבחירת הקואורדינטות, כך גם ההמילטוניאן. אך היות וההמילטוניאן פונק' של $2s$ משתנים קיימת בחירה הרבה יותר רחבה של טרנספורמציות (אחד היתרונות הגדולים של הפורמליזם ההמילטוניאני).

7.3.1 פונק' יוצרת וטרנס' קנונית

לעתים תחת טרנס' מבנה משוואות המילטון לא ישמרו על הצגתן הקנונית. אם הן כן שומרות על הצגה זו נאמר כי קיימת פונק' יוצרת ממבנה כלשהו (המתואר בהמשך),המקשרת בין גדלים חדשים וישנים בהמילטוניאנים, להמילטוניאן אם היא "יוצרת" H' כך ש $\dot{Q}=\frac{\partial H'}{\partial P},\ \dot{P}=\frac{-\partial H'}{\partial Q}$.

מבני הפונק' היוצרות הם –

פונק' יוצרת	נגזרות וקשרי הפונק' היוצרת	מקרים פשוטים
$F=f(q_i,Q_i,t)$	$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},P_i=-\frac{\partial f}{\partial Q_i}$	$f=q_iQ_i,\ \ Q_i=p_i,\ \ P_i=-q_i$
$F=f(q_i,P_i,t)$	$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},Q_i=\frac{\partial f}{\partial P_i}$	$f=q_iP_i,\ \ P_i=p_i,\ \ Q_i=q_i$
$F=f(p_i,Q_i,t)$	$q_i=-\frac{\partial f}{\partial p_i},P_i=-\frac{\partial f}{\partial Q_i}$	$f=p_iQ_i,\ \ Q_i=-q_i,\ \ P_i=-p_i$
$F=f(p,P,t)$	$q_i=-\frac{\partial f}{\partial p_i},Q_i=\frac{\partial f}{\partial P_i}$	$f=p_iP_i,\ \ Q_i=p_i,\ \ P_i=-q_i$

טבלה מספר 2 – 7.3.1פונק' יוצרת וטרנס' קנונית

בכל המקרים הללו מתקיים כי $\boxed{H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}}$. *כל טרנס' קנונית חייבת לקיים קשר זה* ! כמובן שאם הפונק' אינה תלויה מפורשות בזמן נקבל כי $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ ואז $H=H'$, כלומר ההמילטוניאן החדש מתקבל ע"י החלפת שמות המשתנים. כלומר ניתן להראות כי טרנס' היא קנונית ע"י מציאת הפונק' (ע"י שימוש בקשרים בטבלה מספר1 – מומנטי אינרציה של גופים שונים ופתרון של זוג משוואות דיפרנציאליות מצומדות) ובדיקה כי היא מקיימת את הקשר $H'=H+\frac{\partial f}{\partial t}$.

7.3.2 סוגרי פואסון וטרנס' קנונית

ניתן גם לוודא כי טרנס' היא קנונית אם הקואורדינטות החדשות מקיימות [4] $\boxed{[Q_i,Q_k]_{p,q}=0,\quad [P_i,P_k]_{p,q}=0,\quad [P_i,Q_k]=\delta_{ik}}$. ניתן להראות בקלות כי תכונת סוגרי הפואסון אינווריאנטית לטרנס' כלומר $[f,g]_{p,q}=[f,g]_{P,Q}$. כלומר אלו תנאים מספיקים להיותה של טרנס' קנונית.

[4] הסימון $[f,g]_{p,q}$ כוונתו שהגזירה בסוגרי פואסון מתבצע על המשתנים p,q.

7.4 משפט ליוביל

לעתים תכופות נוח לנתח את התנהגותו של גוף ע"י שימוש במרחב הפאזה. זהו מרחב של $2s$ מערכות צירים המשתייכות ל s קואורדינטות מוכללות ול- s תנעים. מכפלת הדיפרנציאלים $d\Gamma = dq_1...dq_s dp_1...dp_s$ הוא מעין אלמנט נפח במרחב זה. משפט ליוביל טוען כי *תחת טרנס' קנונית הנפח* $\boxed{\int d\Gamma = const}$.

7.5 משוואות המילטון יעקובי

נשאלת השאלה עבור איזה טרנס' קנונית מבנה ההמילטוניאן הופך להיות מאוד פשוט. משוואת המילטון יעקובי נותנת את התשובה לשאלה זו ובדרך גם מאפשרת לנו למצוא קבועי תנועה בקלות.

הגדרת אינטגרל הפעולה הוא כידוע $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ ולכן $\frac{dS}{dt} = L$. וכמובן ש- $\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i$

(לפעולה אין תלות ב- $\dot{q}_i$ כי לא מתבצעת ווריאציה בה אלא רק ב- q_i).כלומר קיבלנו כי $\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i = -H$.

לכן $\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_i, p_i, t) = 0$. S אינו פונק' של p ולכן משוואה זו נכונה באופן פיסיקלי ולא מתמטי. לכן נתייחס להמילטוניאן מעט אחרת - $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0$. משוואה זו, מד"ח מסדר ראשון, נקראת משוואת המילטון יעקובי.

זו משוואה שנזדקק ל- $i+1$ קבועים ע"מ לפתור אותה.

ראינו בסעיף 7.3.1 כי עבור טרנס' קנונית מתקיים $H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$. אפשר גם להתייחס ל- S כאל פונק' יוצרת $S(q_i, P_i)$ ע"מ לעבור מ- H ל- H' אשר במקרה הזה שווה לאפס. פונק' יוצרת מהמבנה הזה מקיימת $\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$.

בהמילטוניאן החדש שהוא אפס ונקבל שוב $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0$. P_i הם מן הסתם קבועי תנועה בהמילטוניאן החדש כי ממשוואות המילטון נקבל כי $\frac{\partial H}{\partial Q_i} = \dot{P}_i = 0 \rightarrow P_i = Const$. נסמן את קבועי תנועה אלה ב- α_i.

מהמשוואת לטרנס' הקנונית נקבל כי $\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = Q_i = \beta_i = Const$. כלומר קיבלנו שלוש משוואות -

$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i, \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}$. וניתן לתאר, ע"י שימוש בשלושת המשוואת הללו את התפתחות הקואורדינטות הישנות והדשות בזמן כתלות בקבועי תנועה.

7.6 שינויים אדיאבטיים

נניח מערכת כלשהי בעלת מרחב תנועה סופי חד ממדי, המתוארת באמצעות פרמטר כלשהו λ. נניח כי λ משתנה לאט. ההגדרה אל שינוי איטי היא כי $T \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \ll T$ כאשר T הוא זמן אופייני כלשהו לשינויים במערכת. אם λ היה קבוע המערכת הייתה מבצעת תנועה מחזורית עם אנרגיה קבועה וזמן מחזור קבוע התלוי באנרגיה. היות ו λ קטן, השינוי באנרגיה $\dot{E}$ הינו גם קטן ופרופורציונאלי לשינוי $\dot{\lambda}$.

עבור ההמילטוניאן $H(q, p, t)$ מתקיים כי $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\dot{\lambda}$. ע"מ למצוא את גודל השינו הקטן בזמן באנרגיה נמצע אותה בזמן - $\overline{\frac{dE}{dt}} = \overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}\dot{\lambda}$. היות והשינוי $\dot{\lambda}$ מאוד איטי ניתן להוציאו מהמיצוע וכמובן שכאשר אנו ממצעים אנו מתחשבים ב- H כבתלוי רק ב- q, p ולא ב- λ. כלומר המיצוע מתבצע לו λ היה קבוע.

כעת המיצוע הוא $\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}}=\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda}dt$ וע"פ משוואת המילטון מתקיים $\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{dq}{dt}$ ולכן $T=\int_0^T dt=\oint dq/\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)$.

ע"י שימוש בשני הקשרים הללו נקבל כי $\overline{\frac{dE}{dt}}=\frac{d\lambda}{dt}\frac{\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda}dq/\frac{\partial H}{\partial p}}{\oint dq/\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)}$ עבור אינטרציה על תחום זה האנרגיה קבועה

והתנע תלוי ב- $p=p\left(q,E,\lambda\right)$. שוב, $H\left(q,p,\lambda\right)=E$ ולכן ע"י גזירה נקבל כי $0=\frac{\partial H}{\partial \lambda}+\frac{\partial H}{\partial p}/\frac{\partial p}{\partial \lambda}$ או

לחילופין $\frac{\partial H}{\partial \lambda}/\frac{\partial \lambda}{\partial p}=-\frac{\partial p}{\partial \lambda}$. נשתמש בקשרים אלו ונכתוב את הביטוי למיצוע האנרגיה בזמן אחרת -

$\overline{\frac{dE}{dt}}=-\frac{d\lambda}{dt}\frac{\int_0^T \frac{\partial p}{\partial \lambda}dq}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}dq}$. נעביר אגף ונקבל $\oint\left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{dE}{dt}}+\frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt}\right)dq=0$. נגדיר כי $I=\oint pdq/2\pi$ לכן נכתוב

$\overline{dI/dt}=0$ כלומר בקירוב טוב $dI/dt=0$.

7.6.1 דוגמא

נניח כי נתונה בוכנה שאורכה L, אשר זזה במהירות $\dot{L}$. בבוכנה ישנם חלקיקים שנעים בכיוון x בלבד במהירות

V שמתנגשים בדפנות הבוכנה. נדרוש כי הם מייצרים שינוי אדיאבטי - $\frac{L}{\dot{L}}\gg\frac{L}{V}$ כלומר $\dot{L}\ll V$. נמצא את

$V\left(L\right)$ כאשר t_0,V_0 נתונים. $I=\oint pdx/2\pi=2pL/2\pi$ אך $dI/dt=0$ ולכן $p=mV\alpha\frac{1}{L}$.

7.6.2 דוגמא

נתבונן ב- I, לאורך פרק זמן T $\tau\gg T$ כאשר τ הוא בין הזמנים t_1,t_2. אם נתבונן ב- λ כפונק' של t, ונניח כי n

הוא הסדר הגבוה ביותר שבו t רציף וגזיר בנק' t_1,t_2 אז מתקיים כי $\Delta I\alpha\left(\frac{T}{\tau}\right)^n$ במקרה הגרוע ביותר.

למשל עבור $\omega^2=\omega_0\frac{1+ae^{\alpha t}}{1+e^{\alpha t}}$. עבור $t\to-\infty$, $\omega=\omega_0$. עבור $t\to\infty$, $\omega=\sqrt{a}\omega_0$. ונוכל לקבל כי במקרה זה

הגודל ω נשמר אפילו יותר טוב מ $\left(\frac{T}{\tau}\right)^n$

עמרי סנדיק
17/10/2007