פיסיקה 3ח'

קבועים ויחידות:

אורך	$1mm=10^{-3}m$ $\quad 1\overset{o}{A}=10^{-10}m$ $1\mu m=10^{-6}m$ $\quad 1fm=10^{-15}m$ $1nm=10^{-9}m$
מהירות האור	$c=3\cdot10^{8}\frac{m}{\sec}=3\cdot10^{10}\frac{cm}{\sec}$
טמפרטורה	$0^\circ c=273^\circ k$ $\qquad 300^\circ k=27^\circ c$
קבוע בולצמן	$K_B=1.38\cdot10^{-23}\frac{J}{K^\circ}=8.617\cdot10^{-5}\frac{eV}{K^\circ}$
אנרגיה וכוח	$1Joule=10^{7}erg$ $1eV=1.6\cdot10^{-19}Joule$ $1[N]=10^{5}[dyne]$ $1[N\cdot m]=1[J]=1\left[kg\left(\frac{m}{\sec}\right)^2\right]$ $1T=10^{4}Gauss$
קבוע פלאנק	$h=6.626\cdot10^{-34}[J\cdot\sec]=4.136\cdot10^{-15}[eV\cdot\sec]$ $\bar{h}=1.055\cdot10^{-34}[J\cdot\sec]=6.582\cdot10^{-16}[eV\cdot\sec]$ $\bar{h}=\frac{h}{2\pi}$ $\qquad \bar{h}c=1973.52\left[eV\cdot\overset{o}{A}\right]$ $hc=12400\left[eV\cdot\overset{o}{A}\right]=1.98\cdot10^{-25}[J\cdot m]$
מסת אלקטרון אנרגית מנוחה מטען האלק' מקדם קולון	$m_e=9.1095\cdot10^{-31}Kg=0.000549amu$ $m_ec^2=0.511\cdot10^{6}[eV]=0.511[MeV]$ $e=1.602\cdot10^{-19}[col]=4.8032\cdot10^{-10}[esu]$ $k=8.988\cdot10^{9}\left[\frac{N\cdot m^2}{c^2}\right]\approx9\cdot10^{9}$ $ke^2=14.4\overset{o}{A}eV=1.44\cdot10^{6}eV\cdot fm$
מסת פרוטון אנרגית מנוחה	$m_p=1.6726\cdot10^{-27}Kg$ $m_pc^2=938.28\cdot10^{6}eV$
מסת ניוטרון אנרגית מנוחה	$m_n=1.675\cdot10^{-27}Kg$ $m_nc^2=939.57\cdot10^{6}eV$
מספר אבוגדרו מסה	$N_a=6.022\cdot10^{23}[particles/mole]$ $1[amu]=931.4923\left[MeV/c^2\right]$ $1\left[MeV/c^2\right]=1.7827\cdot10^{-30}[Kg]$
קבוע רידברג	$R=1.097\cdot10^{7}\quad[1/m]$
שטח	מעטפת כדור: $S_{shell}=4\pi R^2$
דיפרנציאלים	יחידת נפח - $dV=r^2\cos\theta\cdot dr\cdot d\theta\cdot d\varphi$ או תחת סימטריה כדורית $dV=d^3r=4\pi r^2\cdot dr$
טריגו' זהות אוילר	$\sin^2\theta=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$, $\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$ $\sin x+\sin y=\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ $\qquad e^{i\theta}+e^{-i\theta}=2\cos\theta$
סטיית תקן	$\Delta A=\sqrt{<A^2>-<A>^2}$
פונק' גאמא	$\int_0^\infty x^ne^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}\qquad(a>0,\ \ n=0,1,\ldots)$

תורת היחסות הפרטית:

$$E^2=p^2c^2+m^2c^4,\quad E_{tot}=\gamma mc^2,\quad \gamma=\left(1-\beta^2\right)^{-1/2},\ p=\gamma mv$$

$$E_{rest}=mc^2,\quad E_k=(\gamma-1)mc^2\xrightarrow[non-relative]{\gamma\to1}E_k=\frac{p^2}{2m}=\frac{1}{2}mv^2$$

טרספורמצית מהירות: מהירות גוף U_x כפי שהיא נמדדת במערכת S , V

מהירות בין מערכות, מהירותו במערכת S' : $\beta'=\frac{\beta_1-\beta_2}{1-\beta_1\beta_2}$

גלים ופוטונים: $E_{ph}=h\nu_{ph}=\frac{hc}{\lambda_{ph}}=p_{ph}c\quad;\quad p=\frac{h}{\lambda},\ \lambda\nu=c$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=2\pi\nu,\quad v_{phase}=\frac{\omega}{k}=\lambda\nu,\quad v_{group}=\frac{d\omega}{dk}=\frac{dE}{dp}$$

גל הרמוני מישורי בכיוון $\hat{x}$: $\Psi(x,t)=A\cdot e^{i(kx-\omega t)}$

גל עומד בכיוון $\hat{x}$: $\Psi(x,t)=\Psi_1+\Psi_2=2A\sin(kx)\cos(\omega t)$

הגל העומד נוצר מ-2 גלים רצים: $\Psi_{1,2}(x,t)=A\sin(kx\pm\omega t)$

מרחק בין 2 אפסים (קבועים בזמן) של גל עומד: $x=\frac{n\pi}{k}$

<u>האפקט הפוטואלקטרי</u> – פליטת אלק' ממתכת מוקרנת בפוטונים.

א. עבור $\nu<\nu_c$ (ν_c - תדירות קריטית אופיינית למתכת) אין פליטת אלק'

ב. אותו שיפוע h עבור כל המתכות ועבור האלק': $E_{k,\max}=h\nu-E_0$

ג. תדירות סף לפליטת אלקטרון (w פונק' עבודה): $\nu_c=\frac{E_0}{h}=\frac{w}{h}$

ד. האלק' נפלטים מיד עם הקרנת המתכת: $t_{extract}<10^{-9}$

ה. עוצמת האור $\propto$ מספר האלק' הנפלטים (הזרם): $i_{current}=I_{light}$

<u>אפקט קומפטון</u> - אור שפוגע בחומר גורם לפליטת קרינה ב- $\lambda'>\lambda$

נוסחת הפיזור (θ - זווית פיזור הפוטון, λ - אורך גל של הפוטון (לפני)).

$$\lambda'-\lambda=\frac{hc}{mc^2}(1-\cos\theta);E_{ph}=\frac{hc}{\lambda}\Rightarrow E'_{ph}=\frac{E_{ph}}{1+\frac{E_{ph}}{mc^2}(1-\cos(\theta))}$$

עבור פגיעה באלק' $\lambda'-\lambda=\lambda_c(1-\cos\theta)$, $\lambda_c=\frac{hc}{mc^2}=0.0243\overset{o}{A}$

כאשר (נגדיר) $\Delta\equiv\lambda_c(1-\cos\theta)$ $\qquad E_{ph}-E'_{ph}=\frac{E_{ph}\Delta}{\lambda+\Delta}=\frac{E_{ph}\Delta}{\lambda'}$

<u>הערה</u>: אנרגיה מקסימאלי מועברת כאשר הפוטון מוחזר בזוית של 180^o

<u>הערה</u>: כאשר <u>האלק'</u> (או חלקיק אחר בו מתנגש הפוטון) **<u>אינו במנוחה</u>** יש להשתמש באפקט <u>דופלר</u> לשינוי אורך הגל של הפוטון

<u>אפקט דופלר – שינוי אורך גל של חלקיק (פוטון) במערכת יחסותית</u>:

אפקט דופלר עבור 2 מערכות הנעות זו לקראת זו: $\lambda'=\lambda\sqrt{\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)}$

אפקט דופלר עבור 2 מערכות המתרחקות זו מזו: $\lambda'=\lambda\sqrt{\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)}$

הערה חשובה: במידה והייתה התנגשות וכעת אחד הגופים בלבד שינה כיוון, חזרה לאורך גל המקורי תתבצע באמצעות אותה נוסחה!

<u>גוף שחור</u> – גוף שבולע (אידיאלית) את כל האור שמאירים עליו.
הגוף גם פולט אידיאלי ובסופו של הדבר יגיע לשיווי משקל.

<u>אנרגיה ממוצעת של גלים שנפלטים בטמפרטורה</u> T: $\bar{E}=K_BT$

אנרגיה ממוצעת של פוטון: $\bar{E}_{ph}=\overline{h\nu}\cong2.7\cdot K_BT$

בתוך חלל של גוף שחור יתכנו רק גלים עומדים בעלי אנרגיה: $E=nh\nu$

<u>חוק ווין (Wein)</u>: כל גוף בטבע פולט קרינה בכל אורכי הגל וקיים
$\lambda_{I,\max}$ - <u>אורך הגל של הקרינה הנפלטת בעלת העוצמה הגדולה ביותר</u>

המקשר בין אורך הגל לטמפ': $\lambda_{\max}=\frac{b}{T}[m]\quad b=2.898\cdot10^{-3}\left[K^om\right]$

עוצמת הקרינה הנפלטת $D(\nu)$ ואנרגיה של הקרינה $U(\lambda)$ (ניסוי פלאנק):

$$D(\nu)=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\cdot\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{KT}}-1}\quad;\quad U(\lambda)=D(\nu)\left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right|=D(\nu)\frac{c}{\lambda^2}$$

חוק סטפן-בולצמן: קצב פליטת (הספק) אנרגיה ליחי שטח של גוף שחור

$$J = \sigma T^4 \quad ; \quad \sigma = 5.67\cdot 10^{-8}\frac{Watt}{(K^o)^4 m^2}$$

קצב פליטת אנרגיה ממעטפת כוכב בטמפ' T_* ורדיוס R_*: $P_* = \sigma T_*^4 \cdot 4\pi R_*$

אנרגית קרינה ביח' נפח בטמפ' T: $\rho = \frac{E}{V} = \int_0^\infty D(\nu)d\nu = \frac{8\pi^5 K_B^4}{15h^3c^3}T^4$

קרינת X – אלקטרון שפוגעים בחומר גורמים לפליטת קרינת X.

א. אורך הגל של הקרינה: $eV = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{hc}{V_0} = \frac{12400}{V_0}$

ב. שיאים בגלל בליעה מוחלטת של אנרגיה ופליטתה במעבר בין רמות.

גלי דה-ברולי - כשם שגל נוהג כמו חלקיק, גם החלקיק נוהג כמו גל.

התנהגות גלית של חומר: $f = \frac{E_k}{h} \quad ; \quad \lambda_{particle} = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_k 2mc^2}}$

הערה: עבור חלקיקים "גדולים" (אפילו אבק) אורך הגל יוצא קטן מאד ככל שהגוף גדול יותר כך האורך גל קטן יותר כי $\lambda \propto 1/p$

אורך גל של חלקיק בעל E הנתון בפוטנציאל V_0: $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m(E-V_0)}}$

פיזור בראג – התאבכות של חלקיקים אלמנטריים (ולא רק גלים).

θ - הזווית בין האלומה למשטח: $2d\sin\theta = n\lambda \quad ; \quad n = 0,1,2,...,\left[\frac{2d}{\lambda}\right]$

הערה: הפרשי דרכים שמהווים מס' שלם של אורכי גל = התאבכות בונה.

פיזור רטרפורד – חלקיק (α) מתפזר בזוית θ מגרעין של אטום:

$$b(\theta) = \frac{kQq}{mV_0^2}\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}r_0\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad , \quad r_0 = \frac{ke^2 z_1 z_2}{E_k}$$

הערה: עבור $b=0$ מקבלים את הזווית המרבית $\theta = 180^o$.

עבור b גדול מאד נקבל $\theta = 0^o$, כלומר שאין פיזור כלל.

"מרחק החליפה" (הקצר ביותר לגרעין): $D(\theta) = \frac{1}{2}r_0\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)$

תוצאה 1: עבור התנגשות חזיתית $r_{\min} = r_0 \Leftarrow \theta = 180^o \Leftarrow b = 0$
וכאן כל האנרגיה הקינטית הפכה לאנרגיה פוטנציאלית.

תוצאה 2: החלקיקים הפוגעים במשטח πb^2 יתפזרו בזוית גדולה מ- θ.
למשטח זה קוראים חתך פעולה דיפרני'

חלק מהחלקיקים המתפזרים בזוית גדולה מ- θ: $f = \pi b^2(\rho_t t_t)$

$\rho_{t[m^{-3}]}$ צפיפות גרעינים, $S_{[m^2]}$ שטח האלומה, $t_{t[m]}$ עובי השכבה המפזרת.

כל חלקיק מפוזר מגרעין בודד, לכן מס' החלקיקים שפוזרו: $\rho_t t_t S$

השטח שבו פוגעים החלקיקים (טבעת): $dA = 2\pi\left(r\sin(\theta)\right)(rd\theta)$

מס' החלקיקים שנופל על יחי שטח בטבעת $(\theta \leftrightarrow \theta + d\theta)$:

$$\frac{dN(\theta)}{dA} \equiv N_0\frac{df}{dA} = N_0\frac{\rho_t\cdot t_t\cdot r_0^2}{16r_{scr}\sin^4(\theta/2)} \Rightarrow \frac{dN(\theta)}{dA} \propto \frac{1}{\theta}$$

N_0 - מס' החלקיקים הכללי הנופל על המשטח, r_{scr} - מרחק המסך.

מס' החלקיקים הפוגעים בגלאי: $a = jN_t\frac{S}{r^2}\frac{d\sigma}{d\Omega}$

כאשר j זרם ליחי שטח, S – שטח גלאי, r – מרחק הגלאי.

פיזור: $N_{\left[\frac{1}{\sec}\right]} = S_{[m^2]}\cdot n_{\left[\frac{1}{m^2}\right]}\cdot I_{0\left[\frac{1}{\sec}\right]} = \pi(b^2_{(\theta_1)} - b^2_{(\theta_2)})\cdot\rho_t t_t\cdot(J\cdot A)$

S- שטח פגיעה רצוי (ע"פ זווית) עבור גרעין בודד. n - מס' הגרעינים המחזירים במטרה ליחי שטח. I_0 - מס' החלקיקים הפוגעים במטרה כולה לשניה. N – מס' החלקיקים המפוזרים לשניה.

$A_{[m^2]}$ שטח חתך האלומה הפוגעת. $J_{[m^{-2}\sec^{-1}]}$ שטף אלומת החלקיקים.

מבנה האטום $R_a = 1\mathring{A} \quad ; \quad R_{nucl} = 1fm = 1\cdot 10^{-15}m \approx R_0 A^{1/3}$

A מסי אטומי – סה"כ נוקלאונים, $R_0 = 1.4fm$ מניסוי.

מודל תומסון – מודל עוגת הצימוקים – אלקי מפוזרים באופן אחיד.

מודל בוהר - נובע מהרכבה של חוק קולון: $\frac{Ke^2}{r^2} = ma_r = \frac{mv^2}{r}$

אנרגיה קינטית: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

וקוונטוט התנע הזוויתי (הכי חשוב): $L = mvr = n\hbar \quad n = 1,2,...$

אנרגיה: $E_n = \frac{\mu K^2 e^4}{2\hbar^2}\cdot\frac{Z^2}{n^2} = E_0\frac{Z^2}{n^2}, \quad E_0 = -13.6_{ev} \quad n = 1,2,...$

אנרגית עירור: $\Delta E_{1\to n} = E_i - E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_0\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$

הערה: במצב קשור $E<0$ ואילו במצב חופשי $E>0$

רדיוס: $R_n = \frac{\hbar^2}{\mu Ke^2}\cdot\frac{n^2}{Z} = R_0\cdot\frac{n^2}{Z}, \quad R_0 = 0.529\mathring{A} \quad n = 1,2,...$

אם משקל הגרעין לא ∞, נחליף את m בכל מקום ב"מסה מצומצמת"-
נובע ממערכת מרכז מסה: $\mu = m_e\cdot\frac{M_{nucl}}{M_{nucl}+m_e} = m_e\cdot\frac{1}{1+\frac{m_e}{M_{nucl}}}$

פתרונות תרגילים:

1. עבור חלקיק הנע במעגל סביב מרכז כוח $F = -kr$: $R_n = \left(\frac{n^2\hbar^2}{mk}\right)^{1/4}$
2. אותו מקרה, רמות האנרגיה הן: $E_n = \frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = kr^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}n\hbar = \omega n\hbar$
3. עבור חלקיק הנע בשד"מ קבוע B הניצב לכיוון תנועתו: $E_n = \frac{qBn\hbar}{2m}$
4. כמו 1, תדירות הפוטון הנפלט $n+1\to n$: $\Delta E = \omega\hbar = h\nu \Rightarrow \nu = \omega/2\pi$

חוק מוזלי $\Delta E = E_i - E_f = E_0\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)(Z-b)^2$

עבור ירידה לקליפה K $(n_f = 1)$ יש להציב $b = 1 \leftarrow n_i = 2,3,4,...$

בירידה לקליפה L $(n_f = 2)$ יש להציב $b = 7.4 \leftarrow n_i = 3,4,5,...$.

X_Y - מעבר של אלקי לקליפה X מ-$|Y|$ רמות מעל.

$Y \in \{\alpha,\beta,\gamma,...\} = \{1,2,3,...\}$. למשל $n_i = 4; n_f = 1 \Leftrightarrow K_\gamma$

b נמצא בניסויים ושונה בין רמות בגלל סיכוך האלקי בכל רמת אנרגיה.

הערה:

1. יינון של אלקי משמעותו הוצאת האלק מהאטום ($n_f = \infty$)
2. $\lambda_{\max} \Leftrightarrow \Delta E_{\min}$ כתוצאה מקריסה שלאחר יינון יתקבל: $n_i = n_f + 1$

עקרון אי-הוודאות של הייזנברג – מיקום ואנרגיה אינם חד משמעיים.

דיוק המיקום מסדר גודל אורך הגל: $\Delta x \approx \lambda$ כי מוסרים אנרגיה במדידה כמו כן $\Delta p \approx \frac{h}{\lambda}$ ולכן: $\Delta x\cdot\Delta p \approx h$ לאחר חישוב ומיצוע נקבל:

$$\Delta x\cdot\Delta p \ge \frac{\hbar}{2}, \quad \Delta E\cdot\Delta t \ge \frac{\hbar}{2} \quad \Delta x\cdot\Delta\lambda \ge \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

סטיית תקן: $\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} \quad ; \quad \langle A\rangle = 0 \Rightarrow \langle A^2\rangle = (\Delta A)^2$

אנרגיה ממוצעת של גוף (m) הקשור לקפיץ: $\langle E\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle + \frac{k}{2}\langle x^2\rangle$

$$\langle p\rangle = \langle x\rangle = 0 \to \langle E\rangle \ge \frac{\hbar}{8m(\Delta x)^2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2} \xrightarrow[\Delta x]{<E>} \langle E\rangle_{\min} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\hbar\omega}{2} > 0$$

אנרגיה ורדיוס באטום המימן (מודל פלנטארי): $\langle E\rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle - \frac{ke^2}{<|R|>}$

$$\langle\vec{R}\rangle = \langle p\rangle = 0 \to \langle E\rangle \ge \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 - \frac{ke^2}{\Delta R} \xrightarrow[\Delta R]{<E>} \langle E\rangle_{\min} \equiv E_0; \Delta R = \frac{\hbar}{kme^2} \equiv R_0$$

דיוק מיקום: $p = \sqrt{2mE} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta E} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \quad ; \quad \Delta x \ge \frac{\hbar}{2\Delta p} = \frac{\hbar c}{2\Delta E}\sqrt{\frac{2E}{mc^2}}$

שרדינגר ותורת הקוונטים

פונקצית הגל – תיאור הסתברותי של חלקיק (יתכן קומפלקסי / שלילי):

יש לדרוש: $\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi|^2 dv = 1 \Rightarrow \Psi_\infty = 0$ וכן ... $\Psi, \frac{d\Psi}{dx}$ רציפות ו- 1:1

צפיפות ההסתברות: $P(x) = |\Psi|^2 d^{\dim}x \quad \dim\in\{1,2,3\}$

הערה: סיכוי למצוא את החלקיק במיקום מסויים ניתן לחשב ע"י:

$P_{prob}(x) = \frac{d}{dx}|\Psi|^2 d^{\dim}x\Big|_{x_0}^{x_0+\Delta x}$ (לא תמיד נכון - שימוש באחריותכם)

אופרטורים $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{\Omega}\Psi = \Omega\cdot\Psi$

בסימטריה כדורית: $\hat{p}_r^2 = -\frac{\hbar}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$

אופרטור ת"ז כולל: $\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] = \left(\hat{L}_z\right)^2$

חישוב תוחלת על ψ - פ' גל **מנורמלת**!: $\langle A\rangle = \iiint_V \psi\psi^*\cdot A\cdot dV$

הערה: עבור סימטריה כדורית מתקיים $\langle A\rangle = \int_0^\infty |\psi|^2\cdot A\cdot 4\pi r^2 dr$

משוואת שרדינגר $1D$ לא תלויה בזמן: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\psi = E\psi$

פתרון כללי של המשוואה האחרונה: $\psi = A\sin(kx)+B\cos(kx)$

משי' 3D: $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)+V(x,y,z)\right]\psi = \left(E_x+E_y+E_z\right)\psi$

בקאורד' כדוריות: $\Psi_{n,l,m_l} = R_{n,l}(r)\cdot\Phi_{m_l}(\varphi)\cdot\Theta_{l,m_l}(\theta)$, $V(r) = -K\frac{e^2}{r}$

R - $\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}+V(r)\right]R(r) = E\cdot R(r)$

Θ - $\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(l(l+1)-\frac{m_l^2}{\sin\theta}\right)\Theta = 0$

Φ - $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+m_l^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = Ae^{im_l\varphi}$

את המשי' הרדיאלית ניתן לרשום כמשי' $1D$ עבור פ' הגל $u(r)$

תחת פוטנציאל אפקטיבי $V_{eff}(r) = V(r)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$

ע"י הצבה $R(r) = u(r)/r$: $\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}+V_{eff}(r)\right]u(r) = E\cdot u(r)$

מספרים קוונטיים:

מס' קוונטי כללי: $n = 1,2,3,...$

מס' קוונטי אורביטלי (תנע זוויתי) $l = 0,1,2,...,n-1$

מס' קוונטי מגנטי (היטל הת"ז של שד"מ חיצוני): $m_l = 0,\pm1,\pm2,...,\pm l$

מס' קוונטי היטל הספין על ציר $\hat{z}$ (של פרמיונים): $m_s = \pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},...$

תנע זוויתי $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$, בציר z ($2l+1$ מצבים): $L_z = m_l\hbar$

עקרון האיסור של פאולי:

"שני חלקיקים לא יכולים להיות באותו מצב קוונטי". בניסוח אחר:

פונק הגל צריכה להיות אנטי-סימטרית תחת החלפה $\Psi_{(r_1,r_2)} = -\Psi_{(r_2,r_1)}$

הערה: העיקרון חל על כל החלקיקים בעלי ספין חצי שלם בלבד (אלק', פרוטון, ניטרון ועוד. חלקיקים אלה נקראים "פרמיונים").

הערה: חלקיקים בעלי ספין שלם (לא נשמעים לעיקרון זה) נקראים "בוזונים" והם כולם יכולים להיכנס לאותה רמת אנרגיה.

מס' אלק' מקסימאלי ברמה n : $\sum_{l=0}^{n-1}\left[2\left(2l+1\right)\right] = 2n^2$

דוגמאות לפונק' גל שונות (עפ"י מס' קוונטיים שונים): r_0 - רדיוס בוהר.

$$\psi_{2,1,\pm1} = \left[\frac{1}{2\sqrt{6}\left(r_0\right)^{3/2}}\cdot\frac{r}{r_0}\cdot e^{-\frac{r}{2r_0}}\right]\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta)\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\varphi}\right]$$

רמת היסוד: $\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}}e^{-r/r_0}$

רמות נוספות: $\psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0^3}}\left(2-\frac{r}{r_0}\right)e^{-r/2r_0}$

$$\psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\frac{1}{r_0}r\cdot e^{-r/2r_0}\cos(\theta)$$

$$\psi_{2,1,\pm1} = \frac{1}{8\sqrt{2\pi r_0^5}}r\cdot e^{-r/2r_0}\sin(\theta)e^{\pm i\varphi}$$

מדרגת פוטנציאל סופי V_0 :

ψ_I לפני המדרגה $\psi_I = Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar}$

ψ_{II} בתוך המדרגה $\psi_{II} = Ce^{ik_2x} + \cancel{De^{-ik_2x}}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

$\psi_{II} = Ce^{ii\tilde{k}_2x} = Ce^{-\tilde{k}_2x} \Leftarrow \tilde{k}_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar} \Leftarrow V_0>E$

- אין רכיב $De^{\beta x}$ כי הגל ממשיך ללא הפרעה.
- מרציפות הפונק' נקבל $A+B=C$.
- ומרציפות הפונק' הנגזרות: $\frac{B}{A} = \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}>0,\quad \frac{C}{A} = \frac{2k_1}{k_1+k_2}<1$
- נירמול המקדם: $A = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi\Psi^* dx$

מקדם החזרה $R = \left(\frac{B}{A}\right)^2\frac{k_1}{k_1} = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right)^2>0$

מקדם מעבר $T = \left(\frac{C}{A}\right)^2\frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1k_2}{\left(k_1+k_2\right)^2}<1$, $T+R=1$

מחסום פוטנציאל סופי - אפקט המנהרה (tunneling)

חלקיק בעל אנרגיה E פוגש מחסום V_0 ברוחב Δx

ψ_I לפני המדרגה $\psi_I = Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p_1}{\hbar}$

ψ_{II} בתוך המדרגה $\psi_{II} = De^{k_2x}+Fe^{-k_2x}$, $k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$

ψ_{III} אחרי המדרגה $\psi_{III} = Ce^{ik_3x}$, $k_3 = k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

סיכוי המעבר (מקדם מעבר) $T = \frac{|C|^2\cancel{k_3}}{|A|^2\cancel{k_1}} \cong e^{-2\int_{x_1}^{x_2}k_2dx}$, $R = 1-T$

כאשר k_2 לא תלוי ב-x $T \cong e^{-2k_2\Delta x}$

פתרון תרגיל "לכידה":

עבור חלקיק בעל מסה m ואנרגיה $E<V_0$ הפוגע במחסום פוטנציאל:

$$V(x) = \left\{\infty\middle|x<0,\ \ 0\middle|0<x<a,\ \ V_0\middle|a<x<a+b,\ \ 0\middle|x>a+b\right\}$$

הביטוי המקורב לסיכוי החלקיק להילכד בבור פוטנציאל $0<x<a$:

$\psi_{3(a+b)} = \psi_{4(a+b)} = Ce^{k_3(a+b)}+De^{-k_3(a+b)}$, $\psi_{2(a)} = \psi_{3(a)} = Ce^{k_3a}$

הסתברות לכידה (החלקיק לא מוחזר מתחום 3): $D\equiv0$

$$P = \left|\frac{\psi_{(a)}}{\psi_{(a+b)}}\right|^2 = \frac{|C|^2e^{2k_2a}}{|C|^2e^{2k_2(a+b)}} = e^{-2k_2b} = e^{-2b\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}}$$

הערה כללית לכל הבורות : $l,\ m_l$ **לא קיימים בבורות כי אין תנע זויתי !**

בור פוטנציאל חד-מימדי

פתרון כללי למשוואה: $\psi(x)=A\sin(kx)\ ,\ \ k=\frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$

אחרי דרישות רציפות ועבור בור $0<x<L$: $(V_0=0)$ $\psi(x)=A\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)$

אחרי נרמול $(V_0=0)$ $\psi(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right),\quad n=1,2,3,...$

אנרגיה (תחתית הבור היא V_0): $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2n^2}{2mL^2}+V_0=\frac{h^2n^2}{8mL^2}+V_0\quad ,n\neq 0.$

כאשר מרכז הבור ב $x=0$

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)\cdot(-1)^l & n=2l+1\\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}\cdot x\right)\cdot(-1)^l & n=2l\end{cases}$$

הערה: $\left\langle x^2\right\rangle=\int_0^L|\psi|^2\,Adx=\frac{2}{L}\int_0^L\sin^2(\frac{n\pi}{L}x)x^2dx=L^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\pi^2n^2}\right)$

בור פוטנציאל דו-מימדי

$\psi(x,y)=\psi_1(x)\cdot\psi_2(y)$

פוטנציאל $V(x,y)=\{0|0\le x\le a,0\le y\le b\}\ \ or\ \{\infty|else\}$

אנרגיה $E_{n_x,n_y}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}\right),\quad n_x,n_y=1,2,3,...$

עבור בור פוטנציאל $L\times L$ רמות האנרגיה הן : $E_{n_1,n_2}=E_0({n_1}^2+{n_2}^2)$

רמת יסוד (ללא ניוון) $n_x=n_y=1$.

בור פוטנציאל תלת-מימדי

$\psi(x,y,z)=\psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z)$

פוטנציאל $V(x,y,z)=\{0|0\le x\le a,0\le y\le b,0\le z\le c\}\ \ or\ \{\infty|else\}$

אנרגיה $E_{n_x,n_y,n_z}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_x^2}{a^2}+\frac{n_y^2}{b^2}+\frac{n_z^2}{c^2}\right),\quad n_x,n_y,n_z=1,2,3,...$

רמת יסוד (ללא ניוון) $n_x=n_y=n_z=1$.

אוסצילטור הרמוני חד-מימדי

פוטנציאל, כוח ותדירות $V(x)=\frac{1}{2}kx^2,\quad F(x)=-kx,\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

צורת הפתרון הכללית של משוואת שרדינגר : $\psi(x)=C\cdot e^{-\alpha x^2}\cdot H_n(x)$

C - קבוע נירמול, $H_n(x)$ - פולינום הרמיט מסדר n :

$H_0(x)=1\ ;\ H_1(x)=2x\ ;\ H_2(x)=-2+4x^2\ ;\ H_3(x)=-12x+8x^3$

$H_4(x)=12-48x^2+16x^4\ ;\ H_5(x)=120x-160x^3+32x^5$

הערות: לחלקיק "מותר" להיות בכל מקום (גם מחוץ לבור).
במצב יסוד הסיכוי למצוא את החלקיק בראשית מקסימאלי.

אנרגיה (אנרגית אפס מותרת!) $E_n=(n+\frac{1}{2})\omega\hbar=(n+\frac{1}{2})h\nu,\quad n=0,1,2,...$

פליטת פוטון $h\nu_{if}=E_i-E_f=(n_i-n_f)\hbar\omega$

אוסצילטור הרמוני תלת-מימדי

$\psi(x,y,z)=\psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z)$

פוטנציאל $V(x,y,z)=\frac{1}{2}kr^2=\frac{1}{2}k\left(x^2+y^2+z^2\right)$

לכל ציר $E_{n_x}=(n_x+\frac{1}{2})\omega\hbar,\ \ E_{n_y}=(n_y+\frac{1}{2})\omega\hbar,\ \ E_{n_z}=(n_z+\frac{1}{2})\omega\hbar$

אנרגיה $E_T=E_1+E_2+E_3=(n_x+n_y+n_z+\frac{3}{2})\omega\hbar\ ,\ \ n_x,n_y,n_z=0,1,2,...$

כאשר $n=n_x+n_y+n_z$ נקבל $E_T=(n+\frac{3}{2})\omega\hbar\ \ ,\ \ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$

רמת יסוד (חסרת ניוון) $E_0=\frac{3}{2}\omega\hbar\ \ ,\quad n_x=n_y=n_z=0$

עבור כל רמה אחרת קיים ניוון מגודל $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

אנרגיה של אטום בשדה מגנטי :

אפקט זימן הנורמלי – פיצול קווים ספקטראליים תחת שד"מ.

אנרגיה של חלקיק בתוך שד"מ: $E_{Tot}=E_n+\mu_B\cdot B\left(m_l+2m_s\right)$

$\mu_B=\frac{e\hbar}{2m_e}=9.276\cdot10^{-24}\left[\frac{Joul}{Tesla}\right]=5.798\cdot10^{-9}\left[\frac{ev}{gauss}\right]=5.79\cdot10^{-5}\left[\frac{ev}{Tesla}\right]$

תוספת לאנרגיה בעת מעבר בין רמות $\Delta E=\pm\mu_B\cdot B$

חשוב – למספר הקוונטי l אין משמעות בשיקולי אנרגיות אלא רק למסי' n,m_l,m_s .

קווי בליעה – אם קיים שד"מ אז **חייב** להתקיים $|\Delta m_l|\le 1$ ו, $\Delta l=\pm1$ כאשר מתבצע מעבר בין רמות אנרגיה.
קווי הבליעה מאופיינים ע"י (n,m_l,m_s) בלבד, ללא l .

פיצול הקווים הספקטרליים : $\Delta\nu=\frac{\mu_B\cdot B}{h}$: $\nu_0-\Delta\nu,\ \nu_0,\ \nu_0+\Delta\nu$

פיצול אלומה : אלומה אשר עוברת בשדה מגנטי תתפצל למספר אלומות כפונקציה של המסי' הקוונטיים, כי: $E_B=-\vec{\mu}\vec{B}=-\mu_zB_z$

$F=-\nabla E_B=\mu_{z(m_l,m_s)}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial z}$

$\left\langle\mu_z\right\rangle=-\mu_B(m_l+2m_s)=-\frac{e\hbar}{2m}(m_l+2m_s)$

הקליפות המלאות לא משפיעות כי כ"א מהערכים מתבטל ע"י האחר.
בחישוב של כל הקומבינציות האפשריות ל- $\left\langle\mu_z\right\rangle$: $N_{beams}=2l+3$

הערה חשובה : התוצאה האחרונה הינה ניסיונית שלי ומסתמכת על קיום 2 ערכים בלבד לספין $\pm1/2$ (לא בטוח!) ... בקיצור לחשב !!!

רוחב קווי האנרגיה באטום :

1. רוחב קו האנרגיה עבור $\Delta l=1\ \ ,\ \ \Delta m_l=0$ (מעיקרון אי הוודאות)

τ - זמן החיים של הרמה המעוררת (לפני שהיא קורסת חזרה): $\Delta E\approx\frac{\hbar}{2\tau}$

2. רוחב קו האנרגיה עבור $\Delta l=0\ \ ,\ \ \Delta m_l=1$: $\Delta E=\mu_BB$

תרגיל: אטום מימן במצב קוונטי $l=1$ משחרר פוטון באורך גל λ, כאשר הוא יורד למצב קוונטי $l=0$. אם נשים את האטום בשדה מגנטי B , אז התזוזה באורך הגל כתוצאה מהריאקציה של השד"מ והת"ז תהיה :

$\Delta E=E_{l=1}-E_{l=0}=\frac{hc}{\lambda}\ \ ;\ \ \Delta E'=E'_{l=1}-E'_{l=0}=\frac{hc}{\lambda'}\ \ ;\ \ \Delta E'-\Delta E=\mu_BB$

$\Rightarrow\lambda'=hc\left(\frac{hc}{\lambda}-\mu_BB\right)^{-1}\quad\Rightarrow\Delta\lambda=\lambda'-\lambda$

אפקט שטרן-גרלך :

$\theta\cong\frac{\mu_Bl}{2E_k}\frac{\partial B}{\partial z}$ (θ זווית הפיזור, l אורך שד"מ B)

סידור ספקטרו-סקופי למצבים של אטום המימן (n,l מסי' קוונטיים) :

n \ l		s	p	d	f	g
		0	1	2	3	4
K	1	1s	---	---	---	---
L	2	2s	3p	---	---	---
M	3	3s	3p	3d	---	---
N	4	4s	4p	4d	4f	---
	5	5s	5p	5d	5f	5g

קונפיגורציה אלקטרונית : (בנסיון ההרכב נראה אחרת עבור מסי' גדולים)
$-1S^22S^22P^63S^23P^63d^{10}4S^24P^64d^{10}4f^{14}$

ייצוג כללי: $n\,l^{\,e}$ כאשר $n,\ \ l$ - מסי' קוונטיים רגילים המציינים רמות אנרגיה, e - מספר האלקטרונים רמה המיוצגת ע"י $n,\ \ l$ שלידו

פיסיקה גרעינית

רדיוס הגרעין: $r_0 = 1.08\cdot 10^{-13}\,cm\ ,\quad R = r_0 A^{1/3}$

צפיפות הגרעין: $\rho_0 \cong 2.7\cdot 10^{14}_{[gr/cm^3]}\ ,\quad \rho \cong \frac{\rho_0}{1+e^{\frac{r-R}{d}}}$

סימון אטומי: $^A_Z X$ כאשר X - שם היסוד, Z - מס' פרוטונים בגרעין, N - מס' נויטרונים בגרעין, $A=Z+N$ - מס' נוקלאונים בגרעין.

איזוטופים = גרעינים בעלי אותו Z, למשל $^{13}_6C$ ו- $^{14}_6C$ $\Leftarrow$ N משתנה

איזוטונים = גרעינים בעלי אותו N, למשל $^{13}_6C$ ו- $^{14}_7N$ ($14-7=13-6$)

איזוברים = גרעינים בעלי אותו A, למשל $^{14}_6C$ ו- $^{14}_6N$ $\Leftarrow$ Z משתנה

יציבות הגרעין – השיקולים

1. כלל האיסור של פאולי - $N\cong Z$ (עדיפות לשוויון).
2. כוח אלקטרוסטאטי מינימאלי (עדיפות לנויטרונים).

אנרגיית הקשר (Binding Energy):
ככל שאנרגיה זו גדולה יותר, הגרעין מרוכז יותר ומסתו קטנה יותר.

$$\frac{E_{binding}}{c^2} = a_1A - a_2A^{\frac{2}{3}} - a_3Z(Z-1)A^{-\frac{1}{3}} - a_4(N-Z)^2A^{-1} + a_5A^{-\frac{3}{4}}$$

$a_1=15.7_{[Mev]}\ ,\ a_2=17.8_{[Mev]}\ ,\ a_3=0.71_{[Mev]}\ ,\ a_4=23.6_{[Mev]}$

$a_5 = \{34_{[Mev]}\,|\,evev,even;\ -34_{[Mev]}\,|\,odd,odd;\ 0\,|\,else\}$

(זוגי – even, אי זוגי – odd).

איזובר יציב: $Z\cong 2/\left(\frac{4}{A} + \frac{a_3}{a_4}A^{-\frac{1}{3}}\right)(\pm 0.5)$

עבור תשובות הנבדלות ב-1 יש להשתמש בנוסחא המלאה (בגלל הדיוק המוגבל של הקירוב).

מסת גרעין: $M_{Nucleus} = Z\cdot m_p + N\cdot m_n - E_{binding}$

דעיכה וקרינה רדיואקטיבית:

החוקיות מהניסיון: $-dN = N \Rightarrow -\frac{dN}{dt} \equiv \lambda N \Rightarrow \int_{N_0}^{N}\frac{dN}{N} = -\int_0^t \lambda dt$

חוק הדעיכה האקספוננציאלי: $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$

מס' אטומים התחלתי: $N_0 = m_{tot[gram]}\frac{N_a}{Z_{element}}\cdot(radioactive\ part)$

קצב הדעיכה (התפרקויות לזמן): $R(t) = -\frac{dN}{dt} = R_0e^{-\lambda t}\ ,R_0=\lambda N_0$

זמן מחצית חיים: $T_{1/2} = (\ln 2)\tau$

זמן חיים ממוצע: $\tau = \frac{\int N_0te^{-\lambda t}dt}{\int N_0e^{-\lambda t}dt} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

$T_{1/2}\ [year] = T_{1/2}\ 60\cdot 24\cdot 365[\min] = T_{1/2}\ 525600[\min]$

סדרות גרעיניות: שרשרת ההתפרקות היא קבועה לפי אטומי אב:

$T_h^{232}\ ;\ T_p^{237}\ ;\ U^{238}\ ;\ U^{232}$

$Z=4n\ ;Z=4n+1\ ;Z=4n+2;Z=4n+3$

הערה: כל חומר פולט חלקיקי α עד שמגיע לאחת הסדרות הנ"ל.

אנרגיית סף לריאקציה: $x+X\to y+Y+Q$

$$Q=(m_x+M_x-m_y-M_y)c^2 \qquad (E_k)_{\min} = -Q\left(1+\frac{m_x}{M_X}\right)$$

תגובות גרעיניות:

$^A_ZX \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^4_2He$ $\quad \alpha:$ emission of an α particle

$M(\alpha\ particle) = M({}^4_2He) = 4.002603[amu]$

$Q=(M(X)-M(Y)-M(\alpha))c^2$

$^A_ZX \to {}^A_{Z+1}Y + e^- + \bar\nu_e$ $\quad \beta^-:\ n\to p+e^-+\bar\nu_e$

$Q=(M(X)-M(Y))c^2$

$^A_ZX \to {}^A_{Z-1}Y + e^+ + \nu_e$ $\quad \beta^+:\ p\to n+e^++\nu_e$

$Q=(M(X)-M(Y)-2m_e)c^2$

$^A_ZX+e^-\to{}^A_{Z-1}Y+\nu_e$ $\quad$ לכידת אלק': $e^-+p\to n+\nu_e$

$Q=(M(X)-M(Y))c^2$

דעיכה בתוך הגרעין γ: $^A_ZX\to{}^A_ZX+\gamma$

מדידת גיל: $n_{known} = \frac{N(X)}{N(Y)} = \frac{N_{0,X}e^{-\lambda_Xt}}{N_{0,Y}e^{-\lambda_Yt}} \xrightarrow{N_{0,X}=N_{0,Y}} t = \frac{\ln(n_{known})}{\lambda_Y-\lambda_X}$

מבוא למצב מוצק

ספקטרום מולקולה דיאטומית: $\nu = \Delta n\cdot\nu_0 \pm \frac{\hbar}{2\pi\mu R_2} l_>$

כאשר $l_>$ הינו הגדול מבין l_i,l_f ו- $\nu_0=\frac{\omega}{2\pi}$

קבוע מודלונג: $fcc:\alpha=1.7476 \quad bcc:\alpha=1.7627$

אנרגיה אלקטרוסטטית של גביש (אנרגיית קשר): $V_{elc} = -\alpha\frac{Ke^2}{r}$

במצב שיווי משקל: $V=-\alpha\frac{Ke^2}{r}+\frac{A}{r^n}$

אנרגיה פוטנציאלית של אטום בגביש: $V = -\alpha\frac{Ke^2}{r_0}\left[\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\right]$

r_0 הוא מרחק השווי משקל, ועבור $r=r_0$: $V(r_0) = -\alpha\frac{Ke^2}{r_0}\left(1-\frac{1}{n}\right)$

פוטנציאל לנרד-ג'ונס (לקשר ואן דר-ואלס): $V(r)=\frac{A}{r^{12}}-\frac{B}{r^6}$

צפיפות אלקטרוני ערכיות: $\frac{N}{V} = N_A\frac{m}{V}\frac{1}{M}Z_f = N_A\frac{\rho}{M}Z_f$

Z_f - מס' אלקטרונים מוליכים לאטום חומר, V - נפח המוליך.

מרחק בין אטומים bcc: $\rho_Z = \frac{N}{V} = \frac{(L/a)^3}{L^3} = \frac{1}{a^3} \Rightarrow a = (\rho_Z)^{-1/3}$

ρ_Z - צפיפות אטומים ליח' נפח. L - צלע קובייה של יחידת נפח (מדומה).

L/a - מס' האטומים בצלע אחת של הקובייה.

אנרגיית פרמי:

מודל בור חד-מימדי: $\bar{E} = \frac{1}{3}E_F;\ E_F(0^o) = \frac{h^2}{32m_e}\left(\frac{N}{L}\right)^2 = \left(\frac{N}{2}\right)^2E_1$

מודל בור דו-מימדי: $\bar{E}=\frac{1}{2}E_F \quad E_F = \frac{\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{L^2}$

מודל בור תלת-מימדי: $\bar{E} = \frac{3}{5}E_F \quad E_F = \frac{h^2}{8m_e}\left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$

טמפרטורת פרמי (עד אליה המודל פועל טוב): $K_BT_F=E_F$

כדור/רדיוס פרמי: $k_F = \left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{1/3}$

מהירות פרמי: $u_F = \frac{\hbar k_F}{m_e}$ $\quad$ קיבול חום: $c_V = \frac{\pi^2R}{2}\frac{T}{T_F}$

פונק' ההתפלגות של דירק (הסתברותית): $F(E) = \left(e^{\frac{E-E_F}{K_BT}}+1\right)^{-1}$

צפיפות אלק' הולכה: $\rho_e = \int_0^{E_F} g(E)\cdot F(E)\cdot dE$

$F(E)$ - פונק הסתברות להמצאות חלקיק בנקודה – פונק' של דירק.

$g(E)$ - צפיפות רמות האנרגיה ליח' נפח (=הניוון, מס' חלקיקים ברמה).

$$g(E) = \Omega(\dim)\frac{2s+1}{2}\left(\frac{\sqrt{2m}}{h}\right)^{\dim} VE^{\frac{\dim}{2}-1}$$

$\Omega(\dim) = \{1D\mapsto 2,\ 2D\mapsto 2\pi,\ 3D\mapsto 4\pi\}$

אנרגיה כוללת ליחידת נפח: $E_{[E/V]} = \int_0^{E_F}E\cdot g(E)\cdot F(E)\cdot dE$

התקן p-n: זרם חורים לכיוון n וזרם אלק' לכיוון p. בלי פוטנציאל חיצוני הזרם זניח. כאשר פוטנציאל חיובי בצד p ושלילי בצד n (Reverse Bias) אין כמעט זרם עד למתח פריצה. כאשר המצב הפוך (Forward Bias) הזרם מתחזק. ההולכה יורדת עם הטמפ' ולהפך.

הטרנזיסטור - הגברת מתח: $\frac{V_L}{V_S} = \beta\frac{R_L}{R_G+r_b}$

מנורה פולטת אור בעוצמה 100W באורך גל $\lambda = 5*10^{-7}\ m$ הגלאי ששטחו 100cm^2 נמצא במרחק R=2m מהמנורה.

מה ההספק שמקבל אטום אחד בגלאי? רדיוס האטום $r(a)=1\dot{A}$.

$$\frac{E}{\Delta t}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{P}{4\cancel{\Pi}R^2}\cancel{\Pi}r^2=\frac{100\left(10^{-10}\right)}{4*2^2}=6.25*10^{-20}\ \frac{J}{\sec}$$

במשך כמה זמן ירכוש האלקטרון שבאטום אנרגיה של 2ev?

$$E=\Delta W*t=2ev=2*1.6*10^{-19}J\Rightarrow t=\frac{2*1.6*10^{-19}J}{6.25*10^{-20}\frac{J}{\sec}}=5.12_{\sec}$$

מהי האנרגיה של כל פוטון הנפלט ממנורה זו?

$$E=hf=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$$
$$h=6.626*10^{-34}J*\sec=4.136*10^{-15}ev*\sec$$
$$hc(one\quad photon's\quad energy)=1.24*10^{-6}ev*m=1.98*10^{-25}J*m$$
$$E=\frac{hc}{\lambda}=\frac{1.98*10^{-25}J*m}{5*10^{-7}m}=2.48ev$$

כמה פוטונים פוגעים כל שנייה בגלאי?

$$n_\gamma=\frac{p_{indicator}}{E_\gamma}=\frac{\left(\frac{P_{lamp}}{4\Pi}\right)s_{indicator}}{E_\gamma}=\frac{0.02w}{3.96*10^{-17}J}=5.05*10^{14}\ \frac{\gamma}{\sec}$$

אור אולטרא סגול באורך גל $\lambda=3500\dot{A}$ ועוצמה $I=10^{-4}\,W\!\big/cm^{-2}$ פוגע במשטח אשלגן בעל פונקצית עבודה: $\phi=2.2_{eV}$.

מהי האנרגיה הקינטית המקסי' של האלקטרונים הנפלטים מהמתכת?

מנוסחת איינשטיין לאפקט הפוטואלקטרי:

$$E_{k_{\max}}=\frac{hc}{\lambda}-\phi=\frac{1.24*10^{-6}}{3500*10^{-10}}-2.2=1.34_{eV}=2*10^{-19}J$$

70% מהפוטונים הפוגעים מצליחים לשחרר אלקטרונים מהמתכת, כמה אלקטרונים משתחררים בכל שנייה אם למתכת שטח של $1cm^2$?

$$N_\gamma=\frac{I}{E_\gamma}=\frac{I\lambda}{hc}=\frac{10^{-4}*100^2*3500*10^{-10}}{1.98*10^{-25}}=1.77*10^8\,1\big/\left(\sec*m^2\right)$$

מספר האלקטרונים המשתחררים שווה למספר הפוטונים הפוגעים כפול שטח המתכת כיוון שרק 70% מהפוטונים המשתחררים פוגעים במתכת, מתקבל:

$$n_e=0.7n_\gamma s=0.7*1.77*10^{18}*0.01^2=1.24*10^{14}\sec^{-1}$$

נשים לב שלמרות שהפוטונים מעוררים את כל האלקטרונים במתכת רק חלק מהאלקטרונים משתחררים.

טמפרטורת פני השמש היא $T_*=5800K^\circ$ רדיוס השמש: $R_*=7*10^5_{km}$

רדיוס הפלנטה $R_\oplus=6400_{km}$ המרחק בינהם הוא $d=1.5*10^8_{km}$ ושניהם מתנהגים כגוף שחור.

מהו קצב פליטת האנרגיה של השמש?

חוק סטפן בולצמן: $J=\sigma T^4\quad,\quad \sigma=5.67*10^{-8}Wm^{-2}K^{-4}$

כדי למצוא את קצב הפליטה עצמו, יש להכפיל בשטח הגוף השחור:

$P_*=J_*S_*=4\pi R_*^{\,2}\sigma T_*^{\,4}$.

מהו ההספק המגיע לפלנטה מהשמש?

בהנחה שהאנרגיה הנפלטת מהשמש באופן אחיד לכל הכוונים, ההספק המגיע לפלנטה הוא ההספק הנפלט כפול האחוז שמהווה השטח המואר של הפלנטה משטח המעטפת המוארת במרחק d: $P_\oplus=P_*\frac{\pi R_\oplus^{\,2}}{4\pi d^2}$.

מהי הטמפרטורה הממוצעת על הפלנטה אם אין לה מקורות חימום אחרים פרט לשמש כאשר:

א. הפלנטה היא דסקה ב. הפלנטה היא כדור

נשתמש שוב בנוסחת סטפן בולצמן ובתוצאת הסעיף הקודם כדי לקבל את הטמפ' על הפלנטה:

$$P_\oplus=J_\oplus S_\oplus=\sigma T_\oplus^{\,4}S_\oplus$$
$$T_\oplus=\left(\frac{P_\oplus}{\sigma S_\oplus}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$S_\oplus=\alpha\pi R_\oplus^{\,2}\left(\alpha=4\quad for\quad ball,\alpha=1\quad for\quad disc\right)$$

מהו אורך הגל של קרינת השמש שבו נפלטת קרינה בעלת העוצמה המקס

עפ"י חוק ווין, הנכון לכל גוף שחור, $\lambda T=\alpha\Leftrightarrow\alpha=2.898*10^7k\dot{A}$

פוטון באורך גל $\lambda=0.01\dot{A}$ מתפזר מאלקטרון נייח ומוסט בזוית $\theta=60^\circ$

מהי אנרגיית הפוטון הפוגע?

$$E_\gamma=\frac{hc}{\lambda}=\frac{1.24*10^4}{0.01}=1.24*10^6eV=1.24MeV$$

מהי האנרגיה הקינטית שמקבל האלקטרון בהתנגשות?

היא שווה להפרש בין האנרגיות של הפוטון לפני ואחרי ההתנגשות:

$E_K^e=\Delta E_\gamma=\frac{hc}{\lambda}-\frac{hc}{\lambda'}$ בפיזור קומפטון $\lambda_2-\lambda_1=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)=\lambda_c(1-\cos\theta)$

ונקבל מנוסחת קומפטון: $\lambda'=\lambda+\lambda_c(1-\cos\theta)$.

באפקט קומפטון ההפוך, רוכש פוטון בעל אנרגיה נמוכה אנרגיה גבוהה ע"י פיזור מאלקטרון אנרגטי. פוטון בעל אנרגיה של 2eV מתנגש פיזור קומפטון הפוך עם אלקטרון בעל אנרגיה 5.1MeV הנע כלפיו ומתפזר בזווית θ=180 חשב את אנרגיית הפוטון המתפזר:

אורך גל הפוטון הפוגע במערכת המעבדה: $\lambda_f=\frac{hc}{E_\gamma}$ כדי למצוא את המהירות של מערכת המעבדה ביחס למערכת המנוחה של האלקטרון לקבלת אפקט קומפטון רגיל:

$$E_e=\gamma m_ec^2\Rightarrow\gamma=\frac{E_e}{m_ec^2}\quad\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Rightarrow\beta=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}$$

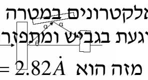
מערכת המנוחה s' נעה יחסית ל s בכוון הפוך לתנועת הפוטון (הסחה לצבע כחול) אורך הגל של הפוטון הפוגע במערכת המנוחה מתקבל מנוסחת דופלר (אפקט דופלר אורכי):

$\lambda_i'=\lambda_i\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ את אורך הגל של הפוטון המפזר במערכת המנוחה של האלקטרון

ניתן לקבל מנוסחת קומפטון: $\lambda_f=\lambda_i'+\lambda_c(1-\cos\theta)$ (באינטראקציה זו אורך הגל לא משתנה, כמעט לא עברה אנרגיה, אבל כיוון הפוטון השתנה), נשתמש בדופלר שוב כדי לקבל את אורך הגל של **הפוטון** במערכת המעבדה, s נעה יחסית ל s' בכוון הפוך לפוטון המתפזר ולכן שוב הסחה לאורך גל כחול:

$\lambda_f=\lambda_f'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ והאנרגיה: $E=\frac{hc}{\lambda}$ (**רואים שלא עברה כמעט אנרגיה אולם הפוטון שיצא כאדום חזר ככחול**)

שפופרת קרני x פולטת קרו באורך גל $\lambda=0.558\dot{A}$ הקרן פוגעת במטרה וחלקה מתפזר פיזור קומפטון מאלקטרונים במטרה בזווית $\theta=46^\circ$ כמתואר בציור. הקרן המתפזרת פוגעת בגביש ומתפזרת פיזור בראג ממישורים שמרחקם זה מזה הוא $d=2.82\dot{A}$. מהי אנרגיית הפוטון הפוגע?



$$E_\gamma=\frac{hc}{\lambda}$$

מה אורך הגל של הקרן המתפזרת מהמטרה בזווית $\theta=46^\circ$? מנוסחת קומפטון $\lambda'=\lambda+\lambda_c(1-\cos\theta)$.

פוטונים המתפזרים פיזור קומפטון מהמטרה בזווית $\theta=46^\circ$ גורמים לפיזור אלקטרונים, מהי זווית פיזור האלקטרונים?

משימור תנע: $\vec{P_\gamma}=\vec{P_{\gamma'}}+\vec{P_e}$ נפרק לרכיבים:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x}:P_\gamma=P_{\gamma'}\cos\theta+P_e\cos\beta\\ \hat{x}:P_\gamma=P_{\gamma'}\sin\theta-P_e\sin\beta\end{array}\right\}\Rightarrow P_e=\frac{P_{\gamma'}\sin\theta}{\sin\beta}$$

מהי הזווית ά המיני' בה יש להניח את הגביש ביחס לקרן X המפוזרת מהמטרה כדי לקבל החזרה?

הזווית הקטנה ביותר עבורה תתקבל החזרה מתקבלת מהסדר הראשון בנוסחת בראג:

$2d\sin\theta=m\lambda,\quad m\in N$ כאשר d הוא המרחק בין המישורים ו θ היא זווית הפגיעה (בבראג היא שווה לזווית ההחזרה!)

קרינת X באורך גל λ מפוזרת פיזור בראג מסדר ראשון מגביש. זווית הפיזור בין הקרן הנכנסת ליוצאת היא θ , המרחק בין המישורים המפזרים הוא d.

אם במקום קרני x מתפזרים ניוטרונים מה צריכה להיות האנרגיה הקינטית שלהם כדי שזווית הפיזור לא תשתנה? **כדי שזווית הפיזור מהניוטרונים תהיה זהה אורך גל דה ברולי שלהם צריך להיות זהה.**

גרעין בעל מספר אטומי Z_1 מסה m_1 ומהירות v עובר פיזור רתרפורד על גרעין בעל מספר אטומי Z_2 נתון $m_2>>m_1$.

מרחק ההתקרבות המינימלי עבור פיזור בזווית θ הוא:

$$D=\frac{kZ_1Z_2e^2}{m_1v^2}\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)$$

בפיזור רתרפורד של גרעיני ליתיום (z=3) מספר החלקיקים הפוגעים במטרה הוא $10^6cm^{-2}s^{-1}$

שטח החתך של האלומה הפוגעת הוא $1cm^2$ נתונים:

$$Z_1=90\quad t_t=10^{-2}cm\quad \rho_t=3.7*10^{22}cm^{-3}\quad E_K^{Li}=7.2Mev$$

כמה חלקיקים יפוזרו בשנייה בזווית 90? (בין 89.5 ך 90.5)

שטח הטבעת ממנה מתפזרים החלקיקים: $S=\pi\left(b_1^{\,2}-b_2^{\,2}\right)$

מספר החלקיקים המפזרים ליחידת שטח שווה לצפיפות החלקיקים במטרה כפול עובי המטרה: $n=\rho t$, מספר החלקיקים הפוגעים ליחידת זמן שווה לשטח חתך האלומה כפול

מספר החלקיקים הפוגעים ליחידת שטח ליחידת זמן: $I=n_{Li}S$ ומספר החלקיקים שפוזרו בשנייה בזווית של 90 הוא $N=snI$.

אם רדיוס הגרעין הוא r_N, מהי האנרגיה הקינטית של גרעיני הליתיום עבורה תופיע סטייה מנוסחת רתרפורד בפיזור בזווית של 90?

התנאי לסטייה מנוסחת רתרפורד הוא: $D\le r_N$ ולכן סטייה תופיע לראשונה כאשר:

$r_N=\frac{kZ_{Li}Ze^2}{2E_{Li}}\left(1+\frac{1}{\sin(\theta/2)}\right)$ ומכאן מחלצים את E_{Li}.

חלקיק בעל מסה m נע במסלול מעגלי סביב מרכז כח F=-kr (כח הרמוני)

מהם הרדיוסים המותרים עפ"י מודל בוהר?

האנרגיה הכללית של החלקיק:

$$E=\frac{mv^2}{2}+V(r)=\frac{mv^2}{2}-\int_0^rF(r)dr=\frac{mv^2}{2}+\frac{Kr^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{m\omega_0^{\,2}r^2}{2}$$

החלקיק

$$\omega_0=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

נע בתנועה מעגלית והכוח הצנטריפטלי הוא הכח ההרמוני:

$\frac{mv^2}{r}=Kr\Rightarrow r^2=\frac{mv^2}{K}$ בוהר קונטט את התנע הזוויתי

$mvr=n\hbar\Rightarrow v=\frac{n\hbar}{mr}$ ובהצבה נקבל: $r^2=\frac{m}{K}\frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2}\Rightarrow r_n=\left(\frac{n^2\hbar^2}{mK}\right)^{1/4}$

מהן רמות האנרגיה עפ"י בוהר?

ממשוואת הכוחות לעיל ובהצבה במשוואות האנרגיה נקבל: $E=Kr^2$ ובהצבת התוצאה לרדיוס:

$$E_n = Kr^2 = K\sqrt{\frac{n^2\hbar^2}{mK}} = n\hbar\sqrt{\frac{K}{m}} = n\hbar\omega_0$$

חלקיק שמטענו כמטען האלקטרון ומסתו פי 207 ממסת האלקטרון נלכד ע״י גרעין אלומיניום Z=13 A=27 לתוך מסלול בעל תנ״ז $L=\hbar$ הניחו כי מסת גרעין האלומיניום היא אינסופית.

<u>רדיוס בוהר ואנרגיית החלקיק במסלולו:</u>

לפי בוהר: $L = n\hbar$ ועל כן לפי נתוני השאלה n=1 כלומר מדובר במצה היסוד:

עבור:

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2} = (for \quad n=1) = 1.97 * 10^{-4}$$

$$E_n = -\frac{mk^2Z^2e^4}{2\hbar^2} = (for \quad n=1) = -4.76 * 10^5 eV$$

$$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 13.6eV$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0.529\dot{A}$$

<u>אם ידוע שהחלקיק היה במנוחה לפני לכידתו מה אורך גל הפוטון הנפלט בעת הלכידה?</u>

$$\Delta E = E_i - E_f = 0 - E_1$$

השינוי באנרגיית החלקיק:

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\Delta E}$$

<u>אם מסת גרעין האלומיניום סופית:</u>

אז האנרגיה הקינטית שלו היא: $E_k^n = \frac{p^2}{2M}$ בהנחה שסה״כ תנע האטום הוא אפס,

אז תנע הגרעין ותנע החלקיק שווים בגודלם ולכן סה״כ האנרגיה הקינטית היא:

$$E_K = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2(m+M)}{2mM} = \frac{p^2}{2\mu} \quad \left(\mu = \frac{mM}{m+M}\right)$$

האנרגיה החשמלית נשארה אותו הדבר ולכן השינוי באנרגיה הכוללת ובכל הנוסחאות הנגזרות ממנה יתבטא בהחלפת מסת החלקיק במסה המצומצמת.

הערה: בשביל לבדוק יחסותי/לא יחסותי: אם: $E_0>E_K$ אז לא יחסותי.

<u>חוק מוסלי:</u>

נתונה שפופרת קרני X בעלת קתודה Z_R.

<u>מהו המתח המינימאלי הדרוש ליינון אלקטרון מהקליפה L?</u>

נוסחת מוסלי לסדרת L:

$f = cR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)(Z-7.4)^2$, אנרגיית יינון- אנרגיה הדרושה לשחרור

האלקטרון מהאטום, כלומר האנרגיה הדרושה כדי להעביר אותו ל n=∞. מהקשר בין האנרגיה לתדירות, ניתן לקבל מנוסחת מוסלי את האנרגיה הדרושה לשחרור האלקטרון:

$$E = hf = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)(Z-7.4)^2 = hc\frac{m_e(ke^2)^2}{4\pi c\hbar^3}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)(Z-7.4)^2 =$$

$$= E_0\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)(Z-7.4)^2$$

נציב n=∞ כדי לקבל את אנרגיית היינון.

בעקבות היינון אורך הגל המקסימאלי שיפלט – בין אנרגיה לאורך גל יש יחס הפוך ולכן אורך הגל המקסימאלי מתאים למעבר בין רמות אנרגיה <u>שההפרש ביניהן מינימאלי</u>.

<u>משוואת שרדינגר 1D:</u>

נתונה פונקציית הגל של חלקיק הנמצא בפוטנציאל בעל סימטריה כדורית:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{A}{\sqrt{r}}e^{\frac{-r}{b}} \quad b = const.$$

<u>מקדם הנרמול:</u>כדי לחשב את מקדם הנרמול A נשתמש בתנאי הנרמול:

$$\int_{n=0,1,2...} \psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r})d^3r = 1 \quad \psi(\pm\infty) \to 0$$ בסימטריה כדורית:

$$d^3r = dV, \quad V = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow dV = 4\pi r^2dr = d^3r$$

$$1 = \int_0^\infty \frac{A^2}{r}e^{\frac{-2r}{b}} * 4\pi r^2dr = -\pi A^2b^2e^{\frac{-2r}{b}}\left(\frac{2r}{b}+1\right)\Bigg|_0^\infty = \pi A^2b^2$$

כלומר: $A = \frac{1}{b\sqrt{\pi}}$.

<u>ההסתברות למצוא את החלקיק ב r>b:</u>

ההסתברות למצוא חלקיק בתחום: $1 \le r \le 2$:

$P(1 \le r \le 2) = \int_1^2 \left|\psi(\vec{r})\right|^2 d^3r$ מהגדרת ההסתברות למציאת החלקיק בתחום r>b

$$P(r>b) = 4\pi A^2\int_b^\infty re^{\frac{-2r}{b}}dr = 3\pi A^2b^2e^{-2} = 3e^{-2}$$

<u>סביב איזה מרחק r קיים הסיכוי הגבוה ביותר למציאת החלקיק:נגזור</u> את האינטגרנד כדי לקבל מקסימום:

$$\frac{dp(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left|\psi(\vec{r})\right|^2 = 4\pi A^2e^{\frac{-2r}{b}}\left(\frac{-2r}{b}+1\right) = 0 \Rightarrow r_{max} = \frac{b}{2}$$

<u>פונקצית גאמא:</u>

$$\int_0^\infty x^ne^{-an}dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

<u>הפעלת אופרטור המקום:</u>

$$<\hat{r}> = \int_0^\infty \psi^* r\psi d^3r = \frac{4\pi}{b^2\pi}\int_0^\infty r^2e^{\frac{-2r}{b}}dr = \frac{4}{b^2}\frac{2!}{\left(\frac{2}{b}\right)^3} = b$$

$$<\hat{r}^2> = \frac{4\pi}{b^2\pi}\int_0^\infty r^3e^{\frac{-2r}{b}}dr = \frac{3b^2}{2}$$

$$\Delta r = \sqrt{<r^2> - <r>} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

נתון בור אינסופי חד מימדי ברוחב L שמרכזו ב L/2 .

<u>ההסתברות למצוא את החלקיק בתחום 0<x<L/4 עבור הרמות n=1,n=2:</u>

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & x>L \quad or \quad x<0 \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & 0<x<L \end{cases}$$

רמות האנרגיה של חלקיק בבור פוטנציאל: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

$$P_n(0<x<L/4) = \int_0^{\frac{l}{4}} \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2\pi n}$$ וזהו שחזור התורה

$$P_{n=1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \quad P_{n=2}\frac{1}{4} \quad P_{n\to\infty} \to \frac{1}{4}$$

הקלאסית כי יש כאן סיכוי שווה להמצא בכל חלק – ברבע מהבור יש סיכוי של רבע להימצא בו.

<u>מרכז הבור נמצא כעת ב x=0 אורכו L נשאר ללא שינוי, איך יראו פונקציות הגל ומה תהיינה רמות האנרגיה?</u> הזזנו את המערכת בקואורדינאטות אך הדבר לא ישנה את המערכת הפיזיקלית:

$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$. נבצע את הזזת קואורדינאטות בלבד בשאר:

$$\psi_n(x') = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}} & (n \quad i\,zugi) \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x'}{L}\right)(-1)^{\frac{n}{2}} & (n \quad zugi) \end{cases}$$

<u>כעת משנים את תחתית הבור מ v לv_0 נתון גם כי רמת היסוד לחלקיק זה היא $E_1=2V_0$ מהו L</u>

נשתמש בשוויונות הבאים:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial x^2\right)\psi = (E' - V_0)\psi$$

$$(E' - V_0) = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \Rightarrow E' = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + V_0$$

$$E_{(n=1)} = 2V_0$$

$$E'_{(n=1)} = 2V_0 = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + V_0 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{\pi^2\hbar^2}{2mV_0}}$$

אם נתונה האנרגיה המינימאלית של החלקיק והאנרגיה שלו במצב מסוים ורוצים לדעת מהו המצב הקוונטי שלו? מציבים פשוט בנוסחה: $E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

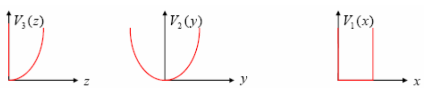
אם נתון שהחלקיק נמצא במצב קוונטי כלשהו, הסיכוי למצוא את החלקיק בקטע כלשהו של הבור, משתמשים בנוסחה:

$$P_n(0<x<L/4) = \int_0^{\frac{l}{4}} \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{4} - \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2\pi n}$$ ומשנים בהתאם את

$$P_{n=1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \quad P_{n=2}\frac{1}{4} \quad P_{n\to\infty} \to \frac{1}{4}$$

הגבולות.

<u>משוואת שרדינגר 3D:</u>



חלקיק בעל מסה m נע בהשפעת הפוטנציאל:

$$V(x,y,z) = V_1(x) + V_2(y) + V_3(z)$$

$$V_2(y) = \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

$$V_3(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2z^2 & z>0 \\ \infty & z<0 \end{cases}$$

<u>מהי פונקצית הגל של חלקיק בפוטנציאל כזה?</u>

הפוטנציאל **אינו תלוי בזמן** ולכן משתמשים במשואת שרדינגר **הבת״ל**:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right) + V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$ נציב

$$\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)$$

במשוואת שרדינגר ונקבל:

$$\underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + V_1\psi_1\right)}_{E_1\psi_1}\psi_2\psi_3 + \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_2}{dy^2} + V_2\psi_2\right)}_{E_2\psi_2}\psi_1\psi_3 + \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_3}{dz^2} + V_3\psi_3\right)}_{E_3\psi_3}\psi_2\psi_1 =$$

$$= (E_1 + E_2 + E_3)\psi_1\psi_2\psi_3$$

אנו מכירים את הפתרונות עבור הפוטנציאלים החד מימדים :

ψ_1 הן פונקציות גל בבור פוטנציאל אינסופי וראינו כבר שהן :

$$\psi_1=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n_1\pi x}{L},E_1=\frac{\hbar^2\pi^2{n_1}^2}{2mL^2}\quad n_1=1,2,3...$$

ψ_2 הן פונקציות גל של אוסילטור הרמוני :

$$\psi_2=C_{n2}e^{-\alpha y^2}H_{n2}\left(y\right),E_2=\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\alpha=\frac{m\omega}{2\hbar},n_2=0,1,2...$$

כש : $H_{n2}\left(y\right)$ הוא פולינום הרמיט מסדר n_2 ו C_{n2} הוא מקדם הנרמול

ψ_3 הן פונקציות גל שפותרות את משואת שרדינגר עבור פוטנציאל הרמוני רגיל אל עליהן להתאפס ב z=0 כדי לקיים את תנאי הרציפות. פולינומי הרמיט אי זוגיים כאלו עם n אי זוגי מתאפסים עבור z=0 ולכן :

$$\psi_3\left(z\right)=\begin{cases}C_ne^{-\alpha z^2}H_n\left(z\right) & z>0\\ 0 & z<0\end{cases}\quad n=1,3,5...$$ ועל כן פונקצית הגל הכוללת היא

$$\underline{\psi\left(x,y,z\right)=\psi_1\left(x\right)\psi_2\left(y\right)\psi_3\left(z\right)}$$ והאנרגיה :

$$E=E_1+E_2+E_3=\frac{\hbar^2\pi^2{n_1}^2}{2mL^2}+\hbar\omega\left(n_2+n_3+1\right)$$

<u>מהן רמות האנרגיה במערכת זו בהינתן רמת היסוד של המערכת?</u> ($E_1=\frac{5}{2}\hbar\omega$)

נתון כי $E_1=\frac{5}{2}\hbar\omega$ ולכן : $n_1=1,n_2=0,n_3=1$ מציבים חזרה לנוסחת האנרגיה שקיבלנו לעיל:

דרגת ניוון	$E\left(\hbar\omega\right)$	n3	n2	n1	רמה
1	2.5	1	0	1	1
1	3.5	1	1	1	2
1	4	1	0	2	3
2	4.5	1	2	1	4
		3	0	1	
1	5	1	1	2	5
2	5.5	3	1	1	6
		1	3	1	

עצם המכילה 1000gr פחמן ($^{12}C+^{14}C$) ו 10^{-4}gr אורניום (^{238}U) , נמדדו ממנה סה"כ 100 התפרקויות רדיואקטיביות לדקה. **<u>מה גיל העצם?</u>**

<u>הנחות :</u> השכיחות ההתחלתית של ^{14}C היא $1.3*10^{-12}$ מכלל אטומי הפחמן, גיל העצם קטן בהרבה מזמן מחצית החיים של ^{238}U. זמן מחצית החיים של ^{238}U הוא $4.5*10^9$yr זמן מחצית החיים של C^{14} הוא 5730yr מסת אטום פחמן היא 12AMU ומסת אטום אורניום היא 238AMU .$1AMU=1.67*10^{-24}$gr

<u>פתרון:</u>

נשתמש בקשרים הבאים :

$$N\left(t\right)=N_0e^{-\lambda t}\quad\left(number\quad of\quad nucleuses\right)\quad R\left(t\right)=\left(radiation\quad ratio\right)=R_0e^{-\lambda t}\quad R_0=\lambda N_0$$

זמן חיים ממוצע : $\tau=\frac{1}{\lambda}$ זמן מחצית החיים : $t_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\tau\ln 2$

מספר התפרקויות לדקה נובע מהתפרקויות האורניום והפחמן :

$$R\left(t\right)=R^U\left(t\right)+R^c\left(t\right)=\underbrace{\lambda^UN^U{}_0}_{R_o^U}e^{-\lambda^Ut}+\underbrace{\lambda^CN^C{}_0}_{R_0^C}e^{-\lambda^Ct}$$ ונתון גם ש :

$R\left(t\right)=100\min^{-1}=100*365*24*60=5.26*10^7\,yr^{-1}$ קצב הדעיכה של האורניום : $\lambda^U=\frac{\ln 2}{t_{1/2}^U}$ וקצב ההתפרקות של האורניום :

$$R\left(t\right)^U=\lambda^UN^U{}_0e^{-\lambda^Ut}=\lambda^UN^U{}_0e^{-\ln 2t/t_{1/2}^U}$$

אנו <u>מניחים</u> שגיל העצם t קטן מזמן מחצית החיים של ^{238}U ולכן :

$$\frac{t}{t_{1/2}^U}\to 0\Rightarrow R^U\left(t\right)=\lambda^UN_0^U$$

הנחה זו אומרת שמספר גרעיני האורניום ההתחלתי לא השתנה :

$$N_0^U=\frac{10^{-4}N_A}{238}=2.53\cdot 10^{17}$$

כאשר מזניחים את כמות גרעיני האורניום ואת כמות גרעיני פחמן 14 אז מספר הגרעינים בעצם הוא למעשה : $N_0^{^{12}C}=\frac{10^3N_A}{12}=5.02*10^{25}$ ומנתוני השכיחות של פחמן 14 נקבל:

$N_0^{^{14}C}=1.3*10^{-12}N_0^{^{12}C}=6.52*10^{13}$ נמצא את קבועי הדעיכה עבור האורניום והפחמן :

$$\lambda^U=\frac{\ln 2}{t_{1/2}^U}=\frac{\ln 2}{4.5*10^9}=1.54*10^{-10}\,yr^{-1},\quad\lambda^C=\frac{\ln 2}{t_{1/2}^C}=\frac{\ln 2}{5730}=1.21*10^{-4}\,yr^{-1}$$

נחזור לביטוי של קצב ההתפרקות :

$$R\left(t\right)=\lambda^UN_0^U+\lambda^CN_0^Ce^{-\lambda^Ct}\Rightarrow e^{-\lambda^Ct}=\frac{R\left(t\right)-\lambda^UN_0^U}{\lambda^CN_0^C}$$ ולכן גיל העצם :

$$t=-\frac{1}{\lambda^C}\ln\left(\frac{R\left(t\right)-\lambda^UN_0^U}{\lambda^CN_0^C}\right)\Rightarrow t=51,996\,yr\approx 5.2*10^4\,yr$$

בהנחה שהשמש מכילה מימן בלבד, והאנרגיה המשתחררת הינה מתהליך : $4\left({}_1^1H\right)\to{}_2^4He+2e+2\nu+\gamma$, אם סה"כ הספק השמש מוערך ב- $3.9*10^{26}W$,

<u>במשך כמה זמן כל המימן ישרף?</u>

<u>נתונים :</u> מסת השמש : $M_{sun}=1.99*10^{30}kg$, מסת אטום מימן : 1.007825amu , מסת אטום הליום : 4.002603amu מסת אלקטרון : 0.000549amu מסת הניוטרינו זניחה ו $1amu=931.5MeV/c^2$

<u>תשובה</u> : אם נדע כמה אנרגיה יש ומה קצב הפליטה נדע בכמה זמן הכל יפלט :

אטום מימן : $1.078825Amu=1.67*10^{-27}Kg$ ולכן :

$$\frac{M_{sun}}{M_H}=\frac{1.99*10^{30}}{1.67*10^{-27}}=1.19*10^{57}atoms$$ הפרש המסה בריאקציה :

$$4\left(M\left({}_1^1H\right)\right)-\left(M\left({}_2^4H\right)\right)-2\left(M\left(e^-\right)\right)=0.027599Amu$$

אנרגיה שמשתחררת בתהליך : $E=mc^2=25.71MeV$ ולכן נבצע את הפעולה הבאה :

$$\frac{1.19*10^{57}atoms}{\underbrace{4}_{every\ 4\ atoms\ creat\ reaction}}*25.71=7.6487*10^{63}ev=\underbrace{1.22310^{45}J}_{total\ energy\ in\ the\ sun}$$

$$\to\frac{E_{sun\ total}}{P_{sun}}=\frac{1.223*10^{45}}{3.9*10^{26}}=3.1379*10^{18}{}_{\sec}=9.95*10^{10}\,years$$