גלים קטנים

רשימות עזר המיועדות לסטודנטים
הלומדים פיס. 2 (התשמ"ט)

חנן שכטר
הפקולטה לפיסיקה

הקדמה:

...נועדתי להכין רשימות אלו מאחר וספרי הלימוד בהם משתמשים להוראת "פיסיקה 2" אינם מספקים את כל הדרוש לנו כדי להסביר היטב גלים אלקטרומגנטיים וכן לספק חומר בגלים שיגשר לתלמידי "פיסיקה 2" להמשיך ב"פיסיקה 3" ולהבין מה קורה שם.

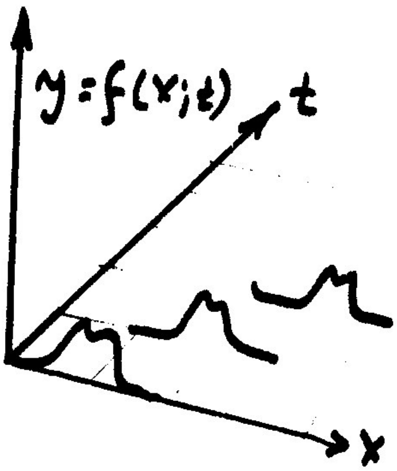
כתבתי בעצם חוברת "גלים" - ואם היא מוצגת בעיקרה לתלמידי "פיסיקה 2א'" ומקבוצות ברמה גבוהה. הסתבר לנו שהנושאים בחוברת זו הם מעל לנדרש למעשה מתלמידי פיסיקה 2.

אנו תקווה שתוכלו להפיק תועלת מרשימות אלו. אשמח לקבל הערות וביקורת.

ח. שטבסר
(פיסיקה)

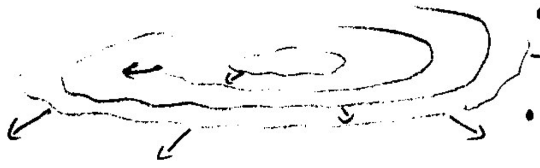
גלים
מה זה ??

1) **גל** הוא הפרעה בתווך, המתפשטת במהירות מסוימת דרך התווך: כלומר, היא פונקציה של המקום והזמן ובעלת צורה מוגדרת ע"י פונקציה.



מהירות הגל קבועה ותלויה בסוג התווך ובתנאיו התרמודינמיים (גלים חומריים) וקבועה בוואקום מוחלט בגל אלקטרומגנטי ובתווך נתון. לדוגמה – מהירות הקול באוויר (בתנאים תרמודינמיים "נורמליים") היא כ-334 מטר בשנייה; במים – פי 5. מהירות הקול במיתר מתוח היא $\sqrt{T/\mu}$ (T = המתיחות, μ – מסה ליחידת אורך). על מהירות התפשטות גלים אלקטרו-מגנטיים נדון בנפרד.

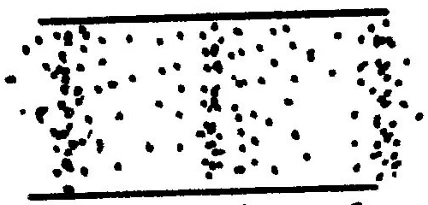
כאשר גל מתפשט, יש הפרעה מקומית בתווך. יש להבין כי התווך אינו "נוסע" (דוגמה: פקק על שלולית, סירה על הים): בציור שאנו רואים גלים מתפשטים – העצם הצף רק "עולה ויורד" כאשר "חולף" הגל מתחתיו...



1) אתם תראו כי יש להבחין בין הפרעה מכנית (כמו גלי קול, לחץ, מיתר) – לבין גלים אלקטרומגנטיים. בראשונים התווך חיוני לקיום ההפרעה. באחרונים – אין תווך כזה. פרוש (במובן המקובל של המילה).

גלים רחביים ואורכיים:

אם ההפרעה ניצבת לכוון ההתפשטות - הגל "רחבי"
ואם מקבילה לכוון ההתפשטות - "אורכי".



גל (לחץ) אורכי

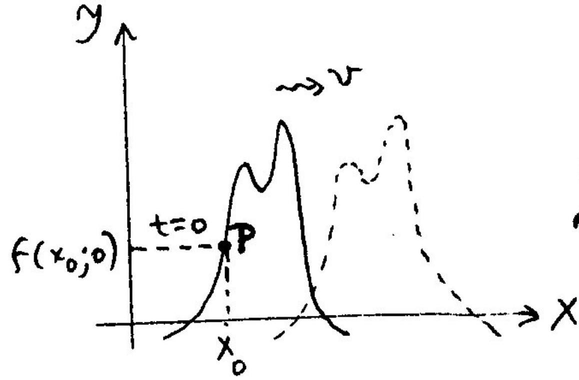
משוואות הגלים:

מתמטיקה [illegible]

הגל מתואר ע"י $y=f(x;t)$ (ר' ציור בעמוד קודם).
ההפרעה נעה בכוון x, במהירות v. "f" היא הפונקציה המתארת את צורת ההפרעה. הקשר הנ"ל אינו מספיק כדי לתאר את הגל. חייב להיות קשר בין x ו- t, בצורה

$$y=f(x\mp vt)$$

כאשר $x-vt$ מתאר גל המתקדם בכוון x חיובי, $x+vt$ יהיה אז גל המתפשט בכוון x שלילי.
למה ??



נסתכל על הפרעה אשר בזמן $t=0$ היא נמצאת במקום בו היא נמצאת. נשים את הווצב על נקודה P שם יש לפונקציה ערך $f(x_0;0)=f(x_0)$ בנקודה x_0.

אבל אחרי זמן $t>0$ ההפרעה נעה ימינה: הנקודה P תימצא בנקודה $x=x_0+vt$ ושם יהיה ערך הפונקציה y:

$$y(x;t)=f(x;t)=f\left[(x_0+\cancel{vt})-\cancel{vt}\right]=f(x_0)$$

תיארנו את התפשטות הגל ימינה ע"י $f(x-vt)$.
ואם רואים שאם "הלכנו" ימינה עם ההפרעה אזי

לימיני את הנקודה P. סימן שההפרעה התקדמה ימינה וכו'. מכאן שאומנם הקשר $y(x;t)=f(x-vt)$ מתאר הפרעה בעלת צורה "f" המתקדמת בכוון x חיובי. אותם שיקולים – לגבי גל "נסוג". ועתה נחפש משוואה עבור "פונקציית הגל" $y(x;t)=f(x\mp vt)$:

$$y(x;t)=f(\underbrace{x\mp vt}_{u})$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}}_{f'}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{נגזרת פנימית}}$$

נגזרת "חלקית" – רק למשתנה אחד (x)

$$=f'\cdot 1=f'$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\underbrace{\frac{\partial f'}{\partial u}}_{f''}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{1}=f'' \qquad \underline{\text{א}}$$

ועכשיו נגזור פעמיים חלקית לפי t:

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}}_{f'}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{(\mp v)}=f'(\mp v)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\underbrace{\frac{\partial f'}{\partial u}}_{f''}(\mp v)\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{(\mp v)}=f''v^2 \qquad \underline{\text{ב}}$$

מהשוואת א ו-ב רואים כי:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

זו משוואת הגלים החד ממדית. אפשר גם ללכת בכוון הפוך ולהגיד: (וכך תעשו!)

$$\frac{\partial^2 y(x;t)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 y(x;t)}{\partial x^2}$$

אם ישנה משוואה

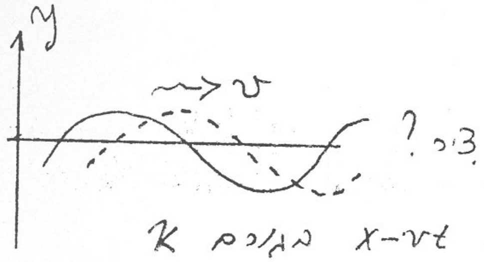
$$y(x;t)=f(x\mp vt)$$

אזי פתרונה הוא גל

המתפשט/נסוג בכוון x ובמהירות v ואשר לו הצורה

המתוורת ד' "ל".

הגלים ההרמוניים: [illegible] ובעיותיים..



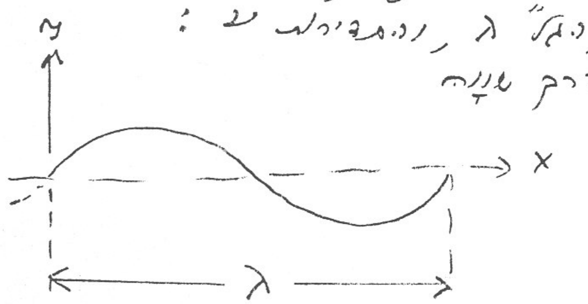
הגודל "x−vt" הוא בעל ממדי אורך: הסינוס/קוסינוס יחבר מבינייהם ויפצים לקרוא צ'ימ..

כדי להתגבר על הקושי מכפילים את x−vt בגורם k שיהיה בעל ממדי אורך$^{-1}$: kx−kvt. לדוגמה –

$$y(x;t) = A\sin(kx \mp kvt).$$

האם יכול הגורם מסוגריים לגדול ולגדול עד אינסוף? אנו יודעים כי הגורם צריך ליצור מחזוריות כי הסינוס וקוסינוס הם מחזוריים. על כן נדבר על הגורם במושגים של רדיאנים ($360^\circ = 2\pi$ רדיאנים). כמו כן נציג את מושגי "אורך הגל" λ, והתדירות ν:

ציטוט מסיכום - צמנסקי: דרך שווה למהירות x זמן!



...אורך הגל λ הוא האורך על ציר x של מחזור אחד...

נניח שהגל שבציור משמאל נוסע ימינה במהירות v. נניח כי הוא עובר בדרכו מרחק השווה לאורך הגל: λ. זאת הוא יעשה בזמן המחזור T. אי לכך,

$$\lambda = vT$$

אבל התדירות ν היא $1/T$, ולכן:

$$\lambda\nu = v$$

הלכו אנשים ומצאו פטנט לא נורמאלי: נגדיר – הם אמרו, את הקבוע k כך: $k \equiv 2\pi/\lambda$.
מצורה זו ממדיו יהיו אורך$^{-1}$, אבל

$$y(x;t) = A\sin(kx \pm kvt) =$$
$$= A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x \pm \frac{2\pi}{\lambda}\lambda\nu t\right) =$$
$$= A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} \pm \omega t\right)$$

$(2\pi\nu = \omega)$

נטפל במרכיב מרכיב ונסביר כי הם תשובים: נסתכל על $2\pi\frac{x}{\lambda}$

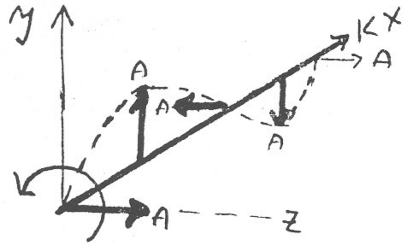
$\underline{x=0}$; אז $\sin 0=0$ (ב $t=0$)

$\underline{x=\lambda}$: אז $\sin 2\pi=0$.

ובכן אנו מרוויחים את המחזוריות ב-X: כל פעם ש-X מגיע ל-λ או כפולתו, הסינוס מתאפס כמו שהוא צריך לעשות!

מה מובן ωt?

זה קצת יותר מסובך: הוא "קובע" בקרבו את מהירות ההתפשטות v!



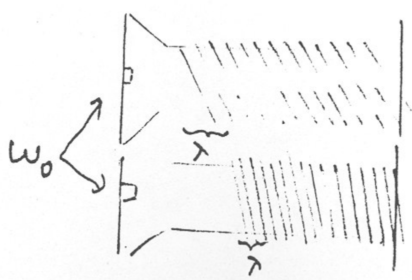
נניח שישלכם בורג ואתם מסמנים על הברגתו סימנים (או - לחילופין - מוט בו תקועים מסמרים כבציור, במרחקים שוים זה מזה כבציור). אם תסובבו את המוט - תראו כי בהשלכה על מישור yx (ציור) יש "גל" המתקדם/נסוג (תלוי במגמת הסיבוב):

אם לא מסובבים - ההשלכה על מישור yx לא נעה.

אם מסובבים - ינוע הגל במהירות היחסית למהירות הזויתית בה מסובבים את המוט סביב ציר X!

"מסובבים סביב X" - זו ה-ωt.

ההעתקה (גל) מתקדמת/נסוגה במהירות $v_x = \vec{v}$ והתלויה בצורת הגל!! ככל ש-λ יותר גדול, מהירות התקדמות הגל לאורך X יותר גבוהה (עבור אותה ω!).



מי ייכנס לקיר יותר מהר?

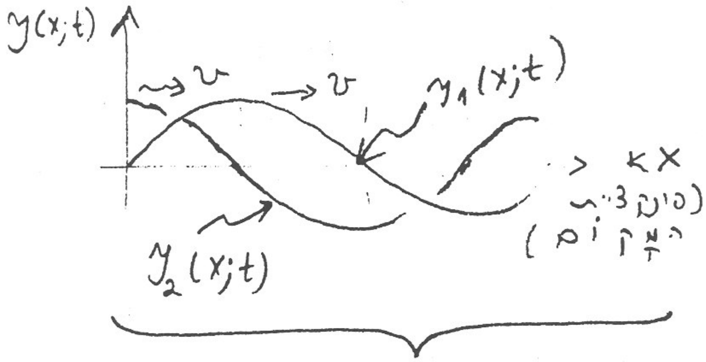
הבורג הוא פטנט תיאורטי המאפשר תיאור של גל מחזורי. על סיבוב הבורג ב-ω מקבלים על ציר X את הגל במהירות v,

$$\omega = vk$$
$$= \frac{2\pi}{\lambda} v$$

ω משנה את "מצב" הבורג. מתאים חפשי מיונית, המצב הוא הפאזה. המהירות הזו נקראת גם "מהירות הפאזה". עבור גל בודד, מהירות ההתקדמות (התפשטות) v מתקבלת מ-ω בצורה שתוארה לעיל.

פאזה? הפרשי פאזה??

- לגודל $\omega t \mp kx$ קוראים פאזה, φ.
- היא מייצגת את מצב הגל בקואורדינטות $x;t$ נתונות.
- אם יש 2 גלים, אפשר לשאול אם יש ביניהם איזה הבדל במקום ובזמן (הם אינם „חופפים"):



שני גלים הנעים באותה
מהירות אבל באותו זמן
אינם נמצאים באותו מקום!

- נוכל לכתוב, לדוגמה, שני גלים בעלי פאזות שונות

$$\varphi_1 = kx \pm \omega t + \phi_1$$
$$\varphi_2 = kx \pm \omega t + \phi_2$$

$$y_1(x;t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi_1)$$
$$y_2(x;t) = A\sin(kx \pm \omega t + \phi_2).$$

אם לדוגמה $\phi_1 = 0$ ו- $\phi_2 = 90^\circ$ אזי

$$y_1 = A\sin(kx \pm \omega t)$$
$$y_2 = A\cos(kx \pm \omega t)$$

(ציור לעיל): הפרש הפאזה במקרה זה יהיה

$$\Delta\varphi = 90^\circ \ (= \pi/2).$$

ישוב נחזור אלי:

מהירות הפאזה

נסתכל על גל המתקדם בכוון $\hat{x}+$. פאזתו תהיה

$$\varphi = kx - \omega t$$

נניח כי יש לגל תדירות קבועה ואורך גל (ולכן: $k = 2\pi/\lambda$) קבוע. אז אם פאזת הגל, φ היא קבועה במקום ובזמן מסויימים, אז -

$$d\varphi = 0$$

$$\therefore \; k\,dx - \omega\,dt = 0$$

$$\therefore \; dx/dt = \frac{\omega}{k} = v$$

זו המהירות בה מתקדמת הפאזה לאורך ציר x. הסבר v ניתן בפרקים הקודמים.

חיבור גלים:

נראה קודם את המקרים הפשוטים: נניח כי אנחנו משלחים אל התווך שני גלים קוהרנטיים: גלים קוהרנטיים הם גלים שאפשר להגדיר מה יחס הפאזות ביניהם ושיחס האחרון אינו משתנה. כמו כן נניח שיש להם אותה אמפליטודה A:

$$y_1 = A\sin(k_1x - \omega_1 t)$$
$$y_2 = A\sin(k_2x - \omega_2 t)$$

אבל - אלה שני גלים בעלי תדירויות $\omega_i = 2\pi\nu_i$ שונות. וכן אורכי-גל $k_{1,2}$ שונים זה מזה. נבחן כמה מקרים פרטיים:

1) $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $k_1 = k_2 = k$

$$\therefore \; y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$
$$y_2 = A\sin(kx - \omega t)$$

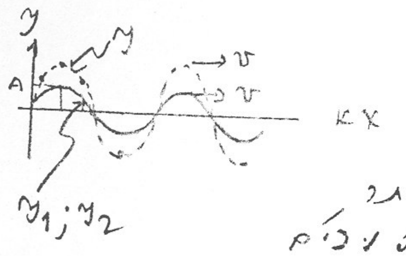
כששולחים שני גלים אלה לתווך (מיתר, לדוגמה) הם "מִתְאַבְּכִים" (מתחברים):

$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2A}_{\text{אמפליטודה}}\underbrace{\sin(kx - \omega t)}_{\text{גל מתקדם בכוון } +\hat{x}}$$

זו "התאבכות בונה" שתוצאתה אמפליטודה <u>כפולה</u> ולגל השקול יש אותה תדירות ואותו אורך גל כמו למרכיבים.

א

תוצאה כזו תקבלו אם תציירו יחד 2 סינוסים ותחברו את y_1 עם y_2 בכל נקודה x. (סופרפוזיציה!).



2. נניח שאנו משלחים בחוט ארוך (מיתר אינסופי) שני גלים שנעים בכוונים הפוכים האחד בכיוון ימני, אבל [illegible] ושלהם אותה תדירות:

למשל - תפסו קשר בקצהו האחד ומטלטלין את קצהו השני. בגלל ההחזרה מהקשר הקרוב תתקבל התאבכות זו [illegible] מהמוגבל). מתמטית —

$$y_1(x;t) = A\sin(\omega t - kx)$$
$$y_2(x;t) = A\sin(\omega t + kx)$$

$$y(x;t) = y_1(x;t) + y_2(x;t) = \left[2A\cos kx\right]\sin\omega t$$

התוצאה מורכבת משני חלקים **נפרדים**: האחד תלוי **רק** בזמן (והוא משתנה בין ±1) והשני – **רק** במקום! והוא - משתנה בין 0 ל- $2A$. כלומר:

בנקודה x נתונה - עבור כל גל בנפרד דרכה במהירות $\omega/k = v$ האחד ימינה והאחר שמאלה.

אבל - ההשפעה ההדדית ביניהם מעלימה את האינדיבידואליות של y_1 ו- y_2 והתוצאה - y שאיננו נע, לא ימינה ולא שמאלה!!

עבור $x=0$ (למשל)

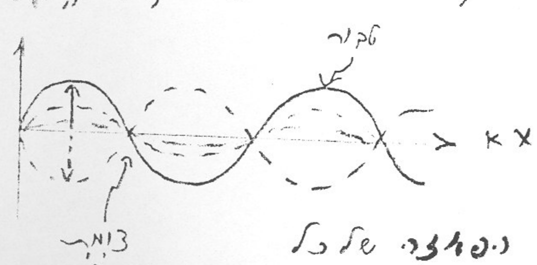
$$y(0;t) = 2A\sin\omega t$$

ובמקום זה החוט מתנדנד עם הזמן בין 0 ל- $2A$.

עבור $kx = \pi/2$ (למשל)

$$y\left(\tfrac{\pi}{2};t\right) = 0$$

וזה "ממשיך מעתה ועד עולם"! כלומר – לאורך החוט יש **צמתות** שם תמיד ההפרעה היא 0, "וטבורים" – שם מתנדנדת ההפרעה בין $\pm2A$. גל כזה קרוי „**גל עומד**"



זכור: מהירות ההפצה של כל מרכיב היא ω/k. אבל לתבורה המשותפת, $y = y_1 + y_2$ **אין מהירות..**

3. נניח יחד שני גלים –
בעלי אותה אמפליטודה A כנ"ל,
בעלי תדירויות $\omega_{1,2}$ השונות במקצת זו מזו –

$$\psi_1(x;t) = A\sin(\omega_1 t - k_1 x)$$
$$\psi_2(x;t) = A\sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t - \frac{k_1-k_2}{2}x\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t - \frac{k_1+k_2}{2}x\right)$$

(השתמשנו בנוסחת חיבור ב-$\sin + \sin$).

$$\Delta\omega \equiv \omega_1 - \omega_2 \quad ; \quad \bar\omega \equiv (\omega_1+\omega_2)/2$$
$$\Delta k \equiv k_1 - k_2 \qquad\quad \bar k \equiv (k_1+k_2)/2$$

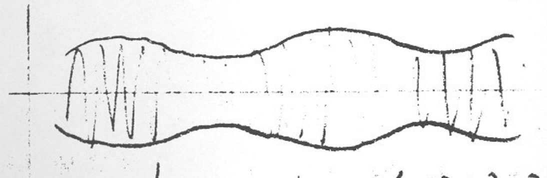
$$\therefore \psi = \left[2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\right]\sin(\bar\omega t - \bar k x)$$

אם $\omega_1 \simeq \omega_2$ אזי $\omega \simeq \bar\omega$ וכן $\bar k \simeq k$.
לכן – $\sin(\bar\omega t - \bar k x)$ מתאר שוב גל הנע ימינה
במהירות $\omega/k \simeq \bar\omega/\bar k = v$, כמו כל מרכיב ($\psi_1$ ו-ψ_2).
אבל – גל זה הוא בעל אמפליטודה מורכבת! גם
האמפליטודה תלויה במקום וכן בזמן – כלומר: המעטפת
השקולה של 2 הגלים נעה במהירות מסויימת,

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

(באותו שיקול כמו שעשינו כשבדקנו את מהירות
הגלים). הגודל זו מהירות החבורה v_G
(group velocity). (במקרה הקודם – הייתה 0).
מהירות זו מתארת את התנועה בפועל של האנרגיה
או החבורה המתקבלת מכל מרכיבי הגלים
הבודדים.

$\to \Delta\omega/\Delta k$



האמפליטודה משתנה בתדירות $\omega_1 - \omega_2$!
אם זו מגיע לאוזן – שומעים זאת (אם זו בתחום השמע)

(אומנם ω_1 ו-ω_2 הן מעבר לתחום השמע! ביקשו את המעבדה להדגים לכם את תופעת הפעימות בעזרת שני קולנים.

עקרון אי הודאות

...היא עקרון הנובע מחיבור מספר גלים לצרור. העקרון מכתיב לנו עד איזו דיוק נוכל לקבוע את הפרמטרים של הגל מתוך התבוננות בצרור. כפי שתלמדו בפיסיקה ב, יש שימוש חשוב ביותר לעקרון זה בפיסיקה והוא מהווה מודל לתאור תצפיות בתופעות טבע.

נתייחס ל"צרור" או "חבורת" שני הגלים המהווים פעימות: כללית, עצמתו של הגל יחסית לריבוע האמפליטודה (ועוד נחזור לזאת). לכן נתבונן באמפליטודה של אותו צרור:

$$(\text{עצמה})\quad I \propto (2A)^2\cos^2\Big(\overbrace{\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x}^{\varphi}\Big)$$

נעמוד ב-t_0 ונסתכל מה קורה עם הגל בזמן x_1 ואח"כ בזמן x_2: (זה כמו לצלם ואח"כ להתבונן בתמונה). אורך אחד מחזוריות הוא 2π (על ציר x שהוא מבוטא ברדיאנים: זוכרים?). לכן

$$\varphi_1 = \frac{\Delta\omega}{2}t_0 - \frac{\Delta k}{2}x_1$$

$$\varphi_2 = \frac{\Delta\omega}{2}t_0 - \frac{\Delta k}{2}x_2$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi = \Delta k\,\Delta x = const. \qquad (\text{א})$$

באותו אופן, אם נתבונן ב-x_0 מסוים ונעקוב מה קורה עם מחזוריה בין הזמנים t_1 ו-t_2, נראה שמחזור שלם ו-Δt חולף ואז על ציר ωt נקבל 2π:

$$\Delta\omega\,\Delta T = const \qquad (\text{ב})$$

והמשמעות:

אם נתון לכם צרור ואתם רוצים לקבוע את פריסת ואת ממה מורכבים הגל, יהיה הדבר "על חשבון" המרכיב השני של הזוג. זכרו בשלב זה את היחסים. בעתיד נדגים.

השימושים.

אבל.. נניח כי יש לנו שני תדרים $\omega_{1/2}$ אז $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$.

זה יוצר סדרת „פולסים" („חבילות").

שאלה: מהו אורכו של כל פולס (חבילה) מבחינה זמנית? (כמה זמן אורך פולס כזה?). שאלה זו נענית מתוך היחס דנן.

$$\Delta\omega\Delta t \sim 1$$

($\Delta\omega = 2\pi\Delta\nu$ לכן המכפלה היא מסדר גודל 1).

$\Delta\nu \sim 1/\Delta t$.

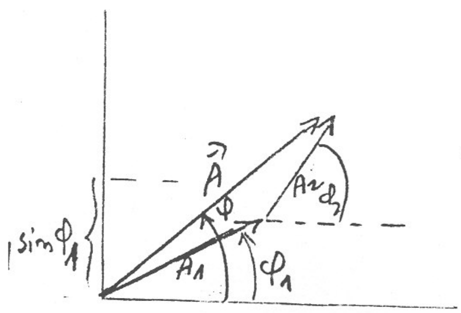
3. על מובן אי הודאות שביחס זה תלמדו בפיסיקה.

<u>חיבור הרבה גלים</u>

$$y_i = A_i \sin(\underbrace{k_i x \pm \omega_i t}_{\varphi_i}) \rightarrow A \sin\varphi_i$$

(הנחה: לכל הגלים אותה אמפליטודה).

תאור גיאומטרי:

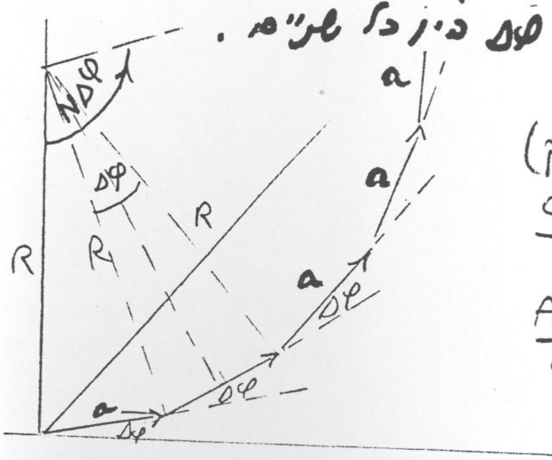


$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

המקרה הפשוט: כל האמפליטודות שוות: a

יש (נניח) 5 גלים.

יש הפרש $\Delta\varphi$ בין כל שניים.



$$N\Delta\varphi = 5\Delta\varphi$$

יתרים מתארים (בערך) מעגל.

$$\frac{a/2}{R} = \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

$$\frac{A/2}{R} = \sin\frac{N\Delta\varphi}{2}$$

$$\therefore \frac{A}{a} = \frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}} \approx \frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

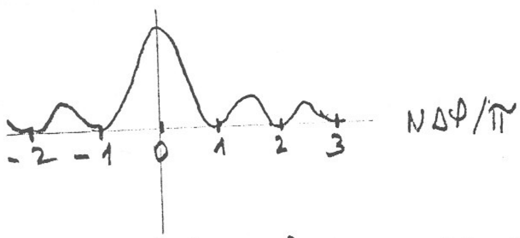
(בזוויות קטנות – $\sin\alpha \cong \alpha$ וכן $N\Delta\varphi >> \Delta\varphi$).

$$I \propto \frac{\sin^2\frac{N\Delta\varphi}{2}}{(\Delta\varphi)^2/4} = \frac{\sin^2\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)}{\frac{1}{N^2}\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right)^2} = N^2\,\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

אם נצייר עתה את העצמה I כפונקציה של α, אזי

עבור $\alpha = 0$ יהיה $I \propto N^2$

כי $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$



עבור $\alpha > 0$, א) האפסים יופיעו כאשר $\alpha = \pm m\pi$

ב) המקסימה יופיעו בערך באמצע. ואז בכל ש-m עולה, α עולה והעצמה יורדת.

שים לב: „רוחב" הקו המרכזי בבסיסו – כפול מרוחב כל הקוים האחרים!

עד פה היה זה חומר הכנה להבנת גלים אלקטרומג-נטיים, התאבכות ועקיפה. להעמקה יוכל המתעניין לפנות לחוברת „גלים" המיועדת לפיס. 2 מ'.

חלק שני: גלים אלקטרו-מגנטיים

כאשר דברנו בהרצאה הספירה על השדה המגנטי B ראינו כי מופיע תמיד μ_0 (μ בחומר מגנטי, μ_0 בריק) ועוד גורמים גיאומטריים ומספריים בעיקרם. לדוגמה, השדה המגנטי של סליל (סולנואיד) אינסופי, $B=\mu_0 n i$ (כאשר n – מס' הכריכות ליחידת אורך, i הזרם בסולנואיד. תמיד ניתן להפריד את התווך μ_0 משאר הגורמים ולכתוב $B=\mu_0 H$ (או $B=\mu H$).

נכתוב יחד את משוואות מקסוול:

(1) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = q/\varepsilon_0$ (חק גאוס)

(2) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$ (השראות)

(3) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$ (רציפות $\vec{B}$)

(4) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i$ (חק אמפר)

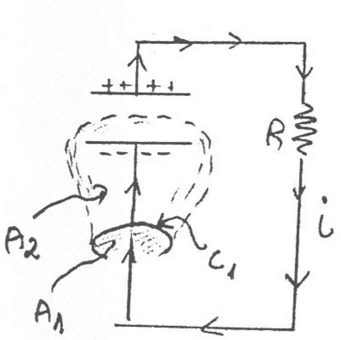
אם $B=\mu H$ וכן $\Phi_B=\mu H A$ (A השטח הרלוונטי לפשט. או-אז:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}(BA) = -\frac{d}{dt}(\mu H A) = -\mu A\frac{dH}{dt}$$

$$\therefore \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\mu A\frac{dH}{dt} \qquad (2)$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = i \qquad (4)$$

האם המשוואות הנ"ל מתארות את המצב בכל תנאי? לא תמיד!
נסתכל על (4): $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = i$ כאשר i הוא הזרם ה"חותך" את השטח המוגדר ע"י מסילת האינטגרציה. נסתכל לדוגמה על קבל מתפרק דרך נגד:



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

מסילה C_1

כש-i "חותך" את המשטח A_1 המוגדר ע"י C_1. אבל...
גם A_2 מוגדר ע"י C_1! אבל דרך A_2 לא עובר כל זרם!

וכו מכאן נובע לחוק אמפר.. אבל פתרו את הבעיה בצורה הבאה:

כשזורם זרם i ($i=I_0e^{-t/RC}$) נפרק המטען מהקבל. כתוצאה מכך יורד השדה בין הטבלות! אפשר להגדיר „זרם" בין לוחות הקבל - אפשר!

א) יהיה שווה בגודלו בכל רגע ורגע ל-i (כך צריך להיות: לא יתכנו שני זרמים שונים באותו מעגל יחיד!)

ב) שיהיה יחסי לקצב שינוי השדה: מותר ל„זרם" זה קשור ב„סילוק" מטענים מלוחות הקבל, קוראים לו **זרם העתקה** $i_D \propto \frac{dE}{dt}$. אבל E קשור בצפיפות הזרם J ו- $i=JA$
לכן: $i_D \propto A\frac{dE}{dt}$. אפשר להראות כי על מנת שתישמר הרציפות (של הזרם) במעגל –

$$i_D = \epsilon A \frac{dE}{dt}$$

ואז:

i - בחוט

i_D - בתוך הקבל!

חוק אמפר יהיה אז:

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = i + i_D$$

ו-A_e יקבל את i_D, A_p את i והכל בא על מקומו בשלום. מה קורה **מחוץ למעגל?** **שם $q=0$ ו- $i=0$** ומשוואות מקסוול תקבלנה את הצורה!

$$(1)\quad \oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = 0$$

משטח סגור

$$(2)\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\mu A\frac{dH}{dt}$$

$$(3)\quad \oint\!\!\oint \vec{B}\cdot d\vec{a} = 0$$

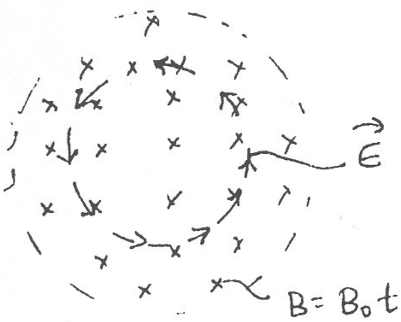
$$(4)\quad \oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = +\epsilon A\frac{dE}{dt}$$

<u>תוצאה מעניינת:</u>

(2) מלמד אותנו כי שינוי השדה המגנטי <u>משרה</u> מעוררת ב שדה אלקטרודינמי $\vec{E}$.

(4) מלמד אותנו כי שינוי השדה <u>החשמלי</u> עם הזמן

משרה שדה מגנטי. כלומר – פרט למקדם אפשר להחליף
את $E \Leftrightarrow H$ (או את ϵE ב- μH) ורק צריך
להחליף את הסימן. (ענין הסימן יובן אם תסתכלו על הדוגמה
בהגליפה – ראשית המציגה שדה מגנטי
ההולך עם הזמן. כתוצאה מכך משרה
שדה חשמלי $\vec{E}$ כבציור (חוק לנץ).
$\vec{E}$ ו- $\vec{B}$ מקיימות מערכת נצבת.
כלומר כי כדי לשמור על הכוונות של
חוק לנץ יש להחליף סימן אם $E \Leftrightarrow B$.



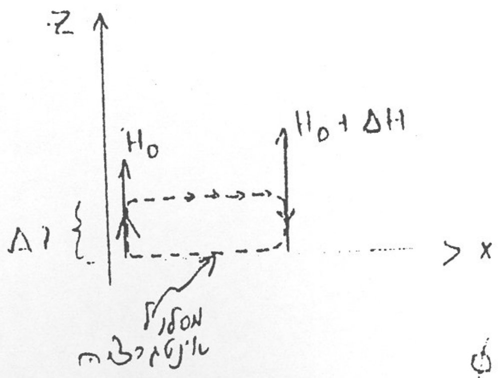
שאלה: **מה משמעות לזוג של שתי המשוואות?**

תשובה: לחשב אותן ונתחיל עם

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \epsilon A \frac{dE}{dt}$$

H היא פונקציה של המקום – ושל הזמן. לכן
הוא משתנה ממקום למקום בזמן מסוים נתון. נניח כי H
הוא בכיוון z. נבדוק איך הוא משתנה בכיוון x:
איך משתנה H בכיוון x?

$$\Delta H = H_0 + \frac{dH}{dx}\Delta x$$



נחשב את $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}$ במלבן הפשוט הבא:
$\vec{H}\cdot d\vec{l}$ בכיוון x הוא אפס
($\vec{H} \perp d\vec{l}$).

בכיוון z: –

$$\oint H\,dz = H_0 \Delta z - \left(H_0 + \frac{dH}{dx}\Delta x\right)\Delta z$$

(הסימן השלילי – כי "הולכים" בכיוון הפוך ל-z).

$$= -\frac{dH}{dx}\Delta x \Delta z$$

אבל $\Delta x \Delta z$ הוא השטח A:

$$= -A\frac{dH}{dx}$$

וזו כל תרומת האינטגרל $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l}$. נציב במשוואה –

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \varepsilon A \frac{dE}{dt}$$

$$\therefore -A\frac{dH}{dx} = \varepsilon A \frac{dE}{dt}$$

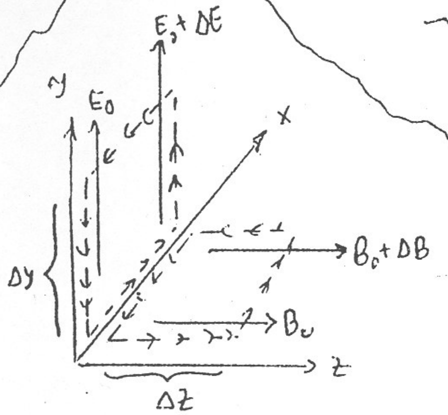
$$\boxed{\frac{dH}{dx} = -\varepsilon \frac{dE}{dt}} \qquad (\mathrm{I})$$

בשיקול דומה (ונזכור את מערכת הכוונים וההבור של $\vec{E}$ ו-$\vec{H}$ [או B] בציור זה), ומאחר ו-$\vec{E}$ וכן $\vec{H}$ קיימים במרחב סימטרית (כי יש שינוי שלהם עם הזמן) נקבל מהמשוואה

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\mu A \frac{dH}{dt}$$

את היחס:

$$\frac{dE}{dt} = -\mu \frac{dH}{dt} \qquad (\mathrm{II})$$



כוון האינטגרציה, המסילה „עוברת" לפי „חוק יד ימין": $B_z \leftarrow y \leftarrow x$
$E_y \leftarrow x \leftarrow z$!
כמו כן:

$$\Delta B = \frac{dB}{dx}\Delta x$$

$$\Delta E = \frac{dE}{dx}\Delta x$$

קיבלנו שתי משוואות דיפרנציאליות מצורפות. מסדר ראשון. כדי להוציא מהן משהו — נגזור (I) לפי x ו-(II) לפי t:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2H}{dx^2} &= -\varepsilon \frac{d^2E}{dx\,dt} \\ \frac{d^2E}{dx\,dt} &= -\mu \frac{d^2H}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d^2H}{dt^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{d^2H}{dx^2}$$

∘∘∘ אבל — כי משוואות גלים עבור איבר גל $H(x,t)$ (או B) המתפשט בכוון X ובמהירות

$$v^2 = 1/\varepsilon\mu$$

או:

$$v_0^2 = 1/\mu_0\varepsilon_0$$

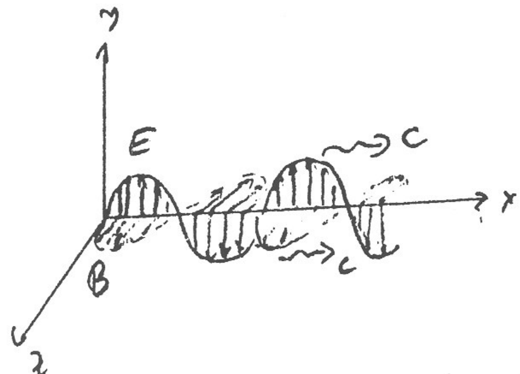
$$= 2.9979\times10^8\ m/s = c!$$

באופן דומה אפשר לקבל

$$\frac{d^2E}{dt^2} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{d^2E}{dx^2}$$

17 -

בצורה זהה אפשר לקבל משוואה עבור $B(x;t)$ ונמצא
שהוא מתפשט יחד עם E במהירות הגל, בכוון x.
לכן: אם E בכוון y-
B " z
מתפשט גל אלקטרומגנטי בכוון x
מהירות ההתפשטות: c !
מותר ל- ε,μ נבדלים מ- μ_0,ε_0 תהווה
נוכחות תווך גורם מסבך, בניגוד להתפשטות הפרעה מכנית!



גל אלקטרומגנטי

מזה ניתן להשתמש בהויגנס – פרנל (עבור אופטיקה
פיסיקלית).