אינטגרציה של משוואות התנועה

זמן מחזור תנודות $T(E)=\sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)}\frac{dx}{\sqrt{E-U_{eff}(x)}}$,

כאשר $x_1(E)$ ו $x_2(E)$ הם שורשי $U(x)=E$

אנרגיה פוטנציאלית $x_2(U)-x_1(U)=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$

פוטנציאל סימטרי $x(U)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2m}}\int_0^U\frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}$

בעיית שני גופים

מסה מצומצמת $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

תנע זוויתי $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$

פוטנציאל מרכזי אפקטיבי $U_{eff}=U(r)+\frac{l^2}{2mr^2}$

חישוב נקודות פנייה $r_{\min}$ ו- $r_{\max}$ $U_{eff}(r)=E$

שינוי זווית הרדיוס וקטור $\Delta\varphi=2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\frac{ldr}{r^2\sqrt{2m(E-U)-l^2/r^2}}$

התנאי למסלול סגור $\Delta\varphi=\frac{2\pi m}{n}$

משוואת בינה (מציאת כוח מהמסלול או להפך)

$\frac{l^2u^2}{m}(\frac{d^2u}{d\theta^2}+u)=-f(\frac{1}{u})$ *כאשר* $u=1/r(\theta)$

פתרון בעיית קפלר $p/r=1+e\cos\varphi$

כאשר $U=-\frac{\alpha}{r}$ $p=\frac{l^2}{m\alpha}$ $e=\sqrt{1+\frac{2El^2}{m\alpha^2}}$

המסלולים

אליפסה $E<0$ $0<e<1$ $a=\frac{\alpha}{2|E|}$ $b=\frac{l}{\sqrt{2m|E|}}$

רדיוסים $r_{\max}=a(1+e)$ $r_{\min}=a(1-e)$

זמן מחזור $T=\pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$

מעגל $E_{\min}=-\frac{\alpha^2m}{2l^2}$ $e=0$ $r=\frac{l^2}{\alpha m}$

היפרבולה $E>0$ $e>1$ $r_{\min}=\frac{\alpha(e-1)}{2E}$

פרבולה $E=0$ $e=1$ $r_{\min}=\frac{l^2}{2m\alpha}$

משוואות קנוניות וחוקי שימור

קואורדינטות מוכללות $q_1,q_2,.....,q_n$

תנע וכוח מוכללים $p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}$ $Q_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}$

לגרנז'יאן $L=T-V$

כיול $L'(q,\dot{q},t)=L(q,\dot{q},t)+\frac{d}{dt}f(q,t)$

המילטוניאן $H=\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-L=\sum_i p_i\dot{q}_i-L$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{dH}{dt}$$

פעולה $S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)dt$

פעולה בקואורדינטות $dS=\sum_i p_idq_i-Hdt$

או בדיפרנציאלים $\frac{\partial S}{\partial t}=-H$ $\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i$ $\frac{dS}{dt}=L$

משוואות אוליר-לגרנז' $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$

משוואות המילטון-יעקובי $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$ $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$

שימור אנרגיה *בתנאי ש-* $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ נקבל $E=H=T+V$

סוגרי פואסון $\{H,f\}=\sum_i(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i})$

תכונות $\{f,g\}=-\{g,f\}$ $\{f,f\}=\{c,f\}=0$

$\{f_1+f_2,g\}=\{f_1,g\}+\{f_2,g\}$

$\{f_1\cdot f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\}$

$\{f,q_i\}=\frac{\partial f}{\partial p_i}$ $\{f,p_i\}=-\frac{\partial f}{\partial q_i}$

$\{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0$ $\{p_i,q_j\}=\delta_{ij}$

זהות יעקובי $\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$

תנאי לקבוע תנועה $\frac{\partial f}{\partial t}+\{H,f\}=0$

משפט אם f ו-g קבועי תנועה אז גם $\{f,g\}$ הוא קבוע תנועה.

בעיית פיזור

זווית פיזור $\theta = \pi - 2\varphi$

זווית רדיוס וקטור
$$\varphi = 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{b\cdot dr}{r^2\sqrt{1-\frac{b^2}{r^2}-\frac{2U}{mv_\infty^2}}}$$

כאשר b הוא פרמטר הפגיעה

חתך הפעולה הכולל $d\sigma = 2\pi b\cdot db$

אלמנט זווית מרחבית $d\Omega = 2\pi\sin\theta\cdot d\theta$

שטף החלקיקים ליח' שטח $j = \frac{dN}{dt\cdot d\sigma}$

חתך הפעולה הדיפרנציאלי $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$

נוסחת רטרפורד $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{2mv_\infty^2\sin^2{\theta/2}}\right)^2$

סוגים של גופים קשיחים

סביבון כדורי $I_1 = I_2 = I_3$

רוטטור $I_1 = I_2\ I_3 = 0$

גוף שטוח $I_1 + I_2 = I_3$

סביבון סימטרי $I_1 = I_2 \neq I_3$

סביבון א-סימטרי $I_1 \neq I_2 \neq I_3$

כדור $I = \frac{2}{5}mR^2$

דיסקה $I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$

מוט דק $I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{12}mL^2$

גליל
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{m}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right)$$
$$I_{zz} = \frac{1}{2}mR^2$$

חרוט
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{3}{20}m\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right)$$
$$I_{zz} = \frac{3}{10}mR^2$$
מרכז מסה ב- $l = \frac{3}{4}H$

אליפסואיד
$$I_1 = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$$
$$I_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$$
$$I_3 = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$$

טיבה כמו האליפסואיד רק אם מקדם $\frac{m}{12}$ במקום $\frac{m}{5}$

גוף קשיח

מהירות חלקיק מסה $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}$

מהירות ההזזה $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{a}$

כאשר $\vec{a}$ הוא וקטור המעתיק את הצירים ממרכז המסה

המהירות הזוויתית $\omega = \frac{V_{cm}}{a}$

כאשר a הוא המרחק ממרכז המסה לציר הרגעי

טנזור ההתמדה $I_{ik} = \iiint \rho(x_l^2\delta_{ik} - x_i x_k)dV$

במערכת ראשית
$$I_{xx} = \iiint \rho(y^2 + z^2)dV$$
$$I_{yy} = \iiint \rho(x^2 + z^2)dV$$
$$I_{zz} = \iiint \rho(y^2 + x^2)dV$$

טרנס' טנזור ההתמדה $I'_{ik} = I_{ik} + \mu(a^2\delta_{ik} - a_i a_k)$

העתקה לאורך אחד הצירים $I'_{ii} = I_{ii} + \mu a^2$

(רכיב של הטנזור לאורך ציר ההעתקה לא משתנה)

מומנט התמד $I = \hat{\omega}\cdot I_{ik}\cdot\hat{\omega}$

במערכת ראשית $I = \alpha^2 I_{xx} + \beta^2 I_{yy} + \gamma^2 I_{zz}$

כאשר $\hat{\omega} = \alpha\cdot\hat{i} + \beta\cdot\hat{j} + \gamma\cdot\hat{k}$

אנרגיה קינטית במערכת מה"מ $T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}I_{ik}\omega_i\omega_k$

במערכת ראשית $T_{rt} = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2)$

תנע זוויתי $L_i = I_{ik}\omega_k$

במערכת ראשית $L_x = I_{xx}\omega_x \quad L_y = I_{yy}\omega_y$

$L_z = I_{zz}\omega_z$

זוויות אוילר
$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi$$
$$\omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}$$

אנרגית סיבוב של סביבון סימטרי
$$T_{rt} = \frac{1}{2}I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$
$$T_{rt} = \frac{I_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2$$

משוואות אויילר
$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = N_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3$$

פרצסיה של סביבון סימטרי חופשי $\Omega_{pr} = \omega_3\frac{I_3 - I_1}{I_1}$

פרצסיה של סביבון סימטרי מאולץ
$$\Omega_{pr}\times L_3 = N$$
$$N = R\times F$$

כאשר R הוא המרחק מהנקודה הקבועה עד מרכז המסה

תנודות קטנות

קאורדינטות מוכללות $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ מתארות סטייה משיווי מישקל

קירוב אנרגיה פוטנציאלית (סדר ראשון) $V = \frac{1}{2} V_{ij} \eta_i \eta_j$ (תבנית ריבועית סימטרית)

כאשר $V_{ij} = \frac{\partial V}{\partial q_i \partial q_j}$

קירוב אנרגיה קינטית (סדר ראשון) $T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$ (תבנית ריבועית סימטרית, בד"כ אלכסונית)

תדירויות התנודה החופשית $\left| V - \omega_i^2 T \right| = 0$

משרעות התנודה החופשית $(V - \omega_i^2 T) \cdot \vec{a}_i = 0$ כאשר הוקטור מנורמל לפי ההתנאייה $a_i^T T a_i = 1$

מטריצת המעבר $A_{ij} = \{ \vec{a}_1 \mid \vec{a}_2 \mid .... \mid \vec{a}_{i-1} \mid \vec{a}_i \}$ כאשר $A^T T A = 1$ ו- $A^T V A = diag(\omega_1^2, ..., \omega_i^2)$

קואורדינטות נורמליות ולגרנז'יאן $\vec{\eta} = A_{ij} \vec{\xi}$ $L = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_i^2 - \omega_i^2 \xi_i^2)$

משוואות התנועה בקואורדינטות נורמליות $\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$ שפתרונה $\xi_k = C_k e^{-i\omega_k t}$

או בקאורדינטות המוכללות $\eta_i = \Re e(\sum_k a_{ik} \xi_k) = \Re e(\sum_k C_k a_{ik} e^{-i\omega_k t}) = \sum_k a_{ik}(\alpha_k \cos\omega_k t + \beta_k \sin\omega_k t)$

כאשר $\alpha_k = \Re e C_k$ ו- $\beta_k = \operatorname{Im} C_k$ ניקבעים ע"י תנאי התחלה $\alpha_l = a_{jl} T_{jk} \eta_k(0)$ $\beta_l = \frac{1}{\omega_l} \sum_{j,k} a_{jl} T_{jk} \dot{\eta}_k(0)$

משוואות תנועה של תנודות מאולצות $\ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = \sum_j A_{ji} f_j = Q_i$ כאשר f_j הוא היטל הכוח המאלץ על η_j

והפתרון הפרטי לכוח מחזורי $\xi_i = \frac{Q_{oi}}{\omega_i^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \delta_i)$ $\eta_j = \sum_i \frac{a_{ji} Q_{oi} \cos(\omega t + \delta_i)}{\omega_i^2 - \omega^2}$

משוואת תנועה של תנודות מרוסנות $\ddot{\xi}_i + \frac{\gamma}{m_i} \dot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0$ כאשר פונקציית הדיסיפציה $F_i = -\gamma \cdot \dot{\eta}_i$

והפתרון $\xi_i = C_i e^{-\frac{\gamma t}{2m}} e^{-i\omega_i' t}$ כאשר $\omega_i' = \sqrt{\omega_i^2 - \frac{\gamma^2}{4m_i^2}}$

זהויות מתמטיות שימושיות

סכום וקטורים $\left| \vec{a} + \vec{b} \right|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$ *כאשר θ הזווית ביניהם*

זהויות וקטורים

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$