# מכניקה אנליטית

פרופ. שביב גיורא

סמסטר חורף 2004-5

$Id: analitical.lyx,v 1.27 2005/01/24 10:18:15 itay Exp $

## תוכן עניינים

# 1 מבוא

מרחב רצף כל האירועים הנצפים

במתמטיקה $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

המרחב אבסולוטי

זמן אבסולוטי רצף כל האירועים אחיד $|v| \ll c$

כוחות קיימים שני סוגים של כוחות

1. כוחות של מגע: חיכוך נורמלי, גרר
2. פעולות מרחוק: גרביטציה, כוח חשמלי, כוח מגנטי, כוח גרעיני. הפתרון לבעיה הפעולה מרחוק נפתר ע"י שדה. חוסר קוהרנטיות של זמן תגובת מוזנח בדיון כאן.

כוחות מתנהגים כוקטורים.

אינרציה (Inertia) מוצגת מספרית ע"י מסה. לכן $\vec{F} = m\vec{a}$

## 1.1 תנועת חלקיק בממד אחד

בשלושה ממדים $\vec{F} = \frac{dm\vec{v}}{dt}$ עבור ממד אחד $f = m\ddot{x}$
נניח $f(x)$ (פונקציה תלויה ב $x$ בלבד) אזי נגדיר

$$V(x) = -\int_a^x f(\xi)\, d\xi$$

נגדיר אנרגיה קינטית

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

ואז נקבל

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dx}\dot{x} = -f(x)\dot{x} \\
&= -m\ddot{x}\dot{x} \\
\frac{dT}{dt} &= m\dot{x}\ddot{x} \\
\Rightarrow \frac{dV}{dt} + \frac{dT}{dt} &= 0 \\
\Rightarrow E = V + T &= const
\end{aligned}$$

וזאת האנרגיה הכוללת שהיא הקבוע הראשון של התנועה. אינטגרל ראשון.

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2 &= \frac{2(E - V(x))}{m} \\
\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}}(t - t_0)
\end{aligned}$$

### 1.1.1 בור פוטנציאל[1]

בבור פוטנציאל תהיה התנהגות מחזורית לכן לפי זמן המחזור ניתן לפתח טור פוריה

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(\pi n) + b_n \cos(n\pi)\right)$$

באופן כללי כאשר $E$ קרוב מספיק ל $E_{\min}$

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x = x_m) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)(x - x_m) +,,, \\ V(x) &= c_1 + c_2 (x - x)^2 \end{aligned}$$

לכן התנועה סביב $x = x_m$ תהיה הרמונית

$$\begin{aligned} E &= V(x) \\ E - V(x) &= 0 \\ X &= \alpha - \beta \cos\theta \end{aligned}$$

קל לראות ש $\alpha = \frac{a+b}{2}$ ו- $\beta = \frac{b-a}{2}$ אזי אם $P$ זמן מחזור

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{m}} P &= \pm 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm 2\beta \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{E - V(\alpha - \beta\cos\theta)}} \\ E - V(\alpha - \beta\cos\theta) &\simeq E - V(\alpha - \beta) + \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=a} \beta \sin\theta d\theta \\ &= \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=a} \beta \sin\theta \Delta\theta \\ x &\approx a \sqrt{\frac{\sin\theta}{\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=a}}} \end{aligned}$$

אזי טור פוריה לפתרון כללי

$$\begin{aligned} \zeta = \frac{2\pi n t}{P}; X &= \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(\zeta) \\ a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\, d\zeta = \frac{2(b-a)}{\pi} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(t) \cos(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{2}{n\pi} x \sin(n\zeta) |_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{d\zeta} \sin(n\zeta)\, d\zeta \\ &= \frac{2}{n\pi} \int_a^b \sin(n\zeta)\, dx \end{aligned}$$

אזי עבור $a_1 \gg a_n; n = 2, 3, ...$

$$X = A + B \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$$

[1] הרצאה ב 25.10.2004

**הסבר** (למי שלא למד טורי פורייה) נניח שיש סדרת פונקציות אורתונורמליות $(a,b)$

$$\int_a^b u_i u_j dx = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

במרחב $\infty$ ממדי (מרחב הילברט) עבור פונקציה כלשהי

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$$

אם נרצה למצוא $a_i$:

$$\begin{aligned} \int u_i f(x)\, dx &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int u_n u_i dx \\ &= a_i \end{aligned}$$

אצלנו הפונקציה הרלוונטיות הן $\sin,\cos$ והן מקיימות את התנאים

$$\begin{aligned} \forall n,m\in\mathbb{N}; \int \sin mx \cos nx &= 0 \\ \begin{matrix}\forall n,m\in\mathbb{N} \\ n\neq m\end{matrix};\int \sin mx \sin nx &= \int \cos mx \cos nx \end{aligned}$$

**בזמן**

$$t = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^{\theta(x)} \frac{\beta \sin\theta d\theta}{\sqrt{E-v(\alpha-\beta\cos)}}$$

אם נסמן $\Phi(x) = \frac{\sin\theta}{\sqrt{E-V(\alpha-\beta\cos\theta)}}$ אזי

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta \\ c_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(x) \sin n\theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta \sin n\theta}{\sqrt{E-V(\alpha-\beta\cos\theta)}} d\theta \\ d_n &= ... = \cos\theta \end{aligned}$$

אזי קיבלנו

$$\begin{aligned} t &= t(\theta) = \beta\int_0^{\theta}\left(\frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n\cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta\right) d\theta \\ &= \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \beta\left(\frac{1}{2}d_0\theta + \sum\frac{d_n}{n}\sin\theta - \sum\frac{c_n}{n}\cos n\theta\right) \end{aligned}$$

נניח $d_0 \gg d_n, d_0 \gg c_n$ ואז

$$\begin{aligned} t &= \frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} d_0\theta \\ x &= \alpha - \cos\theta = \alpha - \beta\cos\left(\frac{2\sqrt{2}t}{\beta\sqrt{m}d_0}\right) \end{aligned}$$

### 1.1.2 כוח כפונקציה של תאוצה (או האם זה אפשרי?)

במצב הפשוט $f(x) = m\ddot{x}$ אזי $f(x, \dot{x}, t)$. במצב החדש $f(\ddot{x}) = m\ddot{x}$. אם זה קורה נקבל

$$m(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) = f(\ddot{x_1}) + f(\ddot{x_2})$$

אבל אנו צריכים שעבור תאוצה $\ddot{x_3} = \ddot{x_1} + \ddot{x_2}$

$$\begin{aligned} m\ddot{x_3} &= f_1(\ddot{x_3}) + f_2(\ddot{x_3}) \\ m(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) &= f_1(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) + f_2(\ddot{x_1} + \ddot{x_2}) \end{aligned}$$

## 1.2 מרחב הפאזה[2]

הכוח לא יכול להיות פונקציה של התאוצה. לכן אם נתון $\dot{x}(t=0), x(t=0)$ ידוע $x(t)$. ניתן להגדיר מ $(p = m\dot{x}, x)$ מרחב. מרחב זה הוא מרחב הפאזה.

**מסלול סגור** מסלול סגור נוצר ע"י תנועה מחזורית. אם המערכת משמרת אנרגיה אז המסלול הוא $E(x, \dot{x}) = const$. מסלול סגור חייב להקיף נק' בה $p = 0$

**נקודת שיווי משקל**

**יציבה** בתוך מסלול סגור קיימת נקודה שסביבה כל המסלולים הפנימים נעים (אחד או יותר). היא נמצאת על $p = 0$

**בלתי יציבה** במקום בו לאנרגיה יש מקסימום היא נקודת שיווי משקל כזאת. תנועת החלקיק ממנה תלויה בנגזרות

**נקודת סינגולריות** נקודה שמספר מסלולים $(\infty)$ נע דרכה. הנקודה חייבת להיות על הנקודה בה $p = 0$. אחרת יש לגוף תנע וזאת לא נקודת סינגולרית.

### 1.2.1 בעיות כאוטיות, רגישות לתנאי התחלה ולא רגישות לתנאי התחלה

נתונה

$$\begin{aligned} f(x) &= m\ddot{x} \\ x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x_0} \end{aligned}$$

אזי נשאלת השאלה, עבור

$$\begin{aligned} f(x) &= m\ddot{x} \\ x(t=0) &= x_0 + \varepsilon \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x_0} \end{aligned}$$

האם הפתרון קרוב מספיק אפסילונית לפתרון של הבעיה הראשונה.

**בעיות דטרמניסטיות** בבעיות כאלו הפתרון קרוב אפסילונית לבעיה הראשונה. בבעיות דטרמניסטיות העבר והעתיד ידועים מראש. אחד הסממנים של בעיות דטרמניסטיות היא שהיפוך סדר הזמן היא פתרון אפשרי.

**בעיות כאוטיות** יכול להיות מצב בו שינוי קטן גורר שינוי גדול. לדוגמה בתרמודינמיקה המצב העכשווי של הגז לא תלוי בתנאי התחלה.

[2] הרצאה ב 27.10.2004

דוגמה[3]

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+x^2 &= 1\\ x\left(t\right) &= \sin t,\cos t\\ 2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{x}x &= 0\\ \dot{x}\left(\ddot{x}+x\right) &= 0\end{aligned}$$

קיבלנו צירוף של אוסילטור $\dot{x}=0$. נגדיר

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+x^2 &= 1+\varepsilon t\\ 2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{x}x &= \varepsilon\\ \dot{x}\left(\ddot{x}+x\right) &= \varepsilon\\ \Rightarrow \dot{x} &\neq 0\end{aligned}$$

אז יש שינוי גדול בתנועה לכל שינוי של $\varepsilon$.

### 1.3 כוח מאלץ, העתקות אמתיות ווירטואליות

נתונה משוואת משטח $\Phi\left(x,y,z\right)=0$ חלק, כלומר אין חיכוך. חלקיק מאולץ להחליק על המשטח. פועלים 2 כוחות

1. $F$ חיצוני - לדוגמה גרביטציה
2. $F^c$ כוח אילוץ - מאלץ את החלקיק לנוע רק על המישור. כוח האילוץ לא עושה עבודה כלומר

$$W = \int \vec{F^c}\cdot d\vec{r}$$

כלומר $\vec{F^c}\perp d\vec{r}$ כמוכן

$$\begin{aligned}\left(\Phi\left(x,y,z\right)\right)\Rightarrow\frac{d\Phi\left(x,y,z\right)}{t} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\dot{z}=0\\ \Rightarrow &= \nabla\phi\cdot\Delta\vec{r}=0\\ \nabla\phi &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

אזי

$$\vec{F^c} \propto \nabla\phi$$

3. כוח אילוץ תלוי בזמן - אז הכוח עושה עבודה. למשל כוח במעלית הכוח עושה עבודה. בהעתקה וירטואלית - העתקה וירטואלית לא עושה עבודה. כלומר

$$W = \int \vec{F^c}\cdot d\vec{r}=0$$

אזי נקבל

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta z = 0$$

למשל עבור המעלית

$$dz-wdt = 0$$

כאשר $w$ מהירות המעלית.

דוגמה $\dot{z}=w$ העתקה אמתית בעוד ש $\delta\dot{z}=0$ וירטואלית שנעשית כאשר $t$ קפוא.

4. נשאלת השאלה האם יש דיפרנציאל שלם[4]

$$\begin{aligned}
a(x,y,z,t)\,dx+b(x,y,z,t)\,dy+c(x,y,z,t)\,dz+p(x,y,z,t)\,dt &= 0\\
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= a\\
\frac{\partial\psi}{\partial y} &= b\\
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= c\\
\frac{\partial\psi}{\partial t} &= t
\end{aligned}$$

קיים דיפרנציאל שלם אז קיימת $\psi$ כזאת. קיום אילוץ כזה נקראה אילוץ הולונורמי ויש שתי דרגות חופש כי ניתן להוריד את

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= f_1(x,y,z,t)\\
m\ddot{y} &= f_2(x,y,z,t)\\
m\ddot{z} &= f_3(x,y,z,t)
\end{aligned}$$

לשתי משוואות.

דוגמה נתון כדור שיושב על מישור $x,y$ בנקודה $(x_0,y_0,0)$ בזמן 1, בזמן 2 הכדור יושב על $(x_0,y_0+\Delta y,0)$.
כאשר הוא התגלגל לשם (במישור הכדור נקודת המגע במישור $(\theta_0,\varphi_0)$ עבר ל $(\theta_0,\varphi_0+\Delta\varphi)$),
בזמן 3 $(x_0,y_0+\Delta y,0)$ ו- $(\theta_0+\pi,\varphi_0+\Delta\varphi)$, ובזמן 4 $(x_0,y_0+\Delta y+\Delta y_2)$ ו $(\theta_0+2\pi,\varphi_0+\Delta\varphi)$.

דוגמה נתון מוט באורך $a(t)$ ושני מסות שקשורות בקצוות $m_1,m_2$

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = a(t)^2$$

נניח הזמן קפוא ואז

$$\phi=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2 = R^2$$

אזי

$$F_1^c \propto \nabla\phi=((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0))$$

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{r}_1 &= \vec{F}_1+\vec{F}_1^c\\
m_2\ddot{r}_2 &= \vec{F}_2+\vec{F}_2^c\\
\vec{F}_1^c &= -\vec{F}_2^c
\end{aligned}$$

אזי קיים $\lambda(t)$ כך ש

$$F_1^c = \lambda(t)((x-x_0),(y-y_0),(z-z_0))$$

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{r}_1 &= \vec{F}_1+\lambda(t)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\\
m_2\ddot{r}_2 &= \vec{F}_2-\lambda(t)(x-x_0,y-y_0,z-z_0)
\end{aligned}$$

כאן נשאר שש דרגות חופש (בכלל תלות בזמן)

[4] הרצאה ב 1.11.2004

# 2 הפורמליזם של לגרנז׳

## 2.1 העיקרון של ד׳אלמברט

עבור

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= \vec{F}+\vec{F^c} \\ \left(m\ddot{\vec{r}}-\vec{F}\right)\cdot\delta\vec{r} &= \vec{F^c}\cdot\delta\vec{r}=0 \end{aligned}$$

**דוגמה** נתון $\vec{F}=\vec{F}\left(0,f_y\left(x,y,z\right),f_z\left(x,y,z\right)\right)$ וניקח $\delta\vec{r}=\left(\xi,0,0\right)$. אם המערכת אנוריאנטית ביחס להעתקה וירטואלית יש גודל שנשמר.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\dot{x} &= p \end{aligned}$$

**דוגמה** חלקיק נע על פני כדור בשדה גרביטציה

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= R^2 \\ x\delta x+y\delta y+z\delta z &= 0 \\ \vec{F^c} &= \lambda\left(x,y,z\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda x \\ m\ddot{y} &= \lambda y \\ m\ddot{z} &= -mg+\lambda z \end{aligned}$$

הכוח החיצוני לא תלוי ב- $x,y$. לכן שינוי $x,y$ לא ישנה (המערכת אנוראינטית לגבי $x,y$) לכן

$$x\delta x+y\delta y = 0$$

נכפיל

$$\begin{aligned} y\left(m\ddot{x}\right) &= \lambda xy \\ x\left(m\ddot{y}\right) &= \lambda xy \\ \Rightarrow m\left(\ddot{x}y-\ddot{y}x\right) &= 0 \\ \Rightarrow l=m\left(\dot{x}y-x\dot{y}\right) &= const \end{aligned}$$

קיבלנו את רכיב המומנטום הזוויתי בכיוון $z$.

האילוצים לא תלויים בזמן: העתקה וירטואלית זהה להעתקה ממשית

$$v = \frac{dr}{dt}=\frac{\delta r}{\delta t}$$

האנרגיה הקינטית

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i^2$$

$$\begin{aligned} \left(\sum\left(m_i\ddot{\vec{r}_i}-\vec{F_i}\right)\right)\cdot d\vec{r_i} &= 0 \\ \left(\sum m_i\ddot{\vec{r}_i}\right)\cdot d\vec{r_i} &= \left(\sum\vec{F_i}\right)\cdot d\vec{r_i} \\ \left(\sum m_i\ddot{\vec{r}_i}\right)\cdot d\dot{\vec{r_i}} &= \left(\sum\vec{F_i}\right)\cdot d\dot{\vec{r_i}} \end{aligned}$$

אזי נגזרת האנרגיה הקינטית

$$\left(\sum m_i\ddot{\vec{r_i}}=\frac{dT}{dt}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{dT}{dt}=\left(\sum\vec{F_i}\right)\cdot d\dot{\vec{r_i}}$$

אם הכוחות החיצונים

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{F}&=0\\ \vec{F}&=-\nabla V\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}=\left(\sum\vec{F_i}\right)\cdot d\dot{\vec{r_i}}&=-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial V}{\partial z}\dot{z}\right)=-\frac{dV}{dt}\\ \Rightarrow\frac{dT}{dt}&=-\frac{dV}{dt}\end{aligned}$$

קיבלנו את חוק שימור האנרגיה.

## 2.2 העיקרון של המילטון

הגדרה פונקציית לגרנז' $L=T-V$. אזי ניתן לעבור מנקודה לנקודה כך ש $\delta L=0$.

הוכחה[5] עבור כל חלקיק יש מסלול $\vec{r}\,(t)$ אמתי ויש אפשרות לרשום העתקה וירטואלית $\vec{r}\,(t)+\delta\vec{r}\,(t)$ כשאנו מקבילים

$$\delta r\,(t=t_1)=\delta r\,(t=t_2)=0\tag{1}$$

עבור $t_1,t_2$ נקודות התחלה וסיום המסלול. ניתן גם לדבר על $\delta\frac{d\vec{r}}{d\theta}$. כאשר מדברים על העתקה וירטואלית מניחים לא שינינו את הזמן $\delta t=0$ ואז

$$\delta\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\delta\vec{r}}{dt}-\frac{d^2r}{dt^2}\delta t=\frac{d\delta\vec{r}}{dt}\tag{2}$$

כאשר $T=\frac{1}{2}mv^2$ האנרגיה הקינטית

$$\begin{aligned}\delta T&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left[\left(\dot{\vec{r_i}}+\delta\dot{r_i}\right)^2-\dot{\vec{r_i}}\right]\\ &=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r_i}}\cdot\delta\dot{r_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\delta\dot{\vec{r_i}}\right)^2\end{aligned}$$

בקירוב נזניח את הסדר השני

$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r_i}}\cdot\delta\dot{r_i}$$

נפתח את האינטגרל

$$\begin{aligned}\int_{t_s}^{t_e}\delta T dt&=\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r_i}}\cdot\delta\dot{r_i}dt\\ (2)\Rightarrow&=\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r_i}}\cdot\frac{d\delta\vec{r_i}}{dt}dt\\ &=\left[\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec{r_i}}\cdot\delta\vec{r_i}\right]_{t_s}^{t_e}-\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r_i}}\cdot\delta\vec{r_i}dt\\ (1)\Rightarrow&=-\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}m_i\ddot{\vec{r_i}}\cdot\delta\vec{r_i}dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r_i}dt+\int_{t_s}^{t_e}\delta T dt &= \int_{t_s}^{t_e}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r_i}+\delta T\right)dt\\ &= -\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r_i}}-\vec{F}_i\right)\cdot\delta\vec{r_i}dt\end{aligned}$$

ולפי עקרון דאלמבר קיבלנו

$$\int_{t_s}^{t_e}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r_i}+\delta T\right)dt = -\int_{t_s}^{t_e}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r_i}}-\vec{F}_i\right)\cdot\delta\vec{r_i}dt=0$$

נניח שהכוחות משמרים אז יש

$$\delta V = -\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r_i}$$

כלומר

$$\int_{t_s}^{t_e}\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r_i}+\delta T\right)dt = \int_{t_s}^{t_e}\left(\delta T-V\right)dt$$

אם האילוצים הולונומיים, נקודות הקצה מוגדרות חד-ערכית. אזי קיבלנו

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_s}^{t_e}Ldt &= 0\\ L &= T-V\end{aligned}$$

כאשר $L\left(\vec{r_i},\dot{\vec{r_i}}\right)$ בגלל האנרגיה הפוטנציאלית והקינטית.

**הערה** ניתן כאן לנסח את המכניקה בעזרת הלגרנזיאן ולפתור את המכניקה מכוחות.

**דוגמה** נניח חלקיק נורה בהשפעת כוח מרכזי אזי

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2+\dot{x}^2\right)\\ V &= mgz\\ L\left(x,z,\dot{x},\dot{z}\right) &= \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2+\dot{x}^2\right)-mgz\end{aligned}$$

**הסבר** המסלול האמתי הוא

$$\delta\int_{t_s}^{t_e}Ldt = 0$$

כלומר אקסטרמום ביחס ל $\int_{t_s}^{t_e}Ldt$

**הערות**

1. אם[6] כל האילוצים הולונומיים אזי כל מסלול וירטואלי הוא גם מסלול אמתי.
2. אם המסלול המשונה (Varied) הוא יכול להיות מסלול אמתי של המערכת, אזי האילוץ הולונומי.

[6] הרצאה ב- 8.11.2004

**הוכחה** עבור $\vec{C}=(a(x,y,z),d(x,y,z),c(x,y,z))$ ועבור $d\vec{r}=(dx,dy,dz)$ ו- $\vec{C}\cdot d\vec{r}=0$ האילוץ. נניח שהאילוץ לא ניתן לאינטגרציה כלומר אין $\nabla\phi(x,y,z)=c$.

המסלול האמתי $\vec{c}\cdot\vec{v}=0$ כאשר $\vec{v}=(\dot{x}\dot{y},\dot{z})$ ומקיים $\vec{c}\cdot\delta\vec{r}=0$ אזי

$$(\vec{c}+\delta\vec{c})\cdot(\vec{v}+\delta\vec{v}) = 0$$

נזניח את הסדר השני ונקבל מסלול אמתי אפשרי של המערכת

$$\vec{c}\cdot\delta\vec{v}+\delta\vec{c}\cdot\vec{v} = 0$$

בהעתקה וירטואלית

$$\frac{d}{dt}c(a,b,c)\cdot\delta\vec{r} = 0$$

ואז לגבי העתקה וירטואלית

$$\dot{\vec{c}}\cdot\delta r+\vec{c}\cdot\delta\dot{r} = 0$$

הפרש הביטויים

$$\begin{aligned}\dot{\vec{c}}\cdot\delta r+\vec{c}\cdot\delta\dot{\vec{r}}-\vec{c}\cdot\delta\vec{v}-\delta\vec{c}\cdot\vec{v} &= 0\\ \dot{\vec{c}}\cdot\delta\vec{r}-\delta\vec{c}\cdot\vec{v} &= 0\end{aligned}$$

זאת מכיוון שהמסלול הווירטואלי גם מסלול אמתי.
וגם $\vec{C}=(a(x,y,z),d(x,y,z),c(x,y,z))$

$$\dot{a}=\frac{\partial a}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial a}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial a}{\partial z}\dot{z}$$

אזי $\dot{\vec{c}}=(\nabla a\cdot\vec{v},\nabla b\cdot\vec{v},\nabla c\cdot\vec{v})$ וגם

$$\delta\vec{c} = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\delta x+\frac{\partial a}{\partial y}\delta y+\frac{\partial a}{\partial z}\delta z,\frac{\partial b}{\partial x}\delta x+\frac{\partial b}{\partial y}\delta y+\frac{\partial b}{\partial z}\delta z,\frac{\partial c}{\partial x}\delta x+\frac{\partial c}{\partial y}\delta y+\frac{\partial c}{\partial z}\delta z\right)$$

אזי

$$\begin{aligned}(\nabla a\cdot\vec{v},\nabla b\cdot\vec{v},\nabla c\cdot\vec{v})\cdot\delta\vec{r}-\delta\vec{c}\cdot\vec{v} &= 0\\ \left(\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)(\dot{y}\delta z-\dot{z}\delta y)+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)(\dot{z}\delta x-\dot{x}\delta z)+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)(\dot{x}\delta y-\dot{y}\delta x) &= 0\end{aligned}$$

כמוכן אנו יודעים ש $\vec{c}\cdot\delta\vec{r}=0$ עבור העתקה ממשית וכן $\vec{c}\cdot\vec{v}=0$ עבור העתקה וירטואלית לכן

$$\begin{aligned}C &\propto \delta\vec{r}\times\vec{v}\\ &= (\dot{y}\delta z-\dot{z}\delta y,\dot{z}\delta x-\dot{x}\delta z,\dot{x}\delta y-\dot{y}\delta x)\\ &= (a,b,c)\end{aligned}$$

כלומר אם נציב בסעיף הקודם

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)a+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)b+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)c &= 0\\ \Rightarrow\vec{c}\cdot\nabla\times\vec{c} &= 0\end{aligned}$$

הביטוי שקיבלנו מחייב קיום

$$c=\nabla\Phi$$

## סיכום

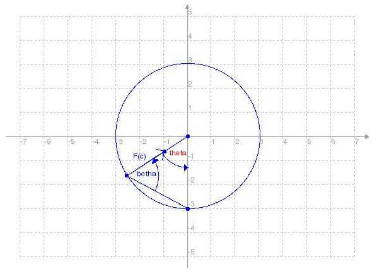
1. מע' ניוטון שהן ווקטוריות קימות רק במערכות אינרציאליות
2. הגדרנו סקלר $L=T-V$ כאשר $\delta\int_{x_s}^{x_e}Ldt=0$ (שאולי נכון במערכות כלשהן)

## 2.3 משוואות לגרנז'

נתונות משוואות תנועה ואילוצים (נניח הולונומיים). כלומר $\sum_{n=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r_i}}-\vec{F_i}\right)\cdot\delta\vec{r}=0$ וניתן להוריד דרגות חופש.
נעבור למערכת קואורדינטות $q_1,...,q_n$ כך ש $\delta q_i$ בלתי תלויים. מאחר וה-$q_i$ בלתי תלוי זה בזה כל איבר בסכום יתאפס בנפרד.

**דוגמה** נתון חלקיק שנע ע"פ צלינדר (איור 1) אזי המשוואות הם

איור 1: איור המערכת




$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F^c\cos\beta \\
m\dot{y} &= F^c\sin\beta - mg \\
x^2+y^2 &= R^2
\end{aligned}$$

כלומר יש 2 דרגות חופש + אילוץ $(q_1,q_2)$. אז האילוץ $q_2=x^2+y^2$ ומשוואת האילוץ $\delta q_2=0$ ונגדיר $q_1=\theta$ ואז

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{q_2}\cos q_1 \\
y &= \sqrt{q_2}\sin q_1
\end{aligned}$$

מע' אם $N$ חלקיקים ו-$J$ חלקיקים אז $J<3N$. נסמן $k=3N-J$ ואז כל אילוץ

$$i=1,...,J;f_i = f_i\left(x,y,z,...,x_n,y_n,z_n\right)$$

נסמן

$$i=1,..,J;q_i = f_i$$

ומשלים אם $i=J+1,...,3N$ כלשהם $q_i$. כאשר צריך בגלל שלא תלויות

$$\frac{\partial\left(q_1,q_2,...,q_{3N}\right)}{\partial\left(x_1,x_2,...,x_{3N}\right)} \neq 0$$

ואז מתקיים $i=1,...,J;\delta q_i=0$ בגלל דרישת האילוץ. (כאשר $s=1,...,J;dq_s=0$) העתקה כללית:

$$i=1,...,3N;dx_i = \sum_{s=J+1}^{3N}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}dq_s+\frac{\partial x_i}{\partial t}dt$$

אז תנאי האילוץ

$$k=1,...,J;\sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\delta x_i = 0$$

ואז עבור העתקה וירטואלית $\delta x_i = \sum_{s=J+1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s$ אז $j = J+1, ..., 3N; \delta q_j$ שרירותי. נציב את מה שקיבלנו באילוץ

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\delta x_s &= \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_s} \sum_{i=J+1}^{3N} \frac{\partial x_s}{\partial q_i}\delta q_i \\
&= \sum_{i=J+1}^{3N} \delta q_i \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial q_i} \\
&= \sum_{i=J+1}^{3N} \delta q_i \sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial q_k}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

ובגלל שהמקדמים בלתי תלויים

$$= \sum_{i=J+1}^{3N} \delta q_i \delta_{ki}$$

אבל $i > j$ ולכן

$$\sum_{s=1}^{3N} \frac{\partial f_k}{\partial x_s}\delta x_s = 0$$

**הרצאה ב 10.11.2004** מצאנו $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$

למה

1. נוכיח $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$

הוכחה מיידי לפי

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\
\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_j}
\end{aligned}$$

2. נוכיח $\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\ell} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\ell}\right)$

הוכחה לפי

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\ell} &= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_\ell}\dot{q}_j + \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_\ell} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\ell \partial t} \\
&= \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_\ell}\dot{q}_j + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_\ell \partial t} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_\ell}\right)
\end{aligned}$$

האנרגיה הקינטית

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum m_i \dot{x}_i{}^2 \\
&= T_0 + T_1 + T_2 +,,, + T_n \\
T_2 &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3N} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j
\end{aligned}
$$

נציב בביטוי

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3N}(m_i\ddot{x}_i - F_i)\cdot\delta x_i &= 0 \\
\sum_{i=1}^{3N}(m_i\ddot{x}_i - F_i)\cdot\left\{\sum_{s=J+1}^{3N}\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\delta q_s\right\} &= 0
\end{aligned}
$$

נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s} &= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) - \dot{x}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s}
\end{aligned}
$$

נסמן

$$
Q_s = \sum_{i=1}^{3N} F_i\frac{\partial x_i}{\partial q_s}
$$

ונקרא לביטוי הכוח המוכלל.

המקדם של $\delta q_k$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=J+1}^{3N}\left\{m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_s}\right) - \dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_s}\right] - Q_s\right\} \\
&= \sum_{s=J+1}^{3N}\left\{m_i\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{x}_i{}^2}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial \dot{x}_i{}^2}{\partial q_s}\right] - Q_s\right\} \\
&= \sum_{s=J+1}^{3N}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s\right)\cdot\delta q_k = 0 \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} - Q_s &= 0
\end{aligned}
$$

במערכת משמרת

$$
\delta V = -\sum_{i=1}^{3N} F_i\cdot\delta x_i
$$

נציב את הכוח המוכלל

$$
\delta V = -\sum_{s=J+1}^{3N} Q_s\cdot\delta q_s
$$

לכן

$$Q_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s}$$

ואז ניתן לכתוב

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial V}{\partial q_s} = 0$$

נניח גם ש-$V$ לא תלוי במהירות   אז נקבל

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_s} = 0$$

מעבר מעיקרון המילטון למשוואות לגרנז'   אנו[7] מעוניינים לעבור בכיוון ההפוך

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_s}^{t_e} L(q,\dot{q},t)\,dt &= \int \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j + \delta t \frac{\partial L}{\partial t} \right\} dt \\
\left(\delta t \frac{\partial L}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow &= \int \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right\} dt \qquad (3) \\
\int_{t_s}^{t_e} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j dt &= \int_{t_s}^{t_e} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt}\delta q_j dt \\
&= \left[ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j \right] - \int_{t_s}^{t_e} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt \\
&= -\int_{t_s}^{t_e} \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt
\end{aligned}$$

נחזור למשוואה

$$\begin{aligned}
(3) &= \int_{t_s}^{t_e} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j dt = 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= 0
\end{aligned}$$

נגדיר $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ מומנט מוכלל ואז

$$\frac{dp_j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

אם $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ אז $\frac{dp_j}{dt} = 0$ ולכן

$$p_j = const$$

כלומר $p_j$ במקרה זה נגדיר חוק שימור. כלומר הסימטריות של המערכת מגדירים חוקי שימור. (או מורידים דרגה)

[7] הרצאה ב 15.11.2004

הערה נבחין בין

1. בסימטריות רציפות כמו
   (א) העתקה $\leftarrow$ מומנטום ליניארי
   (ב) סיבוב $\leftarrow$ מומנטום זוויתי
   (ג) זמן $\leftarrow$ האנרגיה הכוללת $T+V$
2. בסימטריות לא רציפות
   (א) שיקוף
   (ב) זוגיות $P-parity$
   (ג) $C-charge$ (מטען)
   (ד) היפוך בזמן $T$

כיום מאמינים ב $CPT$ ולא בכל אחד מהם בנפרד.

### 2.3.1 הערות נוספות

עבור

$$\begin{aligned} q_j &\rightarrow q^{'}+f(s) \\ L(q,\dot{q},t) &\rightarrow L(q(s),\dot{q}(s),t(s)) \end{aligned}$$

אז $\sum_{j=1}^{n}P_j\frac{\partial q_j}{\partial s}$ נשמר.

דוגמה $L=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)-V(t)$ תנועת חלקיק על מישור.
נראה שיש סימטריה של מערכת של שמש מול כוכב לסיבוב כלומר ספרי-סימטרי. אבל אנו יודעים

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

לכן זה מתקיים. המערכת סימטרית ביחס לציר שניצב למישור ועובר דרך השמש. אזי

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=r^2\dot{\theta}$$

כלומר שימור תנע זוויתי. או החוק השני של קפלר.

הערה יש לשים לב כי $F(q,\dot{q},t)$ ניתן להוסיף ללגרנז'יאן באופן $L\rightarrow L+\frac{dF}{dt}$ ומשוואות לגרנז' לא ישתנו. כלומר נקרא ל-$F$ כיול ועבור כל כיול קבועים אחרים ישמרו.

נסמן $q$ $\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=0$ שעורים מוכללים, אזי יש $p_J$ מומנט מוכלל צמוד.

הערה ניתן להכליל את עיקרון אי-הוודאות של איזנברג רק למשוואה אחת ע"י

$$\Delta p_j\Delta q \sim \hbar$$

במערכת הולונומית אזי העתקה ווירטואלית היא גם העתקה ממשית $\delta q_i = \alpha \dot{q}_i$ לכן נכתוב

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\right)\dot{q}_j &= 0\\
\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\sum_{j=1}^{n}\ddot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\\
\left(\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial q_j}+\sum_{j=1}^{n}\ddot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right) &= 0\\
\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L\right) &= 0\\
\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j p_j - L &= const
\end{aligned}$$

קיבלנו את האינטגרל של $Jacobi$

$$H = \sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j p_j - L$$

דוגמה נניח של $T$ ניתן להזניח את שני החלקים הראשונים של המשוואה $T=T_2=\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right)$ כלומר תבנית ריבועית הומוגנית מסדר 2 כלומר

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = 2T$$

אז אינטגרל $Jacobi$. $H=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - T + V = T + V$ כלומר אם לא תלוי בזמן ותבנית ריבועית הומוגנית ממעלה 2 אזי $H$ האנרגיה הכוללת.

הערה באופן[8] כללי מערכת הולונומית

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial q_j}+\sum_{j=1}^{n}\ddot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right) &= 0\\
\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-L\right) &= -\frac{\partial L}{\partial t}
\end{aligned}$$

וסה"כ

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

[8] הרצאה ב-17.11.2004

מערכת אינווריאנטית תחת שיקוף בזמן   אם $L=T\left(\dot{q}_i\right)-V\left(q\right)$ אז

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\sum_j\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial t}\right)^2\\
T &= T_0+T_1+T_2\\
T_0 &= \sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial t}\right)^2\\
T_j &= \sum_i m_i\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial t}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\\
T_1 &= \sum T_j\dot{q}_j\\
T_{j,k} &= \sum_i\frac{1}{2}m_i\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_k}\\
T_2 &= \sum_{jk}T_{j,k}
\end{aligned}
$$

## 2.4 משפט 1915 $Noether$

נתונות קואורדינטות מוכללות שעוברות לקואורדינטות חדשות $q_i\to Q_j$ באופן $Q_j=f\left(q_j,s\right)$ כאשר $s=0$ היא זהות. אזי התכונה היא $L\left(q,\dot{q},t\right)\to L\left(Q\left(s\right),\dot{Q}\left(s\right),t\right)$ ואז הלגרנז'יאן לא משתנה כלומר:
אם[9] יש טרנספורמיצה רציפה שהפרמטר שלה $s$ וגם

$$\frac{d}{ds}L\left(Q\left(s\right),\dot{Q}\left(s\right),t\right) = 0$$

אז (יש שימור של גודל פיזיקלי)

$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}p_j\frac{\partial q_j}{\partial s} = const$$

הוכחה

הערה   ההוכחה כוללת שינוי שעון. כלומר $t=t\left(s\right)$

נשתמש בסימונים $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i},P_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}$

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i\frac{\partial L}{\partial Q_i}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial s}+\dot{Q}_i\frac{dt}{ds}\right)+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}\left(\frac{\partial\dot{Q}_i}{\partial s}+\ddot{Q}_i\frac{dt}{ds}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{ds}$$

כאשר

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i} = \frac{dP_i}{dt}=\dot{P}_i$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow\frac{dL}{ds} &= \sum_i\dot{P}_i\left(\frac{\partial Q_i}{\partial s}+\dot{Q}_i\frac{dt}{ds}\right)+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_i}\left(\frac{\partial\dot{Q}_i}{\partial s}+\ddot{Q}_i\frac{dt}{ds}\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\frac{dt}{ds}\\
&= \sum_i\dot{P}_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}+\sum_i\dot{P}_i\frac{\partial\dot{Q}_i}{\partial s}+\frac{dt}{ds}\left(\sum\dot{P}\dot{Q}+\sum P_i\ddot{Q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\right)\\
&= \frac{d}{dt}\sum_i P_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}+\frac{dt}{ds}\left(\sum_i\frac{d}{dt}\left(P_i\dot{Q}_i\right)+\frac{\partial L}{\partial t}\right)
\end{aligned}
$$

[9] הרצאה ב 22.11.2004

$$\begin{pmatrix} H=\sum_i P_i\dot{Q_i}-L \\ \Rightarrow \frac{dH}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}\end{pmatrix} \Rightarrow \; = \; \frac{d}{dt}\sum_i P_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}+\frac{dt}{ds}\frac{dL}{dt}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\sum_i P_i\frac{\partial Q_i}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \sum_i P_i\frac{\partial Q_i}{\partial s} = const$$

דוגמה נתונה מטוטלת שמסתובבת במסלול מעגלי $\dot{\varphi}$ובזווית $\theta$ מהמרכז

$$\begin{aligned}(T_0\neq 0)\Rightarrow T &= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\\ V &= mg\ell\left(1-\cos\theta\right)\\ L &= T-V\end{aligned}$$

($T_0\neq 0$) כלומר האנרגיה הקינטית אינה תבנית ריבועית מסדר שני.
(עבור תבנית ריבועית מסדר שני אינטגרל יעקובי $J\to H=E$)
נסמן ב $N$ את המומנט שמופעל

$$\delta W = N\delta\varphi$$

משוואת לגרנז'

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial\theta}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) &= \frac{\partial L}{\partial\varphi}+N\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m\ell^2\ddot{\theta} &= m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta-mg\ell\sin\theta\\ \frac{d}{dt}\left(m\ell\dot{\varphi}\sin^2\theta\right) &= N\end{aligned}$$

אם נדרוש $\dot{\varphi}=\omega$ קבוע אז

$$\frac{d}{dt}\left(m\ell^2\omega\sin^2\theta\right) = N$$

אם יהיה את $\theta\left(t\right)$ אז נוכל לקבל את $N\left(\theta\left(t\right)\right)$ אז

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}m\ell^2\left(\dot{\theta}+\omega^2\sin^2\theta\right)-mg\ell\left(1-\cos\theta\right)\\ \frac{\partial L}{\partial t} &= 0\end{aligned}$$

קיבלנו דרגת חופש אחת. נפתח אינטגרל יעקובי

$$\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}-L = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\sin^2\theta+mg\ell\left(1-\cos\theta\right)=C$$

נסתכל על המערכת המסתובבת שמסתובבת במהירות קבוע $\omega=\dot{\varphi}$

$$\begin{aligned}T_R &= \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2\\ V_R &= mg\ell\left(1-\cos\theta\right)-\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

כאשר $mg\ell\left(1-\cos\theta\right)$ גרביטציה, $\frac{1}{2}m\ell^2\omega^2\sin^2\theta$ פוטנציאל שנותן כוח צנטריפוגלי.

$$L_R = T_R - V_R$$

ואז

$$T_R + V_R = const$$

האנרגיה של המערכת המסתובבת.$\frac{\partial L}{\partial t}=0$ $L_R \to$ וגם אינטגרל יעקובי נשמר.
נניח שהמוט יכול לשנות את אורכו

$$\begin{aligned}
L &= T-V=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}\sin\theta\right)-mgr\left(1-\cos\theta\right)\\
\frac{\partial L}{\partial r} &= m\left(r\dot{\theta}^2-g\left(1-\cos\theta\right)+r\dot{\varphi}\sin^2\theta\right)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r} &= Q_r
\end{aligned}$$

נבדוק את המערכת המסתובבת

$$\begin{aligned}
\theta_r &= \theta\\
r_R &= r\\
\varphi_R &= \varphi-\omega t\\
L_R &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r_R}^2+r_R^2\dot{\theta}^2+r_R^2\left(\dot{\varphi}-\omega\right)^2\sin^2\theta_R\right)-mgr_R\left(1-\cos\theta_R\right)
\end{aligned}$$

משוואת $L$ עבור $\varphi$

$$mr^2\ddot{\varphi_R}\sin^2\theta+mr^2\left(\dot{\varphi_R}-\omega\right)2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta} = Q_{\varphi,R}$$

$$\begin{aligned}
F_{cor} &= 2m\vec{\omega}\times\vec{v}\\
\vec{v} &= \left(0,\ddot{\theta_R},\dot{\varphi_R}\sin\theta_R\right)\\
\vec{\omega}\times\vec{v} &= \vec{\omega}\times\vec{v_{\theta,R}}+\vec{\omega}\times\vec{v_{\varphi_R}}\\
&= \omega r\dot{\theta_R}\cos\theta_R+\omega r\dot{\varphi_R}\sin\theta_R\\
&= \varphi_R+\theta_R
\end{aligned}$$

**הערה** מכפלה ווקטרית היא $vector \quad axial$

**הוכחה למשפט** $Noether$ (לא[10] כוללת שינוי שעון)

$$\begin{aligned}
0=\frac{dL}{ds} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\dot{P}_i\frac{\partial q_i}{\partial s}+\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s}\\
&= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)
\end{aligned}$$

[10] הרצאה ב-24.11.2004

כלומר

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial q_i}{\partial s} = const$$

**דוגמה למשפט** $Noether$ **סיבוב בזוית** $s$ **מסביב לציר** $z$

$$\begin{aligned} x^{'}(s) &= x\cos s - y\sin s \\ y^{'}(s) &= x\sin s + y\cos s \\ z^{'}(s) &= z \end{aligned}$$

הטרנספורמציה לא משנה את השעון.

$$\begin{aligned} dL &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial q_i}{\partial s}\right) ds \\ &= p_x \frac{dx}{ds}|_{s=0} + p_y \frac{dy}{ds}|_{s=0} + p_y \frac{dz}{ds}|_{s=0} \\ \Rightarrow L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}$$

קיבלנו חוק שימור תנע.

## 2.5 תנודות קטנות

נסמן $q_1 \ldots q_n$ מצב שיווי משקל. אז

$$\begin{aligned} T &= T_2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \\ a_{\alpha,\beta} &= a_{\alpha,\beta}(q_1 \ldots q_n) \end{aligned}$$

נניח תנודות קטנות בקרבת הראשית. מנוסחת טיילור נפתח עד הסדר השני ונניח שהתנודות קטנות מספיק כדי להזניח את שאר הסדרים

$$V = \frac{1}{2}\sum b_{\alpha,\beta} q_\alpha q_\beta + first - order + V(0 \ldots 0)$$

נניח שהאנרגיה הקינטית חסומה בזמן. האיברים מהסדר הראשון בקירוב מתאפסים מגלל נקודת שיווי משקל.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\sum b_{\alpha,\beta} q_\alpha q_\beta \\ b_{\alpha,\beta} &= \frac{\partial^2 V(0)}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו תבנית ריבועית חיובית מסדר שני.

$$L = T - V$$

אז הלגרנז'יאן הוא תבנית ריבועית חיובית לפי $\alpha = 1 \ldots n; \dot{q}_\alpha, q_\alpha$ אז משוואות אוילר לגרנז

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\ddot{q_\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\gamma=1}^{n}\sum_{\delta=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{\gamma,\delta}}{\partial q_\delta} + \frac{\partial a_{\alpha,\delta}}{\partial q_\gamma} - \frac{\partial a_{\gamma,\delta}}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q_\delta}\dot{q_\gamma} = -\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$$

נניח המשוואה עבור קואורדינטה $q_\alpha$ בכל מקרה האנרגיה של התנודה קרובה לאנרגית המינימום. אז ניתן להשמית הקירוב את הסדר השני

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha,\beta}\ddot{q_\beta} + \sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha,\beta} q_\beta = 0$$

**הצורה המטריצית** מאחר שזה נכון לכל $\alpha = 1 \dots n$. לכן נגדיר $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots q_n)$ ומטריצות $T = (a_{\alpha,\beta}), V = (b_{\alpha,\beta})$

$$L = \frac{1}{2}\left[\dot{\vec{q}}^t T \dot{\vec{q}} - \vec{q}^t V \vec{q}\right]$$

נגדיר קואורדינטות ע"י מעבר בסיס ($S$ מטריצת מעבר)

$$\phi_i = \sum_{\alpha=1}^{n} S^{-1}_{i\alpha} q_\alpha$$
$$q_\alpha = \sum_{\alpha=j}^{n} S_{\alpha j}\phi_j$$

נרצה לקבל

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}\lambda_i\dot{\phi}^2, V_{i,j} = \frac{1}{2}\delta_{i,j}\lambda_i\Lambda_i^2\phi_i^2$$

מאחר $T, V$ תבנית ריבועית מסדר שני הע"ע $\lambda_i, \lambda_i\Lambda_i^2$ חיובים ממש. ואז אוילר לגרנז יהיה

$$\ddot{\phi}_i + \Lambda_i^2\phi_i = 0$$

נקרא ל $\phi$ - $normal\ mode$ קואורדינטה קולקטיבית.

**הוכחה** מהמחזוריות

$$q = q_0 e^{i\omega t}$$

נתעלם מ $t$ אז משוואות אויילר

$$-\omega^2 T q_0 + V q_0 = 0$$

נסמן

$$\vec{q_0} = S\vec{\xi}$$

אז

$$-\omega^2 T S\vec{\xi} + V S\vec{\xi} = 0$$
$$\Rightarrow -\omega^2 S^t T S\vec{\xi} + S^t V S\vec{\xi} = 0$$

אזי

$$a_j > 0; T_{new} = S^t T S = \delta_{i,j}\alpha_j$$

(כי ניתן ללכסן). נגדיר

$$M_{i,j} \triangleq \delta_{i,j}\alpha_j^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow M^t S^t T S M = I$$

נגדיר שיעורים $\eta$

$$\vec{q_0} = SM\vec{\eta}$$
$$\vec{\eta} = M^{-1}S^{-1}\vec{q_0}$$
$$= M^{-1}\vec{\xi}$$

אזי

$$T'_{new} = \omega^2 \vec{\eta}^t M^t S^t T S M \vec{\eta}$$

וגם ע"פ משוואות אויילר

$$V'_{new} = \vec{\eta}^t M^t S^t V S M \vec{\eta}$$

נגדיר $\vec{\eta} = O\vec{\phi}$ ואז

$$\omega^2 \phi^t O^t M^t S^t T S M O \phi + \phi^t O^t M^t S^t V S M O \phi = 0$$

כאשר

$$\vec{q} = SMO\vec{\eta}$$

כלומר $S^tTS$ לכסון, $M^tS^tTSM$ מטריצת יחידה, $O^tM^tS^tTSMO$ ליכסון של $V$.

**דוגמה** נתונים 4 מסות $m, 2m, 3m, 4m$ 5 קפיצים בינם לבין עצמם ובינם לבין שני הקירות אז הקואורדינטות $q_1, q_2, q_3, q_4$ המרחק של המסות משיווי משקל. נסמן

$$n^2 = \frac{P}{2m\ell}$$

והמשוואות

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= 2n^2 (q_2 - q_1 - q_1) \\ 2\ddot{q}_2 &= 2n^2 (q_1 - q_2 + q_3 - q_2) \\ 3\ddot{q}_3 &= 2n^2 (q_2 - q_3 + q_4 - q_3) \\ 4\ddot{q}_4 &= 2n^2 (q_3 - q_4 - q_4) \end{aligned}$$

משוואות אויילר לגרנז'

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - 4n^2\right) q_1 + 2n^2 q_2 &= 0 \\ 2n^2 q_1 + \left(2\omega^2 - 4n^2\right) q_2 + 2n^2 q_3 &= 0 \\ 2n^2 q_2 + \left(3\omega^2 - 4n^2\right) q_3 + 2n^2 q_4 &= 0 \\ 2n^2 q_3 + \left(4\omega^2 - 4n^2\right) q_4 &= 0 \end{aligned}$$

הערות

1. למערכת[11] יש $n$ דרגות חופש אז יש $n$ *normal modes*
2. כאשר יש סימטריה במערכת אז יש ניוון כלומר יש $w_i = w_j$ ואז אנו בעצם מאבדים דרגת חופש של המערכת.

**דוגמה** נתון גביש חד ממדי, של אטומים בעלי מסה $m$ המחוברים ביניהם במרחק במרחק $a$. יש $N$ אטומים (מספק אבוגדרו). לכל אטום יש בור פוטנציאל ונק' שיווי משקל

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\tau}{a}\right) (q_{i+1} - q_i)^2 \\ T &= T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m\dot{q}_i^{\,2} \\ L &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m\dot{q}_i^{\,2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \left(\frac{\tau}{a}\right) (q_{i+1} - q_i)^2 \\ m\ddot{q}_j &= \left(\frac{\tau}{a}\right) (q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) \end{aligned}$$

[11] 1.12.2004

נבצע פרידת משתנים

$$q(x,t) = f(x_j)\, g(t)$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{g}t &= g(t)\left(\frac{\tau}{a}\right)\left(f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})\right)\\
\ldots \Rightarrow q_j^n &= A\sin\left(\frac{2\pi(j-1)a}{\lambda} + \alpha\right)\sin(2\pi\nu t)\\
-4\pi^2\nu^2 m &= \left(\frac{\tau}{a}\right)\left(2\cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right) - 2\right)\\
\Rightarrow \nu(\lambda) &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\tau}{am}}\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

נבדוק תנאי התחלה
לכן אם האטום הראשון המנוחה

$$\alpha = 0$$

בשביל שהאטום האחרון יהיה במנוחה צריך שהאטום האחרון לא יזוז.

$$\lambda_n = \frac{2(N-1)a}{n}$$

סה"כ

$$\begin{aligned}
\nu_n &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\tau}{am}}\sin\left(\frac{\pi n}{2(N-1)}\right)\\
c = \lambda_n\nu_n &= \frac{2(N-1)a}{n\pi}\sqrt{\frac{\tau}{am}}\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_n}\right)
\end{aligned}$$

עבור $\lambda_n \gg a$

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda_n}\right) &= \frac{\pi n}{2(N-1)}\\
c &= a\sqrt{\frac{\tau}{am}}
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו קירוב לגל קלסי עבור אורך גל גדול מאוד מאורך הקשר.
נעבור[12] לרצף $a \to 0, N \to \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{m}{a}\ddot{q}_j &= \frac{\tau}{a}\left(\frac{q_{j+1}-q_j}{a} - \frac{q_j - q_{j-1}}{a}\right)\\
q_j &\to q(t,x), q_j = q(t, x = x_j)
\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_j &\to \frac{\partial^2 q(t,x)}{\partial t^2}\\
\frac{q_{j+1}-q_j}{a} &\to \left.\frac{\partial q(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}}\\
\frac{q_j - q_{j-1}}{a} &\to \left.\frac{\partial q(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}}\\
\frac{m}{a} &\to \rho
\end{aligned}$$

[12] הרצאה ב 6.12.2004

כלומר קיבלנו

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 q(t,x)}{\partial t^2} &= \frac{\tau}{a}\left(\left.\frac{\partial q(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}}-\left.\frac{\partial q(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}}\right)\\ &\to \tau\left.\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}\right|_{x=j}\\ \Rightarrow\frac{\partial^2 q(t,x)}{\partial t^2}-\frac{\tau}{\rho}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} &= 0\end{aligned}$$

אז קיבלנו גל קלסי ממש. אם פת

$$q(t,x) = f(x+ct)+g(x-ct)$$

### 2.5.1 מכניקה של רצף

נגדיר מחדש אנרגיה קינטית

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m\dot{q}_j^2\\ &\to \int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial q(t,x)}{\partial t}\right)^2 dx\end{aligned}$$

והאנרגיה הפוטנציאלית

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\tau}{a}\left(q_{j+1}-q_j\right)^2\\ &\to \int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 dx\end{aligned}$$

ונגדיר צפיפות לגרנז'יאן

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial q(t,x)}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\tau\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2$$

ומשוואות אויילר לגרנז'

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)} = 0$$

וקיבלנו משוואות בסיסיות לרצף.
עבור מיתר קשור

$$q(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)e^{i\omega_n t};\omega_n=\frac{\pi c}{\ell}n$$

אז נגדיר $a_n$ שהם ה $normal\quad modes$ אפשר להתייחס לקואורדינטות של $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

### 2.5.2 קואורדינטות ציקליות וטרנספורמציות לז'נדר

נתונות $n$ דרגות חופש ו-$m$ קואורדינטות צקליות (זניחות) $q_1 = \ldots = q_m$ אז

$$i = 1 \ldots m; P_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} = C_i$$

אז הלגרנזיאן

$$L\left(\dot{q_1}, \dot{q_2}, \ldots, \dot{q_m}, \dot{q_{m+1}}, \ldots, \dot{q_n}, q_{m+1}, \ldots, q_n\right)$$

נחפש טרנספורמציה שתביא אותנו ל

$$L \rightarrow L^{'}\left(\dot{q_{m+1}}, \ldots, \dot{q_n}, q_{m+1}, \ldots, q_n\right)$$

דוגמה (לפתרון בשיטה)

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q_1}^2 + a_{12}\dot{q_1}\dot{q_2} + a_{22}\dot{q_2}^2\right)$$

נתון

$$P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} = C_1$$

כלומר

$$C_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q_1}} = a_{11}\dot{q_{11}} + \frac{1}{2}a_{12}\dot{q_2}$$

כלומר

$$\dot{q_1} = \frac{C_1 - \frac{1}{2}a_{12}\dot{q_2}}{a_{11}}$$

מצאנו $T\left(\dot{q_2}\right)$ וגם נגדיר $V^{'} = V + \frac{c_1^2}{2a_{11}}$

באופן כללי נגדיר פונקציה חדשה$L^{'}$ ע"י

$$R = L - C_1\dot{q_1}$$

ואז $R\left(q_2, \dot{q_2}, C_1\right)$ כאשר $R$ יכול לשמש כ-$L^{'}$

שיטה כללית נתונות

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \ldots & C_m \\ \dot{q_{m+1}} & \ldots & \dot{q_n} \\ \dot{q_1} & \ldots & \dot{q_m} \end{array}$$

כלומר $m$ משוואות ליניאריות ב-$n$ נעלמים כלומר נחלץ

$$i = 1 \ldots m; \dot{q_i} = f_i\left(\dot{q_{m+1}} \ldots \dot{q_n}, C_1, \ldots, C_m\right)$$

נגדיר

$$R = L - \sum_{i=1}^{m} \dot{q_i}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_i}} \equiv L - \sum_{i=1}^{m} C_i\dot{q_i}$$

צ"ל $R\left(q_{m+1}\dots q_n, \dot{q_{m+1}}\dots \dot{q_n}, C_1,\dots,C_m\right)$

$$\begin{aligned}\delta R &= \sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\delta \dot{q_j}-\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\delta \dot{q_j}-\sum_{j=1}^{m}\dot{q_j}\delta C_j\\ &= \sum_{j=m+1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\sum_{j=m+n}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\delta \dot{q_j}-\sum_{j=1}^{m}\dot{q_j}\delta C_j\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}j=m+1\dots n;\frac{\partial R}{\partial q_j} &= \frac{\partial L}{\partial q_j}\\ \frac{\partial R}{\partial \dot{q_j}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q_j}}\end{aligned}$$

# 3 ההמילטוניאן ופורמליזם המילטון

נסמן

$$H = \sum_{i=1}^{n}\dot{q}_iP_i - L\left(q,\dot{q},t\right)$$

עד עכשיו הסתכלנו על מרחב הקונפיגורציה: יש $n$ דרגות חופש
עכשיו מרחב הפאזה: נגדיר משתנים בלתי תלויים $q, P$ כלומר סה"כ $2n$ ואז ההמילטוניאן $H\left(q,P,t\right)$
במרחב זה קווי המסלול לא נחתכים כלומר השטף ליחידת שטח נשמר.

**הרצאה ב 27.12.2004**

$$\begin{aligned}\left(t=t_0\right),\vec{x_0} &= \left(q_{01},q_{02},\dots,q_{0N},p_{01}\dots p_{0N}\right)\\ \left(t=t_1\right),\vec{x_1} &= \left(q_{11},q_{12},\dots,q_{1N},p_{11}\dots p_{1N}\right)\\ dx\left(t\right) &= J\left(x_t,x_0\right)dx_0\end{aligned}$$

בגלל[13] משפט ליוביל

$$J = 1 = const$$

הערה אילו משפט ליוביל לא היה מתקיים אז עבור $\Delta q\Delta p\sim\hbar$ היה ניתן למצוא קואורדינטה בה היה ניתן להוריד את אי-הודעות. לצופה לגרז'יאני

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

לצופה אוילריני

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

[13] הרצאה ב 27.12.2004

סה"כ אם

$$\begin{aligned}[\rho,H] &= 0\\ [F_1,H] &= 0\\ [F_2,H] &= 0\\ \Rightarrow\rho &= \rho\left(F_1,F_2\right)\\ \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial\rho}{\partial F_1}\frac{dF_1}{dt}+\frac{\partial\rho}{\partial F_2}\frac{dF_2}{dt}\end{aligned}$$

קבועי התנועה

$$\rho = \rho\left(H,L,L_z,(3rd\ Integral)\right)$$

נגדיר

$$\rho^1 = \rho^1\left(H,L,L_z\right)$$

הצפיפות של $\rho$ הריבוע מספיק קטן כך שרק $p_1,q_1$ חשוב. עבור $\rho=\rho\left(H\right)$ אז $\rho\sim e^{-()}$ בגלל התפלגות נורמלית של חלקיקים וצפיפות ההסתברות למצוא את החלקיק הנתון.

דוגמה בגלקסיה

$$\rho \sim e^{-\frac{p_1^2}{2m^2\sigma_1^2}-\frac{p_2^2}{2m^2\sigma_2^2}-\frac{p_3^2}{2m^2\sigma_3^2}}$$

## 3.1 חשבון ווריאציות

$$\delta\int_1^2 Ldt = 0$$

כאשר $\frac{\partial L}{\partial t}=0$ ומערכות הולונומיות.

$$E = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}_j-L$$

נסמן בשם פעולה את

$$\begin{aligned}A &= \int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_1\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_1}dt\\ \left(\omega=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_jP_j\right)\Rightarrow &= \int_{t_0}^{t_1}\omega dt\end{aligned}$$

צ"ל

$$\delta A = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j|_{t=t_0}^{t=t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\Delta Edt$$

כלומר ש $\int_{t_0}^{t_1}\Delta Edt=0$ אז זה נקרה שינוי אדיאבטי. (כלומר אין חילוף אנרגיה בין המערכת לסביבה)
שינוי לגרג'יאני :

$$\int_{t_0}^{t_1}\Delta Ldt = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right)dt$$

השינוי במהירות

$$\begin{aligned}
\Delta\dot{q}_j &= \frac{d}{dt}\delta q_j - \dot{q}_j\frac{d\delta t}{dt} \\
\Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\Delta L dt &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\delta t - \omega\frac{d\delta t}{dt}\right)dt \\
&\quad -\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q}\right]\delta q_j\right\}dt \\
(euler - lagrang) \Rightarrow &= \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial t}\delta t - \omega\frac{d\delta t}{dt}\right)dt - 0 \\
\int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta L + \omega\frac{d\delta t}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}\delta t\right\}dt &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j|_{t_0}^{t_1} \\
\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta\omega + \omega\frac{d\delta t}{dt}\right\}dt &= \int_{t_0}^{t_1}\Delta E dt + \sum_j p_j\delta q_j|_{t_0}^{t_1}
\end{aligned}$$

נשאר להראות $\delta\int_{t_0}^{t_1}\omega dt = \int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta\omega + \omega\frac{d\delta t}{dt}\right\}dt$ ואז נראה את עקרון הפעולה $(A)$ המינימלי שבו $\Delta E = 0$.
מאינטגרציה בחלקים:

$$\int \omega\frac{d\delta t}{dt}dt = -\int \delta t\frac{\partial \omega}{\partial t}dt$$

אז

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \delta w + \frac{\partial \omega}{\partial t}\delta t \\
\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1}\Delta\omega dt &= \int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta\omega + \omega\frac{d\delta t}{dt}\right\}dt \\
\Rightarrow \delta\int_{t_0}^{t_1}\omega dt &= \int_{t_0}^{t_1}\left\{\Delta\omega + \omega\frac{d\delta t}{dt}\right\}dt
\end{aligned}$$

נסמן[14] את עקרון של המילטון

$$\delta S = \delta\int_{t_0}^{t_1} L dt$$

ועקרון של הפעולה המינימלית

$$\delta A = \delta\int_{t_0}^{t_1} w dt = 0$$

שהזמן לא משתנה

$$(\delta S)_T = 0$$

שהאנרגיה לא משתנה

$$(\delta A)_E = 0$$

[14] הרצאה ב-29.12.2004

נגדיר $T=t_1-t_0$ האנרגיה הכוללת במעבר מ-0 ל 1

$$\begin{aligned}
\overline{E} &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_1} H\left(q\left(t\right),p\left(t\right)\right) \\
&= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t1} wdt-\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_1} \\
\overline{E}T &= A-S \\
\Rightarrow \delta S+\overline{E}\delta T &= \delta A-T\delta\overline{E}
\end{aligned}$$

כדי שאגף שמאל יתאפס צריך שהזמן לא ישתנה ו $\delta S=0$. כדי שצד ימין יתאפס צריך ש $\delta A=0$ וגם האנרגיה לא משתנה.

$$\begin{aligned}
T &= E-V=\sqrt{T^2}=\sqrt{T\left(E-V\right)} \\
\delta A &= \delta\int_{t_0}^{t_1} Tdt=\delta\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{T\left(E-V\right)}dt=0 \\
T &= \frac{1}{2}\sum m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j
\end{aligned}$$

אלמנת אורך

$$\begin{aligned}
\left(dp\right)^2 &= \frac{1}{2}\sum m_{ij}dq_idq_j \\
T &= \frac{1}{2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \\
dT &= \frac{dp}{\sqrt{2T}} \\
\delta A=\delta\int\sqrt{2\left(E-V\right)}dp &= \delta\int\sqrt{2\left(H-V\left(q\right)\right)}dp=0
\end{aligned}$$

במרחב הפאזה אם נסמן מסלול מעגלי כך ש

$$\begin{aligned}
\int\delta Ldt &= \sum p_i\delta q_i|_{t_0}^{t_1} \\
\Rightarrow\oint Ldt &= 0 \\
\frac{d}{dt}\oint pdq &= 0 \\
\Rightarrow\oint pdq &= const
\end{aligned}$$

לפי התאוריה של בוהר

$$\oint pdq = const=nh$$

או באוסילטור הרמוני

$$\oint pdq = const=\left(n+\frac{1}{2}\right)h$$

כלומר קיבלנו קוונטיזציה.

## 3.2 טרנספורמציות קנוניות

נרצה[15] לפעמים ליצר טרנספורמציה בין $H,q,p$ ל-$set$ חדש של $K,Q,P$.

**דוגמה** ניקח

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+Aq_1^2+Bq_2^2+Cq_1q_2\right)$$

נגדיר טרנספומציה

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

אז

$$T = \frac{1}{2m}\left(P_1^2+P_2^2\right), m=(m_1m_2)^{\frac{1}{2}}$$

ונגדיר

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{C}{B-A}$$

ואז

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_1^2+P_2^2\right)+\frac{D}{2}\left(SQ_1^2+S^{-1}Q_2^2\right)$$

$$D = \sqrt{AB-\frac{C^2}{4}}$$

$$S^{\frac{1}{2}} = \frac{A+B+\sqrt{(A-B)^2+C^2}}{\sqrt{4AB-C^2}}$$

כאשר $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}, \omega_1=S^{\frac{1}{2}}\omega, \omega_2=S^{-\frac{1}{2}}$

**הגדרה** אם הגדרנו סוגרי $poisson$

$$[P,Q] = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial P}{\partial q_j}\frac{\partial Q}{\partial p_j}-\frac{\partial P}{\partial p_j}\frac{\partial Q}{\partial q_j}\right)$$

נגדיר סוגרי $Lagrange$

$$\{P,Q\} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial q_j}{\partial P}\frac{\partial p_j}{\partial Q}-\frac{\partial q_j}{\partial Q}\frac{\partial p_j}{\partial P}\right)$$

**העתקות** כדי לקבל העתקות קנוניות נרצה

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}$$

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}$$

[15] 3.1.2005

כלומר

$$\begin{aligned}\dot{q_i} &= \frac{\partial q_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\dot{P}_k=\frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p_i} &= \frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial P_i}{\partial P_k}\dot{P}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב- $\frac{\partial p_i}{\partial s}$ ואת השנייה ב- $\frac{\partial q_i}{\partial s}$ ($s$ משתנה כלשהו) ואז

$$\begin{aligned}\sum_i\frac{\partial p_i}{\partial s}\dot{q_i} &= \sum_i\frac{\partial p_i}{\partial s}\frac{\partial q_i}{\partial t}+\sum_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k+\sum_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial p_i}{\partial s}\frac{\partial q_i}{\partial P_k}\dot{P}_k=\sum_i\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s}\\ \sum_i\frac{\partial q_i}{\partial s}\dot{p_i} &= \sum_i\frac{\partial q_i}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial t}+\sum_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\dot{Q}_k+\sum_i\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\dot{P}_k=-\sum_i\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\end{aligned}$$

נחסר את שני המשוואות

$$\begin{aligned}&-\sum_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial s}\frac{\partial q_i}{\partial t}-\frac{\partial q_i}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial t}\right)+\sum_{i,k}\left(\frac{\partial p_i}{\partial s}\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}-\frac{\partial q_i}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial Q_k}\right)\dot{Q}_k\\ &+\sum_{i,k}\left(\frac{\partial p_i}{\partial s}\frac{\partial q_i}{\partial P_k}-\frac{\partial q_i}{\partial s}\frac{\partial p_i}{\partial P_k}\right)\dot{P}_k\\ =&\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s}+\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}\right)=\sum\frac{\partial H}{\partial s}\end{aligned}$$

לכן נדרוש

$$\begin{aligned}\{t,s\} &= 0\\ \forall k,j;\{Q_k,s\} &= 0\\ \{P_k,s\} &= 0\\ \{Q_k,Q_j\} &= 0\\ \{P_K,P_j\} &= 0\\ \{Q_k,P_j\} &= -\{P_k,Q_j\}=\delta_{kj}\end{aligned}$$

**הערה** אנו יכולים לדרוש שגם עקרון הווריאציה של הפעולה המינימלית ישמר, כלומר:

$$\begin{aligned}0 &= \delta\int\left(\sum p_i\dot{q}_i-H\right)dt=\delta\int\left(\sum P_i\dot{Q}_i-K\right)dt\\ \Rightarrow\sum p_i\dot{q}_i-H &= \sum P_i\dot{Q}_i-K+\frac{dF}{dt}\end{aligned}$$

**הגדרה** נגדיר

$$dW_1(q,Q,t) = \sum_{i=1}^{n}p_idq_i-\sum_{i=1}^{n}P_idQ_i$$

ונרצה לבדוק שהוא דיפרנציאל שלם.

$$\begin{aligned}
dq_i &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}dQ_k+\frac{\partial q_i}{\partial p_k}dP_k\right)+\frac{\partial q_i}{\partial t}dt\\
dW_1 &= \sum_j\frac{\partial W_1}{\partial q_j}dq_j+\sum_j\frac{\partial W_1}{\partial Q_j}dQ_j+\frac{\partial W_1}{\partial t}dt\\
&= -\sum_i P_i dQ_j+\sum_i p_i\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k}dQ_k+\frac{\partial q_i}{\partial p_k}dP_k\right)+\frac{\partial q_i}{\partial t}dt\right\}\ (4)\\
\Rightarrow W_1(q,Q,t) &= w\left(q\left(Q_k,P_k,t\right),Q_i,t\right)=w_1\left(Q_k,P_k,t\right)\\
dw_1 &= \sum_\ell\frac{\partial w_1}{\partial Q_\ell}dQ_\ell+\sum_\ell\frac{\partial w_1}{\partial P_\ell}dP_\ell+\frac{\partial w_1}{\partial t}dt=(4)
\end{aligned}$$

נשווה מקדמים

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial P}\frac{\partial W_1}{\partial Q_s} &= -P_s+\sum_{\ell=1}^{n}P_\ell\frac{\partial q_\ell}{\partial Q_s}\\
\frac{\partial}{\partial Q_s}\frac{\partial W_1}{\partial P_s} &= \sum_{\ell=1}^{n}P_\ell\frac{\partial q_\ell}{\partial P_s}\\
\frac{\partial W_1}{\partial t} &= \sum_{\ell=1}^{n}p_\ell\frac{\partial q_\ell}{\partial t}
\end{aligned}$$

נרצה להשוות נגזרות מעורבות

$$\begin{aligned}
-1+\sum_i\frac{\partial p_\ell}{\partial P_s}\frac{\partial q_\ell}{\partial Q_s}+\sum p_\ell\frac{\partial^2 q_\ell}{\partial P_s\partial Q_s} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial P_s\partial Q_s}\\
\sum_i\frac{\partial p_\ell}{\partial Q_s}\frac{\partial q_\ell}{\partial P_s}+\sum p_\ell\frac{\partial^2 q_\ell}{\partial Q_s\partial P_s} &= \frac{\partial^2 w_1}{\partial Q_s\partial P_s}\\
\Rightarrow\{Q_s,P_s\} &= 1
\end{aligned}$$

## *shallow water waves* ואיך נוצר צונמי המים[16] בלתי דחיסים

$$c^2 = \gamma\frac{P}{\rho}\ggg 1\quad\{\infty\}$$

כאשר

$$\gamma = \left(\frac{d\ln P}{d\ln\rho}\right)$$

מחוק שימור המים

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$$

אבל המים בלתי דחיסים ולכן

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{v} &= 0\\
v &= \nabla\phi\\
\nabla^2\phi &= 0
\end{aligned}$$

[16] הרצאה ב 5.1.2005

נניח אין מערבולות

$$\nabla\times\vec{v} = 0$$

משוואת ברנולי

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p-\rho\nabla\varphi$$

כאשר $\varphi$ (במקרה שלנו פוטנציאל גרויטציוני)

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t}-\rho\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} &= -\nabla p-\rho\nabla\varphi\\ \nabla\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho\frac{v^{2}}{2}+p+\rho\varphi\right) &= 0\\ \Rightarrow\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho\frac{v^{2}}{2}+p+\rho\varphi &= const=\phi\end{aligned}$$

לכן אם כיוון הגרביטציה $z$

$$\begin{aligned}\rho\frac{dv_{z}}{dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z}-pg\\ \rho\frac{dv_{x}}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x}\end{aligned}$$

נניח $\frac{\partial v_z}{\partial t}\approx 0$ וגם $\frac{V}{C}\ll 1$ אז

$$\begin{aligned}\rho\frac{dv_{z}}{dt} &= \rho\frac{\partial v_{z}}{\partial t}+\rho\left(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)\\ &= -\frac{\partial P}{\partial z}-pg\\ p\frac{v^{2}}{L} &\approx \frac{P}{L},v^{2}\sim\frac{p}{\rho}\end{aligned}$$

כמוכן

$$\begin{aligned}\gamma &= \left(\frac{d\ln p}{d\ln\rho}\right)=\frac{c_{p}}{c_{v}}\approx 1-2\\ c_{water} &= 1450\frac{m}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{dv_{z}}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g\approx 0\\ \Rightarrow p &= p_{0}-\rho g\left(h+\eta\right)\end{aligned}$$

בכיוון $x$ (שם אין כוח) המומנטום

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= 0\\ \dot{m}v &= -ma\\ \dot{m} &= (h\dot{+}\eta)\Delta x\rho\\ &= \Delta x\rho\left(h+\eta\right)\frac{\partial v}{\partial t}\\ \Rightarrow v\Delta x\rho\frac{\partial\eta}{\partial t} &= \Delta x\rho h\frac{\partial v}{\partial t}\\ h\frac{\partial v_{x}}{\partial x} &= \frac{\partial\eta}{\partial t}\end{aligned}$$

נגזור לפי הזמן

$$hg\frac{\partial^2\eta}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}$$

לכן

$$c_{ph}^2 = gh = 40000$$
$$c = 200\frac{m}{s}$$

בחזרה לטרנספורמציות קנוניות אם[17] הטרנספורמציה תלויה בזמן

$$\{t,s\} = -\frac{\partial^2 W_1}{\partial t\partial s}$$

ואז

$$K = H + \frac{\partial W_1}{\partial t}$$

הערה ניתן להגדיר $W_2, W_3, W_4$ לכל הקומבינציות של הקואורדינטות החדשות והישנות

הערה נרצה

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H\right)dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K\right)dt$$

אז האינטגרנדים זהים עד כדי כיול $(gauge)$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K + \frac{dW}{dt}$$

דוגמה

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + k^2q^2\right)$$
$$q = \sqrt{\frac{2Q}{k}}\cos P$$
$$k>0; p = \sqrt{2Qk}\sin P$$

אז

$$\{P,Q\} = -1$$

נקבל

$$K = \frac{1}{2}\left(2Qk\sin^2 P + k^2\frac{2Q}{k}\cos^2 P\right) = kQ$$

אז נקבל $P$ קואורדינטה ציקלית. לכן $Q = const$ בעצם

$$Q \sim E$$
$$P \sim t$$

עברנו למערכת אוסילטור ועברנו לקואורדינטות אנרגיה והזמן.
באותו אופן ניתן לקבל אי-ודעות על $[E,T] \neq 0$.

[17] הרצאה ב- 10.1.2005

הערה אם מצאנו טרנספורמציה שעבורה כל הקואורדינטות ציקליות, ההמילטוניאן קבוע.

$$K = K(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

אז ניתן להזיז אותו בקבוע ל 0. ואז

$$H + \frac{\partial W_1}{\partial t} = 0$$

וגם

$$dW_1(q, Q, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i$$

אז

$$\begin{aligned} H &= H(q, p, t) \\ &= H\left(q, \frac{dW_1}{dq}, t\right) + \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

אם הטרנספורמציה $Q, P \rightleftharpoons (u_1, u_2, \dots u_{2n})$ אז נגדיר

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \{u_i, u_j\}, P_{rk} = [u_r, u_k] \\ \sum_{r=1}^{2n} \{u_r, u_s\}[u_r, u_k] &= \delta_{ks} \end{aligned}$$

נגדיר

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \\ P_i &= p_i + \delta p_i \\ \delta q_i &= \epsilon q_i(p, q) \\ \delta p_i &= \epsilon p_i(p, q) \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} F(q, P) &= \sum_{i=1}^{n} q_i P_i + \epsilon G(q, P) \\ \delta q_i &= \epsilon \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ \delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \end{aligned}$$

כאשר $G$ הווריאציה של $F$ מטרנספורמצית היחידה. לכן

$$\begin{aligned} f &\rightarrow f + \delta f = f + \epsilon [f, g] \\ \delta H &= \epsilon [H, G] \end{aligned}$$

אם $G$ קבוע של המערכת אז $[H, G] = 0 \Rightarrow \delta H = 0$. לכן קיבלנו שהיוצרים של הטרנספורמציות הקנוניות הם קבועי התנועה.

אם נדרוש ווריאציה של לגרנז'יאן כפונקציה הראשית של ההמילטוניאן

$$\begin{aligned} S &= \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)\, dt \\ S &= S(q_0, q_1, t_0, t_1) \end{aligned}$$

ומצד שני

$$= \quad f\left(q_{i0}, \dot{q_{io}}, t_0, t_1\right)$$

אז

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_0}^{t_1} Ldt = \sum_{i=1}^{n} p_{i1}\delta q_{i1} - \sum_{i=1}^{n} p_{i0}\delta q_{i0} = 0 \\
(holonomic) \Rightarrow L &\neq L(t) \\
\frac{\partial S}{\partial q_{i0}} &= p_{i1} \\
\frac{\partial S}{\partial p_{i0}} &= q_{i1}
\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt_1} &= \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t_1} Ldt = L_1 \\
&= \frac{\partial s}{\partial t_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_{j1}}\frac{dq_{j1}}{dt_1} \\
&= \frac{\partial s}{\partial t_1} + \sum_{j=1}^{n} p_{ji}\dot{q_{ji}} = L_1
\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t_1} &= -\sum_{j=1}^{n} p_{ji}\dot{q_{ji}} + L_1 = -H \\
\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial s}{\partial q}, t\right) &= 0
\end{aligned}$$

קיבלנו מד"ח מסדר ראשון אם $n+1$ משתנים. (מ-$n$ מד"ר מסדר שני) אם אינטגרל שלם שמכיל $n$ קבועים נקבל את $n$ קבועי התנועה.

דוגמה

$$\begin{aligned}
H &= \frac{P^2}{2m} \\
\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\nabla S\right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

נפתור $S = -\alpha t + K\left(q_1, \ldots, q_3\right)$ ונציב

$$\frac{1}{2m}\left(\nabla k\right)^2 = \alpha = E$$

נקבל $s = -Et + K$ אם נוסיף

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(q)$$

אז הפתרון

$$\begin{aligned}
k(x, y, z, E) &= \sqrt{2mE}\frac{x - x_0 + y - y_0 + z - z_0}{\sqrt{3}} \\
S &= -Et + k
\end{aligned}$$

עבור $S$ קבוע במרחב הקונפיגורציה, נקבל מישור.

$$-E\Delta t+k = 17$$

כלומר הפתרון הוא סדרת מישורים (על $S$ קבוע) במרחב הקונפיגורציה במרחק $E\Delta t$.
אם נשים אוסף חלקיקים במישור $S=17$ והמומנטום באותו כיוון. אז כעבור $\Delta t$ כל החלקיקים יזוזו למשטח חדש. כלומר קיבלנו גל מישורי של חלקיקים והפאזה שלו $S$.

**דוגמה** ניקח פוטנציאל

$$H = \frac{p^2}{2m}+gz$$

אז הפתרון שניקח

$$\begin{aligned}
x-x_0 &= x_0\left(t-t_0\right)\\
z-z_0 &= \dot{z_0}\left(t-t_0\right)+\frac{1}{2}g\left(t-t_0\right)^2\\
T &= \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{z}^2\right), S=\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2-gz\right)dt
\end{aligned}$$

נקבל

$$S = \frac{\left(x_1-x_0\right)^2+\left(z_1-z_0\right)^2}{2\left(t-t_0\right)}-\frac{\left(t_1-t_0\right)\left(z_1-z_0\right)}{2}-\frac{g^2\left(t_1-t_0\right)^3}{24}$$

קיבלנו $S$ אליפטי שהראשית. הנורמל למשטח $\nabla S=\vec{p}$.
זה התקדמות של גל שמתואר ע"י $S$ במשוואות התנועה.

**המשוואה של שרדינגר**

$$\begin{aligned}
-\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V\left(X\right)\right]\psi\left(x,t\right)\\
\psi\left(x,t\right) &= e^{i\frac{S(x,t)}{\hbar}}\\
-\frac{\partial s}{\partial t}\psi &= \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+V\left(x\right)-\frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\right]\psi
\end{aligned}$$

**נציב**[18]

$$S = K\left(x,E\right)-Et$$

אזי $\psi$ יהיה חבורת גלים

$$\psi\left(x,t\right) = \int g\left(E\right)e^{i\frac{\left(k(x,E)-Et\right)}{\hbar}}dE$$

התרומה בגבול $\hbar\to 0$ (בגבול בו $\hbar$ קטן מספיק מכל דבר מדיד) תהיה רק עבור המקום בו הנגזרת מתאפסת

$$\frac{\partial}{\partial E}\left(K\left(X,E\right)-Et\right) = \frac{\partial K}{\partial E}-t=0$$

כלומר בנקודה זאת החלקיק נמצא. (בגבול הקלאסי $\hbar\to 0$).
נציב

$$\psi = R\left(x,t\right)e^{i\frac{S(x,t)}{\hbar}}$$

[18] הרצאה ב 12.1.2005

אז נקבל

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{(\nabla s)^2}{2m}+V-\frac{\hbar^2\nabla^2 R}{2mR} &= 0\\ \frac{\partial R^2}{\partial t}+\nabla\cdot\left(R^2\frac{\nabla S}{m}\right) &= 0\end{aligned}$$

דוגמה (המילטון יעקובי) (עבור[19] תנועת קליע)

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)+gz = 0$$

המערכת משמרת אנרגיה ולכן

$$\begin{aligned}S &= K-Et\\ K &= \alpha x+f(z)\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 &= 2E-2gz-\alpha^2=2g(k-z)\\ k &= \frac{2E-\alpha^2}{2g},E=\frac{1}{2}\alpha^2+gk\\ S &= S(x,z,\alpha,E)=\sqrt{2(E-gk)}+\frac{2}{3}(k-z)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

נתון

$$\begin{aligned}S &= (q_1\dots q_n,Q_1,\dots,Q_n)\\ \frac{\partial s}{\partial Q_i} &= -P_i\\ \frac{\partial s}{\partial q_i} &= p_i\end{aligned}$$

לכן למשל אם יש

$$\begin{aligned}I(q_1,\dots,q_n,p_1\dots p_n) &= C_1\\ E(q_1\dots q_n,p_1\dots p_n) &= C_2\end{aligned}$$

אז החיתוך של שני המשטחים משגדירים קבועי התנועה הללו יקראו $Isolating\ integral$ בעוד שאלו שלא יגבילו יקראו $non\ isolating\ integral$

הערה באופן כללי אנו רוצים

$$\begin{aligned}0 &\neq J\\ &= \left|\frac{\partial(p_1\dots p_n)}{\partial(Q_1\dots Q_n)}\right|\\ &= \left|\frac{\partial^2 S}{\partial q_i\partial Q_i}\right|\end{aligned}$$

כלומר שאין תלות ליניארית בשום נקודה.

[19] הרצאה ב 17.1.2005

עבור המילטון יעקובי

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t}+H\left(q,\frac{\partial s}{\partial q},t\right) &= 0\\ \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial Q_1\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 s}{\partial Q_1\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} &= 0\end{aligned}$$

אבל אנו יודעים $\frac{\partial s}{\partial Q_1}=-P_1$ כאשר $P_1$ קבוע תנועה

$$\frac{dP_1}{dt}=0$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t\partial Q_1}+\sum_j\frac{\partial^2 s}{\partial q_j\partial Q_1}\frac{dq_j}{dt} = \frac{dP_1}{dt}=0$$

אם נחבר את המילטון יעקובי

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 s}{\partial q_j\partial Q_1}\left[\frac{\partial q_j}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right] = 0$$

אבל דרשנו $\frac{\partial^2 s}{\partial q_j\partial Q_q}\neq 0$ כלומר

$$\frac{\partial q_j}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial p_j} = 0$$

תרגיל נתון

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2+gz &= 0\\ s &= K-Et\\ K &= f(x)+f(z)=\alpha x+f(z)\\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 &= 2E-2gz-\alpha^2\\ &= 2g(k-z)\\ k &= \frac{2E^2-\alpha^2}{2g}\\ E &= \frac{1}{2}\alpha^2+gk\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}f(z) &= \sqrt{2g}\frac{2}{3}(k-z)^{\frac{3}{2}}\\ S(x,y,\alpha,k) &= -\left(\frac{1}{2}\alpha+gk\right)t+\alpha x\pm\frac{3}{2}(k-z)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\partial s}{\partial \alpha}=-\alpha t+x\\ -\gamma &= \frac{\partial s}{\partial k}=-gt+\sqrt{2g(k-z)}\\ \Rightarrow x &= \alpha t+\beta\\ z &= \gamma t-\frac{1}{2}gt^2\end{aligned}$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \dot{x_0}\\
\beta &= -x_0\\
\gamma &= \dot{z_0}\\
k &= z_0+\frac{\dot{z_0}^2}{2g}
\end{aligned}
$$

**הקשר בין אופטיקה פיזיקלית לאופטיקה גיאומטרית** הפונקציה $S$, $WKB$. $\vec{p}=-\nabla S$

$$
\begin{aligned}
S &= K-Et\\
dS^2 &= 2Tdt^2\\
&= 2\left(E-V\left(q\right)\right)dt^2=\left(\frac{c}{n\left(q\right)}\right)^2 dt^2\\
\frac{ds}{dt} &= \dot{q}=\frac{E}{\left|\nabla k\right|}=\frac{E}{\sqrt{2T}}=\frac{E}{\left(\frac{c}{n}\right)}
\end{aligned}
$$

נגדיר

$$
\left(\varepsilon iconal\right):\qquad \left|\nabla k\right|=\frac{n}{c}=\frac{1}{\sqrt{2\left(E-V\right)}}
$$

משוואת הגלים

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{n}{c}\right)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi &= 0\\
\phi\left(x,y,z,t\right) &= Ae^{i\left(K\cdot\vec{r}-\omega t\right)}\\
\left|\vec{k}\right| &= \frac{2\pi}{\lambda}=\frac{n\omega}{c}
\end{aligned}
$$

נניח $n$ משתנה "לאט"

$$
\phi = A\left(x,y,z\right)e^{ik_0\left(I(x,y,z)-\frac{c}{n}t\right)}
$$

בואקום

$$
k_0 = \frac{n\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda_0}
$$

לכן למשוואה יש חלק ממשי ומדומה

$$
\begin{aligned}
\left(Real\ Part\right)\Rightarrow\nabla^2A-Ak_0^2\left[\left(\nabla I\right)^2-n^2\right] &= 0\\
\left(Im\ Part\right)\Rightarrow\nabla A\cdot\nabla I+A\nabla^2 I &= 0
\end{aligned}
$$

אלו משוואות של האופטיקה הפיזיקלית.

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 A &\sim \frac{A}{L^2}\\
\nabla I &\sim \frac{I}{L}
\end{aligned}
$$

נציב את הערכות הללו כאשר $k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}$ ונקבל

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{L^2}-A\frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left(\frac{I^2}{L^2}-n^2\right) &= 0\\
\Rightarrow\frac{\lambda^2}{L^2}-4\pi^2\left(\frac{I^2}{L^2}-n^2\right) &= 0
\end{aligned}
$$

נניח $\frac{\lambda}{L} \ll 1$ כלומר אורך הגל קטן מאוד מהגאומטריה של הבעיה. ואז

$$\begin{aligned}\Rightarrow |\nabla I| &= n \\ \nabla A \cdot \nabla I + A\nabla^2 I &= 0\end{aligned}$$

וגם המשוואה זהה ל $|\nabla k| = \frac{n}{c}$. כלומר ראינו שכאשר $L \gg \lambda$ מקבלים את הגבול הגיאומטרי.

אפקט פאטה_מורגנה

$$\begin{aligned}n &= n_0\left(1+\alpha z\right) \\ \alpha &\sim 10^{-5}, 10^{-6}\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}\nabla I &= n\left(\vec{r}\right)\frac{d\vec{r}}{ds} \\ \Rightarrow \nabla n &= \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) \\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) &= \left(\nabla n\right)_x = 0 \\ \frac{d}{ds}\left(n\frac{dz}{ds}\right) &= \left(\nabla n\right)_z = \alpha\end{aligned}$$

אז

$$n\frac{dx}{ds} = \beta = const$$

את המשוואה השניה נקרב. נניח $\Delta s \approx \Delta x$ ואז ניתן לכתוב בערך

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(n\frac{dz}{dx}\right) &= \alpha \\ \left(n\frac{dz}{dx}\right) &= \alpha x + b_0 \\ z\left(z\right) &= \frac{\alpha x^2}{n_0} + \alpha_0 x + b_0\end{aligned}$$

סה"כ

$$\vec{r} = \left(x, \frac{\alpha x^2}{2} + \tan\theta_0 + z_0\right)$$

כלומר התנועה היא פרבולה.

**äøöàä á 24.1.2005**

## 3.3 Poincare Recurrence Theorem

**משפט** נתון מרחב פאזה בעלת נפח סופי. נתונות $n$ מערכות לכל מערכת יש $m$ דרגות חופש, סה"כ $n\times m$ דרגות חופש. אזי לאחר מספיק זמן המערכת תחזור לסביבת $\varepsilon$ של המערכת.

**הוכחה** נתון נפח $p_0$ הכלוא בתחום $\Omega_0$ כך שהנפח $V\left(\Omega_0\right) = d_3$. לכן נסתכל על המערכת כל צעד $\Delta t$ וידוע כי $\Omega$ בעל נפח קבוע לפי משפט ליוביל. אז קיים

$$T\left(i\Delta t\right)\Omega_0 = \Omega_i$$

הנפח הכולל במרחב הפאזה שבו המערכת נעה יהיה $\Omega$ ולפי תנאי המשפט יהיה סופי.
נוכיח בשלילה למקרה שזה לא חוזר אז נסמן

$$\Gamma_{total} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} T\left(i\Delta t\right) \Omega_0$$

אם כל $i \neq j; \Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ אז

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Omega\right) \quad = \quad nd_3 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

אז לא יתכן שכל $\Omega_i$ זרות. הנפח הכולל במרחב הפאזה שבו המערכת נעה יהיה $\Omega$ סופי! נניח כי האנרגיה קבוע אז ניתן להפוך את הזמן

$$\begin{aligned} T\left(n\Delta t\right)\Omega_0 \quad &\cap \quad T\left(m\Delta t\right)\Omega_0 \neq \phi \\ \Rightarrow T^{-1}\left(n\Delta t\right)\Omega_0 \quad &\cap \quad T^{-1}\left(m\Delta t\right)\Omega_0 \neq \phi \end{aligned}$$

לכן אם נבחר את החיתוך של שני החלקים עבור $\Omega_0$ נמצא מה שחוזר על עצמו.

**הערה** יכול להיות התחום "חורים" אז זה נכון לכן נקודה שאנו יודעים שהמערכת יכולה להיות בה.

**הערה** כאשר מספר דרגות החופש $n \gg 1$ ונניח שהנפח פשוט קשר. נניח נתונה פונקציה $F\left(q,p\right)$ אז האם קיים הגבול

$$F_L \quad = \quad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F\left(q\left(t\right), p\left(t\right)\right) dt$$

נניח שהגבול קיים. לחילופין ניקח את כל המולקולות שאנו מודדים בזמן $t$ ונמצא אנרגיה ממוצעת לפי

$$F_V \quad = \quad \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} F dV$$

אז $Ergodic\ theorem$ מניחה $F_L = F_V$ אבל הוכח רק לכדורי בילארד ע"י $Sinai$
בגלל שלא מוכח מחליפים את זה
בהנחה ש
לנפחים שווים במרחב הפאזה סיכוי שווה להימצאות המערכת.