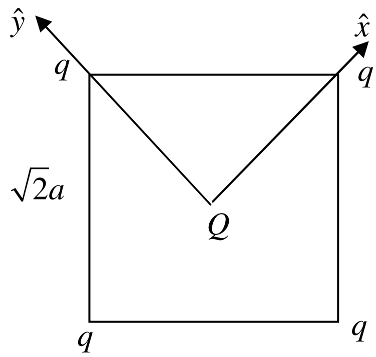
1. ארבעה מטענים q כל אחד, קבועים בפינות הריבוע שצלעו $\sqrt{2}a$. מטען חמישי Q נמצא במרכז. הראו כי הכוח השקול הפועל על Q הינו אפס, בשתי דרכים: תחילה ע"י חישוב מפורש של כוחות ואח"כ ע" חישוב אנרגיה פוטנציאלית של המערכת.



א. $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{qQ}{a^2}\left(\hat{x} - \hat{x} + \hat{y} - \hat{y}\right) = 0$

ב. נזיז את המטען Q לקואורדינאטה $\left(x, y, z\right)$ במקום $\left(0,0,0\right)$.

$u\left(x, y, z\right) = ?$ - אנרגיה פוטנציאלית.

$\vec{F} = -\vec{\nabla} u\left(x, y, z\right)$ (הכוח שווה למינוס הגרדיאנט של האנרגיה הפוטנציאלית)

$$u = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k\neq i}\frac{q_i q_k}{r_{ik}}$$

$$u\left(x, y, z\right) = 4\frac{q^2}{\sqrt{2}a} + 2\frac{q^2}{2a} +$$

$$qQ\left[\frac{1}{\sqrt{\left(y-a\right)^2 + x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(y+a\right)^2 + x^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(x-a\right)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{\left(x+a\right)^2 + y^2 + z^2}}\right]$$

$$F_x = -u_x = -qQ\left[-\frac{1}{2}2x\left(x^2 + \left(y-a\right)^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}2x\left(x^2 + \left(y+a\right)^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$-qQ\left[-\frac{1}{2}\left(x-a\right)\left(\left(x-a\right)^2 y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\left(x+a\right)\left(\left(x+a\right)^2 y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

באופן דומה נחשב את F_y, F_z, נציב את הערכים $\left(x, y, z\right) = \left(0,0,0\right)$ ונקבל שהכוח שווה לאפס.

2. טבעת דקה שרדיוסה R טעונה בצפיפות מטען אורכית אחידה λ.
א. מצאו את השדה החשמלי במרכז הטבעת תחילה משקילו סימטריה ואח"כ ע"י אינטגרציה ישירה.

$$\frac{dQ}{dl}=\lambda$$

מטען נקודתי משרה שדה: $\frac{dQ}{R^2}\hat{r}$.

מטען נקודתי מהצד השני של הטבעת משרה שדה באותו גודל בכיוון ההפוך. לכן סכומם אפס.
מכיוון שלכל נקודה על הטבעת יש נקודה סימטרית מהצד השני, הסכום הכולל מתאפס.

אינטגרציה:
נגדיר פרמטר ϕ.
גבולות: $0\le\phi\le 2\pi$

$$\hat{r}'(\phi)=-\hat{r}(\phi)=-\left(cos(\phi)\hat{x}+sin(\phi)\hat{y}\right)$$

$$\vec{E}=\sum_{dl}\frac{dQ}{R^2}\hat{r}'=\int\frac{dQ}{R^2}\hat{r}'=\int_c\frac{d\lambda}{R^2}\hat{r}'=\int_0^{2\pi}\frac{Rd\phi\lambda}{R^2}\hat{r}'=\int_0^{2\pi}\frac{d\phi\lambda}{R}\left(\hat{x}cos(\phi)+\hat{y}sin(\phi)\right)=0$$

ב. מסירים מהטבעת אלמנט שזוויתו α במרכזו ציר $\hat{x}$. מה השדה החשמלי במרכז הטבעת כעת?
השדה של כל הטבעת שווה לשדה של החלק שחתכנו ועוד השדה של החלק שהשארנו שווה לאפס.

$$\vec{E}'=\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}}\frac{d\phi\lambda}{R}\left(\hat{x}cos(\phi)+\hat{y}sin(\phi)\right)=\frac{\lambda}{R}2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\hat{\alpha}$$

ג. מצאו את השדה שיוצרת הטבעת השלמה על ציר $\hat{z}$ שעובר דרך מרכזה בגבול $z\to\infty$.

$$\vec{E}=E_z\hat{z}$$

$$dE_z=\frac{dQ}{r^2}cos(\theta)$$

$$cos(\theta)=\frac{z}{r}=\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$r^2=R^2+z^2$$

$$dQ=\lambda dl=\lambda Rd\phi$$

$$dE_z=\frac{dQ}{r^2}cos(\theta)=\frac{dQ}{R^2+z^2}\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$E_z=\int_0^{2\pi}dE_z$$

3. חשבו את השטף של המטען הנקודתי q דרך מישור אינסופי הנמצא במרחק d ממנו. השוו לחוק גאוס.

פתרון:

$$\Phi = \int_D \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$r^2 = d^2 + R^2$$

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \hat{E}$$

$$d\vec{s} = RdRd\phi \hat{z}$$

$$\Phi = \int \frac{q}{d^2 + R^2} RdRd\phi \left(\hat{E} \cdot \hat{z} \right)$$

$$\hat{E} \cdot \hat{z} = cos\left(\theta\right) = \frac{d}{r}$$

$$\Phi = \int \frac{q}{d^2 + R^2} RdRd\phi \left(\hat{E} \cdot \hat{z} \right) = 2\pi \int_0^\infty dR \frac{qRd}{\left(d^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi q$$

באמצעות גאוס: אם היו לנו שני משטחים אינסופיים הם היו כאילו גוף סגור, ולכן ע"פ גאוס, השטף הכולל היה $4\pi q$. לכן מטעמי סימטריה, חצי מהשטף יעבור דרך המשטח היחיד שיש לנו בבעיה.

1. נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס a טעונה בצפיפות משטחית אחידה σ_0. מצאו את הפוטנציאל בתוך הכדור תחילה ע"י אינטגרציה ישירה ואח"כ ע"י חישוב העבודה אותה יש להשקיע ע"מ להביאו מ ∞.

$\vec{E} = \vec{\nabla}\varphi$. (השדה שווה לגרדיאנט של הפוטנציאל).
מתוך חוק גאוס מצפים לקבל שדה 0 בתוך הקליפה. לכן הפוטנציאל צריך להיות קבוע.
זאת אומרת שלא משנה מה הנקודה שנבחר – תוצאת החישוב לא תלויה במיקום.

חישוב ישיר: סכימה על התרומות של המטענים על הקליפה:
נבחר נקודה כלשהי p על ציר הסיבוב, ונסתכל מה תורמת כל נקודה שיש בה מטען σ.
l – מרחק מהמרכז אל הנקודה p.
R - המרחק מהקליפה אל הנקודה p.

התרומה של כל מטען dq לפוטנציאל הכולל היא $\frac{dq}{R}$.

נבטא את R: $R = \sqrt{l^2 + a^2 - 2lacos(\theta)}$ (משפט הקוסינוס)

$dq = \sigma_0 ds$ (ds = יחידת שטח)

$ds = a^2 sin\theta d\theta d\phi$

התרומה של יחידת שטח ds טעונה:

$$d\varphi = \frac{\sigma_0 a^2 sin\theta d\phi}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2lacos\theta}}$$

נשאר לסכום על כל התרומות:

$$\varphi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \frac{\sigma_0 a^2 sin\theta}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2l \cdot a \cdot cos\theta}} d\theta = 2\pi\sigma_0 a^2 \int_0^{\pi} \frac{sin\theta d\theta}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2lacos\theta}}$$

נציב: $m = cos\theta$

$dm = -sin\theta d\theta$

$\xi = 2lam$

$$\varphi = 2\pi a^2 \sigma_0 \int_{-1}^{1} \frac{dm}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2lam}} = \frac{\pi a \sigma_0}{L} \int_{-2la}^{2la} \frac{d\xi}{\sqrt{l^2 + a^2 - \xi}} = \frac{\pi a \sigma_0}{L} \left[-2\sqrt{\left(l^2 + a^2 - \xi\right)} \right]_{-2la}^{2la} = 4\pi\sigma_0 a$$

התוצאה כצפוי איננה תלויה ב l, כלומר איננה תלויה במיקום בתוך הכדור.

שיטה שניה: פוטנציאל הוא העבודה הדרושה על מנת להביא את מטען החידה מ ∞ לתוך הנקודה p.

פתרון: השדה מחוץ לכדור הוא: $\vec{E}\left(\vec{r}\right) = \frac{q_{tot}}{r^2}\hat{r}$ (עבור $r > a$)

$q_{tot} = \sigma_0 A = 4\pi a^2 \sigma_0$ (סך כל המטען שווה לשטח פני הכדור $4\pi a^2$ כפול הצפיפות השטחית σ_0)

לכן: $\vec{E} = \frac{4\pi a^2 \sigma_0}{r^2}\hat{r}$ (עבור $r > a$)

$\varphi = w$ (להביא מטען יחידה מ ∞ לנקודה מבוקשת) $= \int_{-\infty}^{l} \vec{E} d\vec{l} = \int_{\infty}^{a} \frac{4\pi a^2 \sigma_0}{r^2} dr = 4\pi a \sigma_0$

(l היא נקודה בתוך הכדור, אולם מכיוון שאין שדה בתוך הכדור, אפשר לעצור על הקליפה, ולא להמשיך פנימה).

2. טיפת נוזל מבודדת כדורית שרדיוסה R טעונה בצפיפות נפחית אחידה ρ.

א. מצאו את האנרגיה האלקטרוסטאטית האצורה במערכת.

פתרון: $U = \frac{1}{8\pi}\left(\left|\vec{E}\right|^2\right)dv$.

נמצא את השדה החשמלי:

השדה בתוך הכדור:

נסתכל על קליפה שרדיוסה r ($r < R$)

לשדה זה רק כיוון $\hat{r}$ בגלל סימטריה כדורית.

חוק גאוס: $\Phi = 4\pi Q\,|_{(0\to r)} = 4\pi\int dV_{(0\to r)}\rho$ שטף דרך קליפה עם רדיוס r

נחשב את השטף מפורשות:

$$\Phi = 4\pi\int sin\theta d\theta d\phi\int_0^r r'^2\,dr'\rho = \rho 4\pi 4\pi\frac{r^3}{3} = \frac{16\pi^2\rho r^3}{3}$$

נקבל את השדה מכאן:

$\Phi = \int_A \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left|E\right|\cdot A = \left|E\right|\cdot 4\pi r^2$ (קליפה מדומה בעלת רדיוס r)

נשווה את השטף ונקבל: $\frac{16\pi^2\rho r^3}{3} = \left|E\right|4\pi r^2$ ולכן $\left|\vec{E}\right| = \frac{4\pi\rho r}{3}$

השדה מחוץ לכדור: ($r > R$)

$$\Phi = \left|E\right|A = \left|E\right|4\pi r^2$$

מצד שני: $\frac{16\pi^2\rho R^3}{3} = 4\pi\rho\int sin\theta d\theta d\phi\int_0^R r^2dr = 4\pi Q_{tot} = \Phi$

לכן השדה מחוץ לכדור הוא: $\left|\vec{E}\right| = \frac{4\pi\rho}{3}\frac{R^3}{r^2}$

אנרגיה אלקטרוסטטית: $U = \left(\frac{1}{8\pi}\right)\int\left|E^2\right|dv$

נפרק את האינטגרל לשני תחומים – בתוך הכדור ומחוץ לכדור:

$$U = \left(\frac{1}{8\pi}\right)\left(\int_0^R\left(\frac{4\pi\rho r}{3}\right)^2 r^2 dr sin\theta d\theta d\phi + \int_R^\infty\left(r^2 dr sin\theta d\theta d\phi\right)\left(\frac{4\pi\rho}{3}\right)^2\frac{R^6}{r^4}\right)$$
$$= \frac{16}{15}\pi^2\rho^2R^5$$

ב. הטיפה מתחלקת ל 2 טיפות כדוריות זהות והן מתרחקות מאוד אחד מהשניה. כיצד תשתנה האנרגיה כתוצאה מתהליך ההתנתקות.

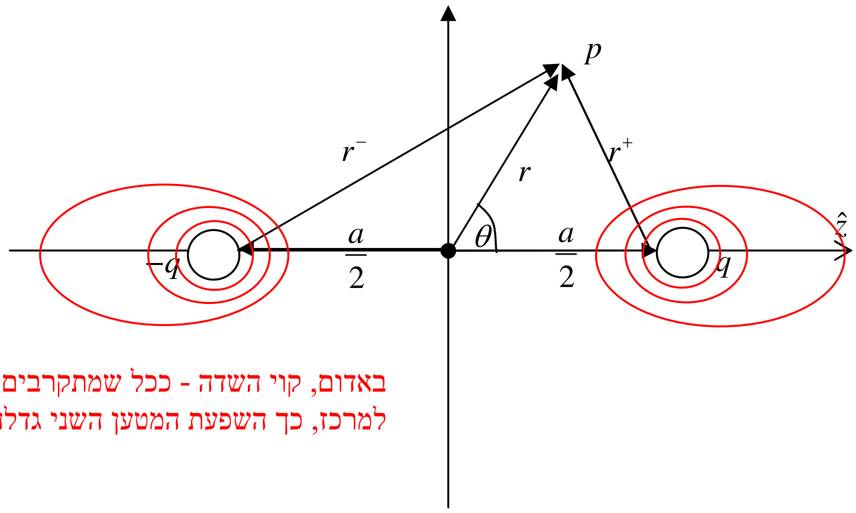
ציפיה אינטואיטיבית: כאשר עושים פעולה הפוכה, צריך להשקיע עבודה כנגד השדה, כלומר להוסיף אנרגיה למערכת. כלומר אנרגיה של קליפה אחידה גדולה יותר מזו של מנותקת.

נסמן ב U' את האנרגיה של כדור בעל רדיוס $\frac{R}{\sqrt[3]{2}}$.

$$V' = \frac{V}{2}$$

$U' = \frac{16\pi^2\rho^2}{15}R'^5 = \frac{8\pi^2\rho^2}{15}\frac{R^5}{\sqrt[3]{4}}$ ולכן $U_{tot} = 2U'$

1. נתונים שני מטענים $+q,-q$ במרחק a אחד מהשני, ומיקומיהם $\left(0,0,-\frac{a}{2}\right),\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$ בהתאמה.



א. כתבו את הפוטנציאל בכל המרחק, ציירו איכותית משטחים שווי פוטנציאל.

$$\varphi=\frac{q}{r^+}-\frac{q}{r^-}=q\left(\frac{1}{r^+}-\frac{1}{r^-}\right)$$

הפוטנציאל מתאפס לא רק באינסוף, אלא גם במישור הנמצא במרחק שווה מהמטענים.

ב. מהו הפוטנציאל בנקודה המרוחקת מהראשית מרחק r, כך ש $r>>a$? פתחו את הפוטנציאל לטור בפרמטר הקטן.

המרחק הטבעי בבעיה הוא a - המרחק בין שני המטענים. לכן זהו המרחק היחידי אליו נוכל להשוות.

$\left(\frac{a}{r}\right)<<1$ - זהו פרמטר חסר מימדים בו נוכל לפתח.

ע"פ משפט הקוסינוס:

$$\left(r^+\right)^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-arcos\theta$$

$$\left(r^-\right)^2=r^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+arcos\theta$$

$$\varphi=q\left(\frac{1}{r^+}-\frac{1}{r^-}\right)$$

$$\frac{1}{r^+}=\sqrt{\frac{1}{r^2+\frac{a^2}{r}-arcos\theta}}=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{r}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)cos\theta}}\underset{*}{=}\frac{1}{r}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)cos\theta+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\right]$$

$$\frac{1}{r^-}\underset{*}{=}\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)cos\theta+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\right]$$

* - פיתוח לטור טיילור.

ג. הביעו את הפוטנציאל דרך מומנט הדיפול החשמלי $\vec{p}\equiv q\vec{a}$.

פוטנציאל כאשר מתחשבים רק באיברים מסדר $\frac{a}{r}$: $\varphi = q\left[\frac{1}{r}+\frac{acos\theta}{2r^2}-\frac{1}{r}+\frac{acos\theta}{2r^2}\right]=\frac{aqcos\theta}{r^2}$

קיבלנו שהפוטנציאל $\varphi \sim \frac{1}{r^2}$. לכן השדה $E\sim\frac{1}{r^3}$, כלומר הסדר הבא אחרי שדה של מטען נקודתי $\left(\sim\frac{1}{r^2}\right)$

מכניסים גודל חדש, שמאפיין דיפול: מומנט דיפול, $\vec{p}=q\vec{a}$, כאשר $\vec{a}$ מכוון מהמטען השלילי אל המטען החיובי.

$$\varphi=\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

ד. גזרו מהפוטנציאל את השדה החשמלי (בסדר המוביל) בכל המרחק.

$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=-\frac{\partial}{\partial r}(\varphi)\hat{r}-\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi)\hat{\theta}}_{*=0}$ (גרדיאנט בקואורדינאטות כדורית).

* - הרכיב מתאפס בגלל הסימטריה סביב ציר $\hat{z}$.

בכיוון $\hat{r}$: $E\hat{r}=-\frac{2aqcos\theta}{r^3}=\frac{2\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^3}$

בכיוון $\hat{\theta}$: $E\hat{\theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{aq}{r^2}\right)sin\theta=\frac{aq}{r^3}sin\theta$

ה. חשבו את השטף החשמלי דרך משטח (כדור שמרכזו בראשית) העוטף את הדיפול. השוו לחוק גאוס.

פתרון: מתוך חוק גאוס, $\Phi=4\pi q=0$ כי סכום המטענים בפנים הוא אפס.

חישוב ישיר:

$$\Phi=\int\vec{E}\cdot d\vec{s}=\int E\hat{r}R^2sin\theta d\theta d\phi=2\pi R^2\int_0^\pi\frac{2aqcos\theta}{r^3}sin\theta d\theta=\frac{4\pi R^2aq}{R^3}\int_0^\pi cos\theta sin\theta d\theta=0$$

$$d\vec{s}=R^2sin\theta d\phi d\theta\hat{r}$$

2. השדה החשמלי השורר במרחק נגזר מהפוטנציאל הבא: $\phi = -\frac{4\pi\rho_0}{a^\beta}\frac{r^{\beta+2}}{(\beta+2)(\beta+3)} + C$

עבור $r < R$ ו $\phi = \frac{4\pi\rho_0}{a^\beta(\beta+3)}\frac{R^{\beta+2}}{r}$ בכל שאר המרחב. הפוטנציאל נתון בקואורדינאטות כדוריות,

R הינו מרחק קבוע מהראשית, ו $\beta > 0$ מספר.

א. מצאו את הקבוע C.

מוצאים מתוך דרישת רציפות הפוטנציאל. (עבור $r = R$ שתי הנוסחאות שוות).

ב. מהו השדה החשמלי בכל המרחב.

1. עבור $r < R$: $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\varphi\hat{r} = \frac{4\pi r_0}{a^\beta}(\beta+2)\frac{r^{\beta+1}}{(\beta+2)(\beta+3)} = \frac{4\pi\rho_0}{a^\beta}\frac{r^{\beta+1}}{(\beta+3)}$ בכיוון $\hat{r}$.

אחרת: $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r}\varphi\hat{r} = \frac{4\pi\rho_0}{a^\beta(\beta+3)}\frac{R^{\beta+3}}{r^2} = \frac{4\pi\rho_0}{a^\beta(\beta+3)}\frac{R^{\beta+3}}{r^2}\hat{r}$

ג. מהי צפיפות המטען בכל המרחב?

השדה מתנהג כמו $\frac{1}{r^2}$, כמו שהוא מתנהג עבור מטען נקודתי.

$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ (משוואת פואסון).

לכן צפיפות המטען היא $\rho = \frac{-\nabla^2\varphi}{4\pi}$.

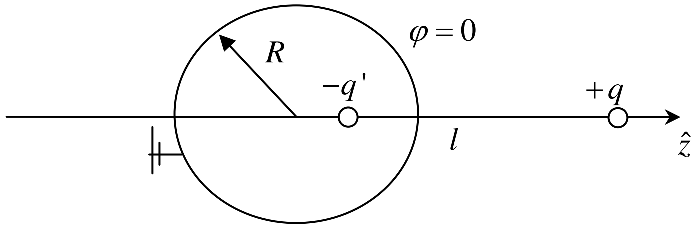
בקואורדינאטות כדוריות:

$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + $ נגזרות לפי θ ולפי ϕ.

הצטברות המטען בתוך הכדור:

$$\rho = \left(-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{4\pi\rho_0}{a^\beta}\frac{r^{\beta+3}}{\beta+3}\right) = \rho_0\left(\frac{r}{a}\right)^\beta$$

1. נתון מטען נקודתי $+q$ הנמצא במרחק d מקליפה כדורית מוליכה ומוארקת בעלת רדיוס $R<d$.



א. הראו שקיים מטען $-q'$ שיוצר יחד עם q משטח אקוויפוטנציאלי כדורי $\varphi=0$.

$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$

לבעיה סימטרית סיבוב סביב הציר, ולכן המטען $-q'$ חייב להיות על הציר על מנת לכבד סימטריה זו.

נניח ש d הוא המרחק מהראשית ועד ל $-q'$.

הפוטנציאל במרחב כתרומה של q ושל $-q'$ היא:

$$0=\varphi=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}-\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}$$

שני פרמטרים חופשיים: $\{d,q'\}$

רוצים לקבל משוואות פרמטריות של כדור שמרכזו בראשית: $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$\left(\frac{q}{q'}\right)^2\left(x^2+y^2+(z-d)^2\right)=x^2+y^2+(z-l)^2$$

$$x^2\left[\left(\frac{q}{q'}\right)^2-1\right]+y^2\left[\left(\frac{q}{q'}\right)^2-1\right]+z^2\left[\left(\frac{q}{q'}\right)^2-1\right]-2dz\left(\frac{q}{q'}\right)^2+d^2\left(\frac{q}{q'}\right)^2=-2lz+l^2$$

על מנת לאפס איברים לינאריים ב z:

$$2dz\left(\frac{q}{q'}\right)^2-2lz=0.$$

לכן: $d=l\left(\frac{q'}{q}\right)^2$

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)\underbrace{\left[\left(\frac{q}{q'}\right)^2-1\right]}_{\frac{q^2-q'^2}{q'^2}}=l^2-\left(\frac{q}{q'}\right)^2d^2=l^2\,\frac{q^2-q'^2}{q^2}$$

כאשר התנאי הזה מתקיים נקבל:

$$\Rightarrow\left(x^2+y^2+z^2\right)=\underbrace{l^2\left(\frac{q'}{q}\right)^2}_{R^2}$$

עכשיו אלו משוואות פרמטריות של כדור בעל רדיוס $R=l\dfrac{q'}{q}$.

ב. מצאו את הגודל ואת המיקום d של q' שיצר יחד עם q משטח כדורי שמרכזו בראשית ורדיוסו R המקיים $\varphi(R)=0$.

$q'=\frac{Rq}{l}$ - הצבה מהפתרון של הסעיף הקודם.

המרחק מהראשית: $d=l\left(\frac{q'}{q}\right)^2=\frac{R^2}{l}$.

ג. השתמשו בשיטת הדמויות ותוצאות הסעיפים הקודמים ע"מ למצוא את השדה החשמלי בכל המרחב בבעיה המקורית.

1. בתוך הכדור $E=0$ כי מדובר במוליך.
2. מחוץ לכדור נוצר שדה בגלל המטען q ומטען הדמות q'.

פוטנציאל: $$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}-\frac{q'}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}$$

נעבור לקואורדינאטות כדוריות: $\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ z=rcos\theta \end{matrix}$. אין תלות ברכיבים בכיוון $\hat{\phi}$ (בגלל סימטרית סיבוב סביב ציר $\hat{z}$).

$$\varphi(\vec{r})=\frac{q}{\sqrt{r^2+l^2-2rlcos\theta}}-\frac{q'}{\sqrt{r^2+d^2-2rdcos\theta}}$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi=-\hat{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=$$

$$\hat{r}\left[\frac{q(r-lcos\theta)}{\left[r^2+l^2-2rlcos\theta\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{q'(r-dcos\theta)}{\left[r^2+d^2-2rdcos\theta\right]^{\frac{3}{2}}}\right]+\hat{\theta}\left[\frac{lqsin\theta}{\left[r^2+l^2-2rlcos\theta\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{dq'sin\theta}{\left[r^2+d^2-2rdcos\theta\right]^{\frac{3}{2}}}\right]$$

ד. מצאו את צפיפות המטען המשטחית המושרית על פני הכדור.

הקפיצה דרך משטח טעון: $4\pi\sigma=\lim_{E\to0}\left(\vec{E}\cdot\hat{r}\,|_{r=R+\varepsilon}-\vec{E}\cdot\hat{r}\,|_{r=R-\varepsilon}\right)$

$$\lim_{E\to0}\vec{E}\cdot\hat{r}\,|_{r=R-\varepsilon}=0$$

$$\Rightarrow\sigma(\theta)=\frac{1}{4\pi}\lim_{E\to0}\vec{E}\cdot\hat{r}\,|_{r=R+\varepsilon}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{q(R-lcos\theta)}{\sqrt{R^2+l^2-2Rlcos\theta}^3}-\frac{q'(R-dcos\theta)}{\sqrt{R^2+d^2-2Rdcos\theta}^3}\right)$$

ה. מהו המטען הכולל המושרה על הכדור?

$$Q_{ind}=\int\sigma(\theta)da=2\pi R^2\int_0^{\pi}\sigma(\theta)sin\theta d\theta$$

da = שטח כל הקליפה

דרך שניה, באמצעות חוק גאוס:

נתבונן במעטפת כדורית בעלת רדיוס $r=R+\varepsilon$

השטף שעובר דרך המעטפת הוא $4\pi Q_{inside}$, כאשר הבעיה המקורית שקולה לבעיה של q + מטען דמות.

בבעיה האמיתית $\Phi=4\pi Q_{ind}$, בבעיה השקולה: $\Phi=4\pi q'$. לכן $4\pi q'=4\pi Q_{ind}$.

2. נתון גליל אינסופי מוליך בעל רדיוס R, טעון בצפיפות מטען אורכית אחידה λ. מקיפים את הגליל בקליפה גלילית מוליכה ומוארקת בעלת רדיוס r.

א. מהו השדה בין הגליל לקליפה?

חוק גאוס:
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{r} = \left|E\left(\vec{r}\right)\right|\cdot 2\pi rL = 4\pi\lambda L$$
$$E\left(\vec{r}\right) = \frac{2\lambda}{r}$$
והכיוון הוא מטעמי סימטריה כיוון רדיאלי.

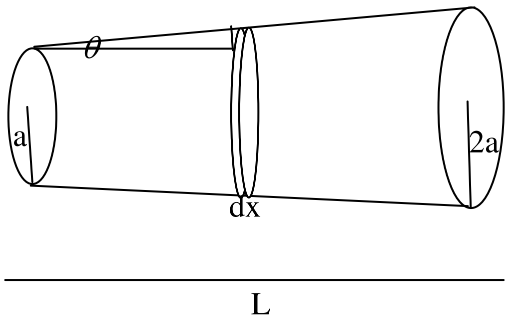
ב. מהו הפרש הפוטנציאלים בין הקליפות?

$$\Delta\varphi = \varphi\left(r\right) - \varphi\left(R\right) = \int \vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{l} = -\int_R^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_R^r \frac{2\lambda}{r}dr = 2\lambda\left(lan\left(\frac{r}{R}\right)\right)$$

ג. מהו הקיבול ליחידות האורך של המערכת?

$$C = \frac{Q}{V}$$
$$\frac{dc}{dl} = \frac{1}{v}\frac{dQ}{dl}$$
$$\frac{dc}{dl} = \frac{1}{V}\lambda$$

1. חשבו את ההתנגדות בין בסיסיו של חרוט קטום בעל בסיסים בעלי רדיוסים a ו- $2a$ וגובה L, העשוי מחומר בעל מוליכות סגולית σ. הניחו ש- $L >> a$.



ההתנגדות של פרוסה בעלת עובי אינטיפיסימלי dx היא: $dR = \frac{dx}{A\sigma}$ כאשר A הוא שטח החתך.
הנוסחה נכונה רק כאשר השטח A הוא ניצב לזרם. באופן כללי הזרימה בחרוט לא מקבילה לשטח, אבל נוכל להשתמש בנוסחה בכל זאת מכיוון ש $L >> a$.

$$A(x) = \pi\left(r(x)\right)^2 .$$

$$r(x) = a + x \cdot tan\theta = a + x\frac{a}{L}$$

לכן: $$A(x) = \pi a^2\left(1+\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{L^2}(x+L)^2$$

ולכן: $$dR = \frac{dx}{\frac{\pi a^2}{L^2}(x+L)^2\sigma} = \frac{dx}{\sigma}\frac{L^2}{\pi a^2}\frac{1}{(x+L)^2}$$

$$R_{total} = \int dR(x) = \int_0^L \frac{L^2}{\pi\sigma a^2}\frac{dx}{(x+L)^2} = \frac{L}{2\pi a^2\sigma}$$

2. נתונה טבלה מוליכה ואינסופית בעלת עובי L. הטבלה בנויה מ-2 שכבות בעלות עובי $L/2$ כל אחת בעלות מוליכות סגולית σ_1 ו- σ_2 בהתאמה. מחזיקים את בסיסי הטבלה במתח קבוע V.

a. מהם הרכיבים הלא טריוויאליים של $\vec{E}$ ו- $\vec{J}$ ובמה הם תלויים? ענו על סעיף זה על סמך הסימטריות של הבעיה.

אם נזיז את הבעיה במישור $\hat{x}\hat{z}$ הבעיה לא תשתנה. לכן לרכיבים של $\vec{J},\vec{E}$ לא יכולה להיות תלות בקואורדינאטות אלו.

b. חשבו את $\vec{E}$ ו- $\vec{J}$. הניחו שהזרם סטציונרי - אין שינוי של כמות המטענים עם הזמן.

$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{dt}=0$ - (שימור מטען) - הדיברגנץ של צפיפות הזרם שווה למינוס השנוי בצפיפות המטען כפונקציה של הזמן.

$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z}$ לכן $\frac{\partial J_y}{\partial y}=0$ לכן J_y הוא קבוע J_0.

זאת אומרת: $J=J_0\hat{y}$.

$$\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

לכן: $\vec{E}_1=\frac{1}{\sigma_1}J_0\hat{y}$, $\vec{E}_2=\frac{1}{\sigma_2}J_0\hat{y}$ - $\sigma_1\neq\sigma_2$ ולכן יש קפיצה בשדה במעבר מתווך אחד לתווך שני.

לכן יש הצטברות מטען משטחית בגבול שבין שני החלקים של הטבלה.

נבטא את J_0 במונחים של $\{V,L,\sigma\}$ כלומר הנתונים המקוריים של הבעיה.

$$V=\int\vec{E}d\vec{l}=\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{J_0}{\sigma_1}dy+\int_{\frac{L}{2}}^{L}\frac{J_0}{\sigma_2}dy=\frac{LJ_0}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1}+\frac{1}{\sigma_2}\right)=\frac{LJ_0}{2}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}\right)$$

ולכן: $J_0=\frac{2V}{L}\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$.

קיבלנו:

$$E_1=\frac{2V}{L}\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\hat{y}\ ,\ E_2=\frac{2V}{L}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)\hat{y}$$

c. מהן הצטברויות המטען במערכת? σ_{12}

$$\Delta\vec{E}\cdot\hat{n}=4\pi\sigma_{12}$$

ההפרש בין השדות בתחום 1 ובתחום 2 :

$$\Delta\vec{E}\cdot\hat{y}=\frac{2V}{L}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

$$\sigma_{12}=\frac{V}{2\pi L}\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

3. נתון מעגל המורכב ממקור מתח ε נגד R וקבל בעל קיבול C. בזמן $t=0$ אין מטען על הקבל והמתג פתוח. ברגע זה סוגרים את המתג. מהו המטען על הקבל כפונקציה של הזמן ומהו הזרם במעגל?

בזמן כלשהו t המתח על פני הקבל $V=\frac{Q(t)}{C}-\varepsilon$

זהו גם המתח על הנגד $V=IR$ ע"פ חוק אום.

לכן: $\frac{Q(t)}{C}-\varepsilon=IR$.

זרם שזורם במעגל שווה לקצב שינוי המטען על הקבל: $I=-\frac{dQ}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{Q(t)}{C}-\varepsilon=-R\frac{dQ}{dt}$$

פתרון של משוואה דיפרנציאלית אי-הומוגנית הוא הפתרון הכללי של משדי"פ הומוגנית ועוד פיתרון פרטי.

הומוגנית: $\frac{dQ}{dt}=-\frac{1}{RC}Q$

$\tau=RC$ - זמן אופייני לפריקת קבל או טעינתו

$$\frac{dQ}{Q}=-\frac{dt}{t}$$

$$\ln Q=\tilde{A}-\frac{t}{\tau}$$

$$\Rightarrow Q(t)=A\cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$$

פתרון פרטי למשוואה אי הומוגנית: קבוע (הכי קל למצוא)

$$Q=\varepsilon C$$

לכן: $Q(t)=\varepsilon C+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

נשאר לקבוע את A ע"פ תנאי התחלה - $Q(t=0)=0$. (אין מטען על הקבל בתחילת הטעינה).

$$A=-\varepsilon C$$

$$Q(t)=\varepsilon C\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$I(t)=-\frac{dQ}{dt}=-\frac{\varepsilon C}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

1. נתונים 2 לוחות אינסופיים טעונים מקבילים למישור xy שהמרחק ביניהם במערכת המעבדה הוא d. המהירות של הלוח העליון במערכת המעבדה היא $\vec{v}_1 = 0.6c\hat{x}$ והמהירות של בלוח העליון היא $\vec{v}_2 = -0.8c\hat{x}$. צפיפויות מטען משטחיות הן σ ו- $-\sigma$ של העליון והתחתון בהתאמה (צפיפויות ניתנות במערכות העצמיות של הלוחות)

א. מהי צפיפות המטען על כל אחת מן הלוחות במערכת המעבדה?

צפיפות מטען משטחית: $\sigma = \frac{dq}{da}$. המטען קבוע בכל המערכות $dq' = dq$. השטח משתנה כשעוברים ממערכת אחת לשניה, כי יחידות האורך משתנות. $da = dxdy$. $y' = y$ כי התנועה היא בכיוון ניצב לכיוון y.

x - התקצרות האורך: $x[lab] = \frac{x[self]}{\gamma}$ עבור כל אחד מהלוחות.

$$\gamma_{up} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{4}$$

$$\gamma_{down} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{5}{3}$$

$$da[lab] = \frac{da[self]}{\gamma}$$

$$\sigma = \frac{dq}{da} \Rightarrow \sigma[lab] = \gamma\sigma[self]$$

$$\sigma_{up}[lab] = \frac{5}{4}\sigma$$

$$\sigma_{down}[lab] = -\frac{5}{3}\sigma$$

ב. מהו השדה החשמלי במערכת המעבדה?

מעל הלוח העליון $E_{mid} = 2\pi\sigma_{up}[lab] + 2\pi\sigma_{down}[lab]\hat{z} = -2\pi\left(\frac{5}{12}\sigma\right)\hat{z}$

בין הלוחות $E_{mid} = -2\pi\sigma_{up}[lab] + 2\pi\sigma_{down}[lab]\hat{z} = -2\pi\left(\frac{35}{12}\sigma\right)\hat{z}$

מתחת ללוח התחתון $E_{mid} = -2\pi\sigma_{up}[lab] - 2\pi\sigma_{down}[lab]\hat{z} = 2\pi\left(\frac{5}{12}\sigma\right)\hat{z}$

ג. מהי צפיפות המטען על הלוח התחתון במערכת המנוחה של הלוח העליון?

נחשב מהי המהירות של הלוח התחתון במערכת עצמית של הלוח העליון ואח"כ נפעיל את נוסחת התקצרות האורך ממערכת עצמית (אין נוסחה פשוטה לטרנספורמציית אורך ממערכת לא עצמית אחת למערכת לא עצמית אחרת).

כאשר מערכת K' נעה ביחס למערכת K במהירות V אז: $v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{C^2}}$ חיבור מהירויות יחסותי.

נגדיר: K' - מערכת המעבדה.

K - המערכת של הלוח העליון.

$v_x' = -0.8C\hat{x}$ - המהירות של הלוח התחתון במערכת המעבדה.

$V = -0.6C\hat{x}$ - מהירות המעבדה ביחס למערכת הלוח העליון.

$v_x = \frac{(-0.8-0.6)C}{1+0.8\cdot 0.6} = -0.95C\hat{x}$ - מהירות הלוח התחתון ביחס למערכת הלוח העליון.

$$\gamma_{down-up} = \frac{1}{\sqrt{1-0.95^2}} = 3.2$$

$$\sigma_{down-up} = \sigma_{down}\left[self\right]\gamma_{down-up} = -3.2\sigma$$

ד. מהו השדה החשמלי בין הלוחות במערכת המנוחה של הלוח העליון?

$$\vec{E} = 2\pi(-1-3.2)\sigma = -2\pi\sigma(4.2)\hat{z}$$

2. מטען נקודתי נע במהירות קבועה $v = c/\sqrt{3}$ מ- $x = -\infty$ בכיוון החיובי על פני ציר $\hat{x}$. ב- $x = 0$ ניצב קיר. בזמן $t = 0$ המטען פוגע בקיר, בבת אחת מסתובב ומתחיל תנועה בכיוון ההפוך ובאותה מהירות. במישור הדף בנקודה $(0, L)$ נמצא צופה המודד את השדה החשמלי בזמנים $t = L/c - \varepsilon$ ו- $t = L/c + \varepsilon$ כך ש- $\varepsilon << L/c$.

א. מהו השדה החשמלי כפי שנמדד בכל אחד מהזמנים ע"י הצופה?

בזמן $t < \frac{L}{C}$ $E_x\left[self\right] = \frac{Qx\left[self\right]}{\left(x^2\left[self\right]+y^2\left[self\right]\right)^{\frac{3}{2}}}$ (בזמן זה לא יודעים ב L שהמטען הסתובב).

$$E_y\left[self\right] = \frac{Qy\left[self\right]}{\left(x^2\left[self\right]+y^2\left[self\right]\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y\left[self\right] = L$$

$$x(self) = \gamma\left(x\left[lab\right]+vt\right) \qquad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$x\left[lab\right] = 0$ ולכן $x(self) = \gamma\left(0 - \frac{C}{\sqrt{3}}\frac{L}{C}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{L}{\sqrt{2}}$

$$E_x\left[lab\right] = E_x\left[self\right] = -\frac{Q}{L^2}\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y\left[lab\right] = \gamma E_y\left[self\right] = \frac{2}{3}\frac{Q}{L^2}$$

בזמן $t = \frac{L}{C}+\varepsilon$ האינפורמציה אודות שינוי הכיוון של החלקיק, מגיעה ל L ולכן בכל מקום שרשמנו קודם x, נציב כעת $-x$ (כי המהירות היתה בדיוק בכיוון ההפוך).

$$E_x\left[lab\right] = E_x\left[self\right] = \frac{Q}{L^2}\frac{2}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y\left[lab\right]=\gamma E_y\left[self\right]=\frac{2}{3}\frac{Q}{L^2}$$

ב. מהי הזווית בין כיווני השדה?

$$\theta=\arctan\left(\frac{E_x}{E_y}\right)=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=30^o$$

$$\theta'=-30^o$$

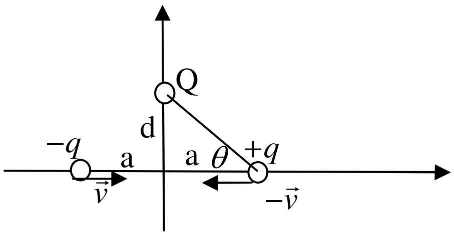
$$\Delta\varphi=60^o$$

1. מהתרגיל שעבר - שני מטענים נעים $+q,-q$ על ציר x. מטען Q על ציר y.

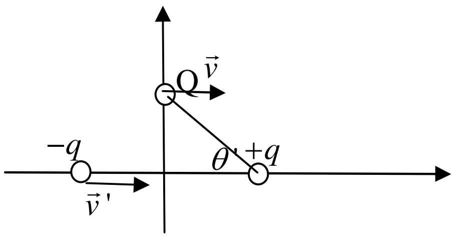
ב. מהו הכוח שפועל על Q (המטענים באותה קונפיגורציה) במערכת המנוחה של $+q$

פתרון:

במערכת המעבדה:



במערכת המנוחה של $+q$



היות ובמערכת המנוחה של $+q$ נקבל ש Q נע - פועלים עליו כוחות חשמלי ומגנטי.

חישוב כוחות:

נתחיל מ $+q$: במערכת המנוחה שלו הוא נח, ולכן הוא יוצר רק כוח חשמלי:

$$\vec{E}\,' = +\frac{q}{r'^2}\hat{r}\,'$$

$$\vec{E}\,' = -\frac{q\cdot cos(\theta')}{\left[(x')^2+(y')^2\right]}\hat{x}+\frac{q\cdot sin(\theta')}{\left[(x')^2+(y')^2\right]}\hat{y}$$

$$x' = (-\gamma a)$$

$$y' = y = d$$

זוויות:

$$cos(\theta') = \frac{(\gamma a)}{\sqrt{(\gamma a)^2+d^2}}$$

$$sin(\theta') = \frac{d}{\sqrt{(\gamma a)^2+d^2}}$$

לכן: $$\vec{E}\,' = -\frac{q\gamma a}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{x}+\frac{qd}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{y}$$

המטען $-q$:

המהירות היחסית בין מערכת $-q$ למערכת $+q$:

$V'=\frac{V+V}{1+\frac{V^2}{C^2}}=\frac{2V}{1+\beta^2}$ כאשר V ו β מתייחס למהירות של $+q,-q$ במערכת המעבדה.

נגדיר: $\gamma'=\left(1+\beta'^2\right)$

נסמן בשני פסיקים את הגדלים הקשורים במערכת המנוחה של $-q$.

$$E_x''=\frac{-q}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)}cos\left(\theta''\right)$$

- שדה אלקטרוסטאטי רגיל.

$$E_y''=\frac{-q}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)}sin\left(\theta''\right)$$

זוויות:

$$cos\left(\theta''\right)=\frac{a\gamma}{\sqrt{(\gamma a)^2+d^2}}$$

$$cos\left(\theta''\right)=\frac{d}{\sqrt{(\gamma a)^2+d^2}}$$

לכן

$$E_x''=\frac{-qa\gamma}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y''=\frac{-qd}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

טרנספורמציה של שדות - נעבור ממערכת המנוחה של $-q$ למערכת המנוחה של $+q$.

באופן כללי:

$$E'_{\parallel}=E_{\parallel} \qquad \vec{E}_{\perp}'=\gamma\left(E_{\perp}+\vec{\beta}\times\vec{B}\right)$$

$$B'_{\parallel}=B_{\parallel} \qquad \vec{E}_{\perp}'=\gamma\left(E_{\perp}+\vec{\beta}\times\vec{B}\right)$$

אצלנו במקום γ נשתמש ב γ' כי אנחנו עוברים ממערכת המנוחה של $-q$ למערכת של $+q$.

רכיב x עובר טרנספורמציה טריוויאלית.

$E_x^{+q}=E_{\parallel}^{+q}=\frac{-a\gamma q}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ - הגדלים נתונים כמו שהם - אין צורך בתרגום.

$$E_y^{+q}=E_{\perp}^{+q}=\gamma' E_y''=\frac{-a\gamma' q}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

השדה המגנטי: $B_{\perp}^{+q}=-\gamma'\vec{\beta}'\times\vec{E}_y''=\left(-\hat{z}\right)\gamma'\beta'\cdot\frac{-qd}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\gamma'\beta' qd}{\left((\gamma a)^2+d^2\right)^{\frac{3}{2}}}\hat{z}$

$$\vec{F}=q\vec{E}+\frac{q}{C}\vec{V}\times\vec{B}$$

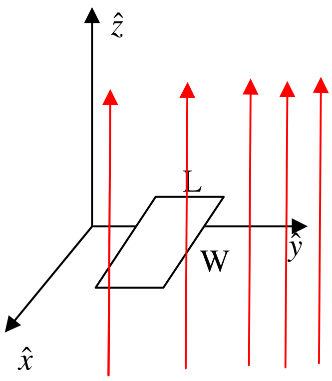
1. המשך במערכת לורנץ S שוררים שדות $\vec{B}=B_0\hat{x}$ ו- $\vec{E}=E_0\hat{y}$.

א. האם קיימת מערכת לורנץ S' שבה השדה החשמלי והמגנטי מקבילים ואינם אפס?

ב. האם קיימת מערכת לורנץ S' שבה $\vec{E}'=0$?

2. לולאה מלבנית עם צלעות באורך L ו- W נעה בשדה מגנטי $\vec{B}=B_0\left(y_0-y\right)\hat{z}$. מסת הלולאה m והתנגדותה R.

א. מצאו את משוואות התנועה של הלולאה ופתרו אותם. (אין כבידה)



$f=\frac{\vec{I}}{C}\times\vec{B}$ כאשר $\vec{I}$ הוא זרם מושרה.

נחשב כא"מ: $\varepsilon=-\frac{1}{C}\frac{\partial\Phi_m}{\partial t}=-\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\int\int\vec{B}\cdot d\vec{a}$ כאשר $d\vec{a}=dxdy\hat{z}$

$$\varepsilon=-\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\int\int\vec{B}\cdot d\vec{a}=-\frac{1}{C}\frac{\partial}{\partial t}\int B_0\left(y_0-y\right)dxdy=-\frac{WB_0}{C}\frac{\partial}{\partial t}\int dy\left(y_0-y\right)$$

$\frac{\partial y_0}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial t}=V_y$ נכניס אותם לתוך האינטגרל ונקבל:

$$\varepsilon=-\frac{WB_0}{C}\int dy\left(-V_y\right)=\frac{WB_0LV_y}{C}$$

הזרם המושרה בתוך הלולאה הוא $I_{ind}=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{WB_0LV_y}{CR}$

הכוח שפועל על הצלעות:

שמאלית: $F_1=\frac{IWB_1}{CR}\left(-\hat{y}\right)$ כאשר B_1 הוא השדה המגנטי לאורך הצלע השמאלית.

ימנית: $F_2=\frac{IWB_2}{CR}\left(+\hat{y}\right)$ כאשר B_2 הוא השדה המגנטי לאורך הצלע ימנית.

לכן סה"כ: $\vec{F}_{Total}=\left(\frac{WLB_0}{C}\right)^2\left(\frac{V}{R}\right)\hat{y}$

$$F=ma=m\dot{V}$$

$m\dot{V}=\left(\frac{WLB_0}{C}\right)^2\frac{V}{R}$ ולכן $\dot{V}=-\frac{1}{m}\frac{1}{R}\left(\frac{WLB_0}{C}\right)^2V=\frac{1}{\tau}$

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{1}{\tau}V\Rightarrow\int\frac{dV}{V}=\int dt\left(\frac{-1}{\tau}\right)\Rightarrow\log\left(V\right)=\frac{-t}{\tau}\Rightarrow V=V_0e^{\frac{t}{\tau}}$$

ב. מצאו את ההעתק המקסימאלי של הלולאה.

$$X_{\max} = \int_0^\infty V dt = V_0 \int_0^\infty e^{\frac{-t}{\tau}} dt = V_0 \tau$$

ג. מהי כמות האנרגיה שהתבזבזה לחום?

$W = \int_0^\infty dt P(t)$ כאשר $P(t)$ הוא הספק חום רגעי.

$$P(t) = FV$$

$$W = \int_0^\infty dt P(t)$$

$FV = \frac{m}{\tau} V^2(t)$ כאשר $V^2(t) = V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$

לכן $W = \int_0^\infty dt \frac{m}{\tau} V_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} = \frac{1}{2} m V_0 \hat{z}$