# סיכום למבחן בפיזיקה 1מ (114071) – 10/2/2002 (חורף תשס"ב)

## (1) וקטורים ורקע מתמטי

### מכפלות סקלריות

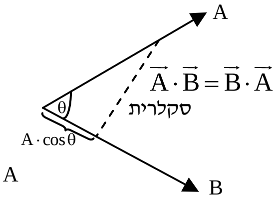
$$\vec{A}\cdot\vec{B} \triangleq |A|\cdot|B|\cdot\cos(\hat{A}\cdot\hat{B})$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$
$$\vec{A}\perp\vec{B} \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

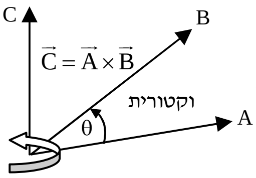
$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$$
$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$
$$\hat{A} = \frac{A_x}{A}\hat{x} + \frac{A_y}{A}\hat{y} + \frac{A_z}{A}\hat{z}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

### מכפלות וקטוריות

$$\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B} = \hat{C}\cdot|A|\cdot|B|\cdot\sin(\hat{A}\cdot\hat{B})$$
$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{A}$$
$$\vec{A}\times\vec{A} = 0$$
$$\vec{X}\times\vec{Z} = -\vec{Y} \qquad \vec{Z}\times\vec{X} = \vec{Y}$$
$$\vec{Y}\times\vec{X} = -\vec{Z} \qquad \vec{X}\times\vec{Y} = \vec{Z}$$
$$\vec{Z}\times\vec{Y} = -\vec{X} \qquad \vec{Y}\times\vec{Z} = \vec{X}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$$
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\cdot\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$$




### יישומים בתנועה מעגלית:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{r}\omega^2\hat{r} \qquad \vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\hat{x} + r\sin(\omega t)\hat{y}$$
$$a = \frac{v^2}{r} \qquad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega r\sin(\omega t)\hat{x} + \omega r\cos(\omega t)\hat{y}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \qquad v = \omega r$$

### נגזרות בוקטורים

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t) = v(t)$$
$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} + \frac{dz}{dt}\hat{z} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\omega = r\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\hat{\theta}$$
$$v = r\omega\hat{\theta} = \omega r$$
$$\vec{a} = -\vec{r}\omega^2\hat{r} = \omega^2 r$$

### המרת קואורדינטות (יישום בבעייה פתורה...)

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$$
$$\theta = \frac{1}{\tan\frac{x}{y}} \qquad \hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$
$$x = r\cos\theta \qquad \hat{x} = \hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad \hat{y} = \hat{r}\sin\theta + \hat{\theta}\cos\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}\ ;\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{r})$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}\ ;\ \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

## (2) חוקי ניוטון ומשוואות התנועה

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}} \qquad [F] = [M]\frac{[\ell]}{[t]}$$
$$F[m,kg,s] = Newton$$
$$F[cm,gr,s] = Dyne$$

הערה חשובה: ע"מ למצוא את תנאי ההתחלה, יש לעשות אינטגרציה ולהציב בפתרון $t=0$ ולמצוא את התנאים המתאימים.

## (3) תנועת חלקיק בשדה חשמלי ומגנטי

### נוסחאות הכוחות

$$\vec{F}_{elect.} = K\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}\hat{r} \qquad K = 9\cdot 10^9 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$
$$\vec{F}_{grav.} = -G\frac{m_1\cdot m_2}{r^2}\hat{r}$$
$$\vec{F}_{elect.} = q\cdot\vec{E} \qquad \vec{E} = K\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$
$$\vec{F}_{mag.} = q\vec{V}\times\vec{B}_{[N,SI]} \qquad \vec{F}_{mag.} = \frac{q}{c}\vec{V}\times\vec{B}_{[cgs,gaus]}$$
$$c = 2.9979\cdot 10^{10}\ cm/s$$
$$\vec{F}_{mag.+el.} \triangleq \vec{F}_{tot.} = q\cdot\vec{E} + q\vec{V}\times\vec{B}$$

### תנועת חלקיק בשדה חשמלי אחיד וקבוע

$$\vec{F} = m\vec{a} = q\cdot\vec{E}$$
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E}$$
$$\vec{r}(t) = \frac{q\vec{E}}{2m}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$$

### תנועת חלקיק בשדה מגנטי אחיד וקבוע (אנרגיה קינטית נשמרת)

(שינוי כוון מהירות בלבד)

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{V}\times\vec{B}$$
$$v_x(t) = v_1\sin\omega t \qquad v_y(t) = v_1\cos\omega t$$
$$v_z(t) = \text{const}$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \omega v_1\cos\omega t \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega v_1\sin\omega t$$
$$\omega \triangleq \omega_c = \frac{qB}{m}$$
$$x = x_0 + \frac{v_1}{\omega_c} - \frac{v_1}{\omega_c}\cos\omega_c t$$
$$y = y_0 + \frac{v_1}{\omega_c}\sin\omega_c t$$
$$z = z_0 + v_z t$$
$$r_c = \frac{v_1}{\omega_c} = \frac{mv_1}{qB}$$

### חלקיק טעון בשדה חשמלי חילופי אחיד

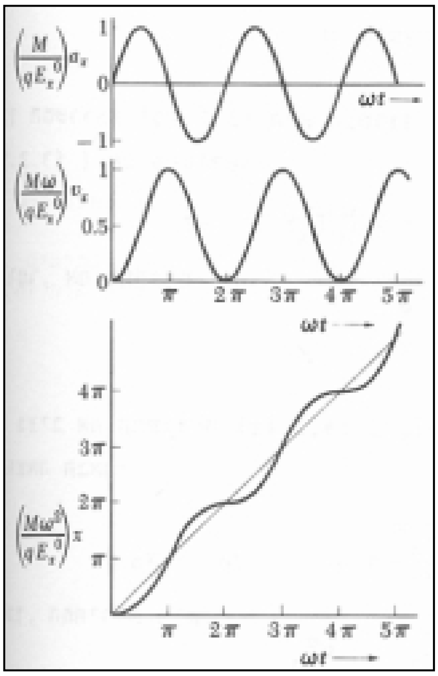
$$\vec{E} = E_x\hat{x} = E_x^0\sin\omega t\,\hat{x}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{m}E_x = \frac{q}{m}E_x^0\sin\omega t\,\hat{x}$$
$$x(t) = \frac{qE_x^0}{m^2}\sin\omega t + \frac{qE_x^0}{m\omega}t + x_0$$
$$v_x(t) = -\frac{qE_x^0}{m\omega}\cos\omega t + v_0$$

### חלקיק בשדה חשמלי ומגנטי

$$\begin{cases} \ddot{z} = q\dfrac{E}{m} \\ \ddot{x} = -q\dfrac{B}{m}\dot{y} \\ \ddot{y} = q\dfrac{B}{m}\dot{x} \end{cases}$$

סימן "המינוס" מתחלף לעתים בין ה-$x$ ל-$y$ – יש לשים לב בפתרון בעייה ספציפית.

המשך 3 – תנועה בשדה חשמלי משתנה




עבור מטען $q$ בשדה $\mathrm{E} = \hat{x}E_x^0 \sin\omega t$

$$a_x = \frac{q}{M}E_x^0 \sin\omega t$$

ו-

$$v_x(t) = \int a_x\,dt = -\frac{qE_x^0}{M\omega}\cos\omega t + v_0.$$

אם $v_x(0) = 0$ , אז:

$$v_0 = \frac{qE_x^0}{M\omega}.$$

אז:

$$v_x(t) = \frac{qE_x^0}{M\omega}(1 - \cos\omega t)$$

הואיל ו- $x(t) = \int v_x(t)\,dt$

$$= \frac{qE_x^0}{M\omega}\int(1 - \cos\omega t)\,dt + x(0).$$

הרי אם $x(0) = 0$, אזי:

$$x(t) = -\frac{qE_x^0}{M\omega^2}\sin\omega t + \frac{q}{M\omega}E_x^0 t.$$

הערה: בפתרון השאלות יש לשים לב ליחידות. אם היחידות אינן ניוטון יש להוסיף את הערך $c$ לפתרון (מהירות האור בהתאמה).

**(4) מערכת ייחוס וטרנספורמציית גליליי**

נתבונן במערכת S במרחב ו לצידה מערכת 'S המתקדמת לפי חוקי הקינמטיקה כשיש לה מהירות בכיוון ה- $x$ : לצופה המתבונן מחוץ למערכת נראה כי המערכת נעה בתאוצה ולכן: $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{I}} = m(\vec{a} + \vec{a_0})$ כאשר $a$ תאוצה של הסביבה ו-$a_0$ היא התאוצה של המערכת עצמה.

לצופה הנמצא בתוך המערכת נראה כי הוא נע רק לפי תאוצת הסביבה ולכן חייב לפעול עליו כוח מדומה: $\vec{\mathrm{F}} = \sum\vec{\mathrm{F}} - m\vec{a_0} = m\vec{a}$ . באם תאוצת הסביבה היא אפס אזי בעזרת הכוח המדומה לא יפעלו עליו כוחות והוא "יישאר במנוחה" יחסית למערכת בה הוא נע: $\vec{\mathrm{F}} = \sum\vec{\mathrm{F}} - m\vec{a_0} = 0$

$t = t' \quad y = y' \quad z = z'$
$x = x' + \mathrm{V}\cdot t$
$v_x = v'_x + \mathrm{V}$
$v_y = v'_y \quad v_z = v'_z$
$\boxed{a_x = a'_x}$
$\vec{\mathrm{F}}_{fictitious} \triangleq \vec{\mathrm{F}}_0 = -m\vec{a_0}$

**(5) חוקי שימור האנרגיה**

$\mathrm{W} = \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{\Delta r} = \mathrm{F}\Delta r\cos\alpha$

כוח משמר: $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{\mathrm{F}_c}\cdot\vec{dr} = -\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}\vec{\mathrm{F}_c}\cdot\vec{dr}\ ;\ \oint\vec{\mathrm{F}_c}\cdot\vec{dr} = 0$

$\mathrm{W}_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{dr}$

$\mathrm{W}_{\mathrm{F-}tot.} = \Delta\mathrm{E}_k = \mathrm{E}_{k-\mathrm{B}} - \mathrm{E}_{k-\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}m\left(v_{\mathrm{B}}^2 - v_{\mathrm{A}}^2\right)$

הספק: $\mathrm{P} = \frac{d\,\mathrm{W}}{dt} = \vec{\mathrm{F}}\frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{v}$

$\mathrm{E}_p = \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{U}(\vec{r_{\mathrm{B}}}) - \mathrm{U}(\vec{r_{\mathrm{A}}}) \triangleq -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{dr}$

$\mathrm{U_B} - \mathrm{U_A} = -(\mathrm{K_B} - \mathrm{K_A})$

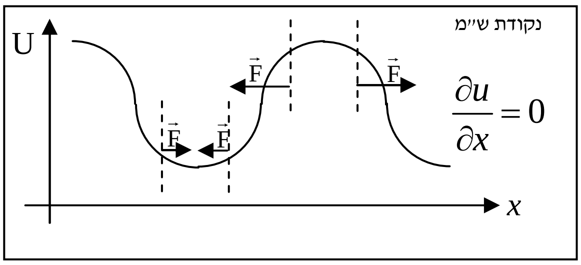
$\boxed{\mathrm{U_B} + \mathrm{K_B} = \mathrm{U_A} + \mathrm{K_A}}$

$if\ \ \mathrm{U_A} = 0 \Rightarrow \mathrm{U}(\vec{r_{\mathrm{B}}}) \equiv \mathrm{U}(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r}\vec{\mathrm{F}}\cdot\vec{dr}$

$\vec{\mathrm{F}} = -\vec{\nabla}\,\mathrm{U} \triangleq -\frac{\partial u}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\partial u}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial u}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial u}{\partial z}\hat{z}$

נקודת ש"מ $\vec{\nabla}\,\mathrm{U} = 0 \Leftrightarrow$ (או לפעמים ידובר רק על הנגזרת החלקית). מכל מקום נקודת מקסימום היא ש"מ רופף ונקודת מינימום היא ש"מ יציב.

במרחב ובטבע קיימים שדות כוחות הנקראים שדות מרכזיים. המאפיין את השדות הללו הוא: $\vec{\mathrm{F}} = f(r)\hat{r}$ . שדות אלו הם שדות משמרים ובהם אינטגרל העבודה במעבר מ-A ל-B איננו תלוי במסלול, ולכן לפי שמם – שינוי האנרגיה במעבר בהם שווה לאפס. דוגמאות לשדות וכוחות משמרים: שדה קבוע, כוח לורנץ, כוח הגרוויטציה וכוח קולון.




מושגים: ש"מ יציב (בור פוטנציאל), ש"מ רופף (גבעת פוטנציאל).

**(6) חוקי שימור התנע הקווי והגדרת מערכת מרכז המסה** $\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$ ; $\vec{P}=m\vec{v}$

כאשר המערכת מבודדת, התנע הכללי נשמר ולא משתנה בזמן (וגם ברכיביו). מערכת מבודדת דהיינו – פועלים בה רק כוחות של פעולה ותגובה בין החלקיקים ללא פעולה של כוחות חיצוניים. $\frac{d}{dt}(\vec{P}_1+\vec{P}_2)=0$ **התנגשות אלסטית לחלוטין** – בהתנגשות כזו נשמר התנע הקווי והאנרגיה הקינטית. התנגשות פלסטית לחלוטין – בהתנגשות כזו נשמר התנע הקווי אולם האנרגיה המכנית (קינטית + פוטנציאלית) לא נשמרת. הערה : האנרגיה הכללית (אנרגיה כולל אנרגיית חום למשל) נשמרת.

בהתנגשות אלסטית חד-ממדית : $\vec{v}_1+\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{u}_2$

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v'}_1+m_2\vec{v'}_2$$

$$\left.\begin{aligned}m_1v_{1,x}+m_2v_{2,x}&=m_1v'_{1,x}+m_2v'_{2,x}\\ m_1u_{1,x}+m_2u_{2,x}&=m_1u'_{1,x}+m_2u'_{2,x}\end{aligned}\right\}$$

כוחות פנימיים אינם משפיעים על התנע הכולל של קבוצת חלקיקים : $\vec{P}_{tot.}=\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i$

הכוחות הפנימיים מבטלים זה את זה בהתאמה : $\vec{F}_{i,j}=-\vec{F}_{j,i}$

מערכת מרכז המסה :

$$\vec{R}_{c.m.}=\frac{\sum_{n=1}^{N}\vec{r}_n m_n}{\sum_{n=1}^{N}m_n}$$

$$\dot{\vec{R}}_{c.m.}=\frac{\sum_{n=1}^{N}\dot{\vec{r}}_n m_n}{\sum_{n=1}^{N}m_n}=\frac{\sum_{n=1}^{N}\vec{v}_n m_n}{\sum_{n=1}^{N}m_n}=\frac{\vec{P}_{tot.}}{\sum_{n=1}^{N}m_n}=\mathrm{const}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{N}m_n\right)\ddot{\vec{R}}_{c.m.}=\sum_{n=1}^{N}\left(\dot{\vec{v}}_n m_n\right)=\sum_{n=1}^{N}\vec{F}_n=\vec{F}_{external}$$

תנועה עם מסה משתנה :

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

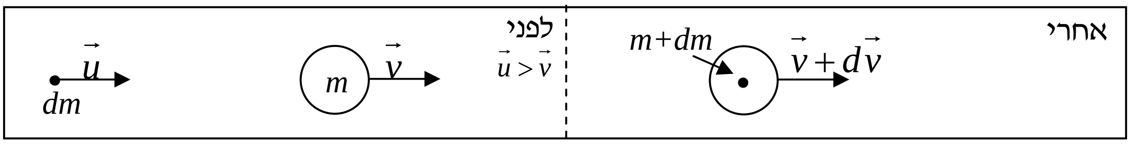
$$\frac{dm}{dt}=c\cdot\vec{v}$$

הערה : **במערכת מרכזת המסה :**

(1) סכום וֶקְטוֹרֵי-המרחק של המסות ממ״מ = 0.

(2) התנע הכולל = 0.

<u>דוגמא להתנגשות אי-אלסטית עם מסות משתנות</u>




$$u_{relative}=u-v$$

$$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}=0$$

$$\frac{(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})-(m\cdot\vec{v}+dm\cdot\vec{u})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}-\vec{u}\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}\underbrace{(\vec{v}-\vec{u})}_{-u_{rel}}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt}=u_{rel}\frac{dm}{dt}}$$

כאשר פועל כוח חיצוני, אזי :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}_{ext.}+\vec{u}_{rel}\frac{dm}{dt}$$

באופן כללי :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{u}_{rel}\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt}=-\alpha\Rightarrow m=\int\frac{dm}{dt}dt=-\int\alpha dt\Rightarrow m(t)=-\alpha t+m_0$$

בעייה לדוגמא : טיל פולט גזים במהירות $-\vec{u}_0$ ביחס לטיל בקצב קבוע $\frac{dm}{dt}=-\alpha$ . מצא ביטוי למהירות הטיל. הערות :

$$\vec{u}_{rel}=-\vec{u}_0 \qquad \frac{dm}{dt}<0$$

דרך ב׳ :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{u}_0\alpha=\vec{u}_0\left(-\frac{dm}{dt}\right)$$

$$d\vec{v}=-\vec{u}_0\frac{dm}{m}\Rightarrow\int_{v_0}^{v'}d\vec{v}=-\vec{u}_0\int\frac{dm}{m}$$

$$\vec{v}-\vec{v}_0=-\vec{u}_0(\ln m(t)-\ln m_0)=\vec{u}_0\ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\right)$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{u}_0\ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\right)$$

דרך א׳ :

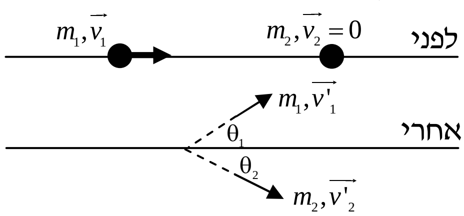
$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_{t=0}^{t=t'}\left(\frac{\alpha\vec{u}_0}{m_0-\alpha t}\right)dt=\vec{v}_0+\int_{t=0}^{t=t'}\left(\frac{\vec{u}_0\overbrace{\frac{\alpha}{m_0}dt}^{dw}}{\underbrace{1-\frac{\alpha}{m_0}t}_{w}}\right)=\vec{v}_0+\int_{w=1}^{w=1-\alpha t/m_0}\left(\frac{-\vec{u}_0dw}{w}\right)=\vec{v}_0-\vec{u}_0\ln w\Big|_{w=1}^{w=1-\alpha t/m_0}$$

$$=\vec{v}_0-\vec{u}_0\ln\left(1-\frac{\alpha t}{m_0}\right)=\vec{v}_0+\vec{u}_0\ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t}\right)\Big|_{t=0}^{t=t'}=\vec{v}_0+\vec{u}_0\ln\left(\frac{m_0}{m_0-\alpha t'}\right)$$

## שאלה לדוגמא – התנגשויות וזווית פיזור

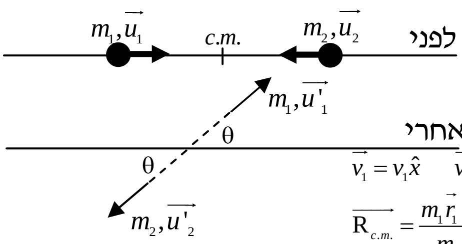
חלקיק בעל מסה $m_1$ מתנגש אלסטית בחלקיק בעל מסה $m_2$ שנמצא במנוחה. מצאו את זווית הסטייה המקסימלית של $m_1$ במקרים הבאים: $m_1 > m_2$ , $m_1 < m_2$ , $m_1 = m_2$

**במערכת המעבדה**




$$\tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \tfrac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \tfrac{1}{2} m_2 v'^2_2$$
$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos\theta_1 + m_2 v'_2 \cos\theta_2$$
$$0 = m_1 v'_1 \sin\theta_1 - m_2 v'_2 \sin\theta_2$$

**במערכת מרכז-המסה**




$$\vec{v}_1 = v_1 \hat{x} \qquad \vec{v}_2 = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{R}_{c.m.}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{\mathrm{V}} = \overrightarrow{\mathrm{V}_{c.m.}} = \dot{\overrightarrow{\mathrm{R}}}_{c.m.} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \mathrm{const} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \hat{x}$$

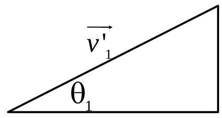
נרשום כעת את הקשר בין המהירויות במעבדה לבין המהירויות במערכת מרכז המסה בעזרת טרנספורמציית גליליי:

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{\mathrm{V}} \qquad ; \qquad \vec{v'}_1 = \vec{u'}_1 + \vec{\mathrm{V}}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 + \vec{\mathrm{V}} \qquad\qquad \vec{v'}_2 = \vec{u'}_2 + \vec{\mathrm{V}}$$

מתוך חוק שימור התנע: $\left.\begin{matrix} m_1 u_1 - m_2 u_2 = 0 \\ m_1 u'_1 - m_2 u'_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ ומתוך חוק שימור האנרגיה: $\tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = \tfrac{1}{2} m_1 u'^2_1 + \tfrac{1}{2} m_2 u'^2_2$

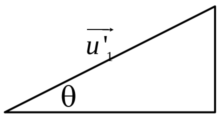
ומפתרון המשוואות הנ"ל נקבל: $u_1 = u'_1 \; ; \; u_2 = u'_2$

**במערכת המעבדה**




$$\overrightarrow{v'_{1,y}} = \overrightarrow{u'_{1,y}}$$
$$\overrightarrow{v'_{1,x}} = \overrightarrow{u'_{1,x}} + \vec{\mathrm{V}}$$

**במערכת מרכז-המסה**




$$\overrightarrow{u'_{1,y}} = u'_1 \sin\theta$$
$$\overrightarrow{u'_{1,x}} = u'_1 \cos\theta$$

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{v'_1 \sin\theta_1}{v'_1 \cos\theta_1} = \frac{u'_1 \sin\theta}{u'_1 \cos\theta + \mathrm{V}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \frac{\mathrm{V}}{u_1}}$$
$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{u}_1 + \vec{\mathrm{V}})$$
$$\vec{\mathrm{V}} = \frac{m_1}{m_2} \vec{u}_1 \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

ניתן לגזור ולפתור...

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 = m_2 &\Rightarrow 0 \le \theta_1 \le \pi/2 \\ m_1 < m_2 &\Rightarrow 0 \le \theta_1 < \pi \\ m_1 > m_2 &\Rightarrow 0 \le \theta_1 < \pi/2 \end{aligned}}$$

## דוגמאות פתורות – מסה משתנה

(1) קרונית נעה בקו ישר על מסילה ישרה אופקית באמצעות הנעה רקטית. הרקטה פולטת גזים בקצב קבוע, $\dot{m} = -\lambda$, ומהירות הגזים ביחס לקרונית היא $u$ (קבועה). כוח החיכוך הפועל על העגלה מתכונתי למהירותה, $v(t)$ , ביחס למסילה: $F = -\alpha v$ . ברגע הפעלת הרקטה הקרונית במנוחה ומסתה הכוללת היא $m_0$ .

(א) מהי המירות המכסימלית שיכולה הקרונית לפתח (אם קיימת)?

(ב) מצא את המהירות והמרחק שעברה הקרונית כתלות בזמן.

משוואת התנועה: $m(t) = m_0 - \lambda t \quad ; \quad m(t)\dot{v}(t) = -\alpha v(t) + \lambda u$

קל לראות כי המהירות הולכת וגדלה בתאוצה שהולכת וקטנה עד שתתאפס. כלומר עד אשר $\dot{v} = 0$ במהירות $v_f = \lambda u / \alpha$ . במצב זה תישאר המהירות קבועה וזו המהירות המירבית של הקרונית.

על-מנת למצוא ביטויים למהירות ולמקום כפונקציה של הזמן יש לבצע אינטגרציות (שים לב כי המהירות תמיד תשאף למהירות המקסימלית ולא תגיע אליה):

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_f - v} = \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^t \frac{dt}{(m_0/\lambda) - t} \iff v(t) = v_f \left[ 1 - \left( \frac{m(t)}{m_0} \right)^{u/v_f} \right]$$
$$x(t) = \frac{\lambda u t - m(t) v(t)}{\alpha + \lambda}$$

**הערה בנוגע לשאלה על זווית הפיזור (פתרון מהבוחן):**

גוף A בעל מסה $m_A$ מתנגש בגוף B. הגוף B נמצא במנוחה לפני ההתנגשות ומסתו היא $m_B$ . לאחר ההתנגשות נפרדים הגופים זה מזה. נמסן את הזווית בין כיווני התנועה של הגופים לאחר ההתנגשות ב"טיטא". הניחו כי <u>אין</u> שימור אנרגיה (קינטית). אזי:

אם $m_B < m_A$ אז בהכרח הזווית קטנה מ-90 מעלות.

אם $m_B > m_A$ אז הזווית עשויה להיות בת 90 מעלות.

הסבר:

משימור התנע הקווי: $\vec{\mathrm{P}}_A = \vec{\mathrm{P}'}_A + \vec{\mathrm{P}'}_B$ מתקבל:

$$\mathrm{P}_A^2 = \mathrm{P}'^2_A + \mathrm{P}'^2_B - 2\mathrm{P}'^2_A \mathrm{P}'^2_B \cos\theta \; ;$$
$$\Delta E = \frac{\mathrm{P}_A^2}{2m_A} - \left( \frac{\mathrm{P}'^2_A}{2m_A} + \frac{\mathrm{P}'^2_B}{2m_B} \right) > 0$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{P}'^2_A \mathrm{P}'^2_B \cos\theta}{m_A} = \frac{\mathrm{P}_A^2}{2m_A} - \frac{\mathrm{P}'^2_A}{2m_A} - \frac{\mathrm{P}'^2_B}{2m_A} + \left( \frac{\mathrm{P}'^2_B}{2m_B} - \frac{\mathrm{P}'^2_B}{2m_B} \right)$$
$$\Leftrightarrow \Delta E + \mathrm{P}'^2_B \left( \frac{1}{2m_B} - \frac{1}{2m_A} \right)$$

(2) מכונית כיבוי הנוסעת במהירות התחלתית V מכבה שדה בוער ע״י התזת סילון מים בכיוון נסיעתה, בקצב של $\lambda$ יחידות מסה לשנייה. מסת המכונית והמים בתחילת הנסיעה היא M . סילון המים מותז תמיד במהירות $u$ ביחס למכונית. מצא את משוואת התנועה.

$$m(t) = M - \lambda t \;\Leftrightarrow\; \frac{dm}{dt} = -\lambda$$

$$\vec{P}_{tot.} = MV$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 = m(t)\cdot\dot{v}(t) + \dot{m}(t)\cdot v(t) - \dot{m}(t)\cdot[u + v(t)]$$

$$m(t)\cdot a(t) - \lambda v(t) + \lambda[u + v(t)] = 0$$

$$a(t) = \frac{-\lambda u}{m(t)} = \frac{-\lambda u}{M - \lambda t}$$

כעת סילון המים מועף קדימה במהירות 2V ביחס לצופה חיצוני. מה תהיה מסת המכונית כאשר תגיע למהירות אפס?

$$MV = (M - m_f)2V$$

$$m_f = \frac{M}{2}$$

## (7) תנע זוויתי ומכניקה של גוף צפיד

| *Linear* | *Angular* |
|---|---|
| $\vec{r}$ | $\vec{\theta}$ |
| $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ | $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \dot{\vec{\theta}}$ |
| $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\vec{r}}$ | $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\vec{\theta}}$ |

$$\vec{v} = \int \vec{a}dt + c \qquad \vec{\omega} = \int \vec{\alpha}dt + c$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\alpha}t$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}dt + c \qquad \vec{\theta} = \int \vec{\omega}dt + c$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \vec{\theta} = \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{\alpha}t^2$$

$$\vec{r} = \frac{\vec{v}_0 + \vec{v}}{2}\cdot t \qquad \vec{\theta} = \frac{\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}}{2}\cdot t$$

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_0^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{r} \qquad \vec{\omega}^2 = \vec{\omega}_0^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\theta}$$

$$S_{ת} = \theta\cdot r \qquad v_{משיק} = \omega r \qquad a_T = \alpha r$$

### הגדרות בסיסיות:

$$\vec{J} = \vec{r}\times\vec{P} = \vec{r}\times m\vec{v}$$

$$\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F} = \frac{d\vec{J}}{dt}$$

בהיעדר מומנטים חיצוניים התנע הזוויתי הכללי נשמר (בצורה וקטורית). $\frac{d\vec{J}}{dt} = 0$
תנועה בשדה מרכזי שומרת על ת״ז.

$$\vec{J} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{N} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext.}$$

$$I = \sum m_i \vec{r}_i^{\,2}$$

$$I = I_{c.m.} + m\ell^2$$

$$\vec{J} = I\vec{\omega} \quad ; \quad \vec{N} = I\vec{\alpha}$$

$$E_k = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$\vec{r}\times\vec{\omega} = \vec{v}$$

$$\vec{J}_{tot.} = \vec{J}_{c.m.} + \vec{R}_{c.m.}\times\vec{P}_{c.m.} = \vec{J}_{c.m.} + \vec{R}_{c.m.}\times M\vec{V}_{c.m.}$$

$$\vec{N}_{tot.} = \vec{N}_{c.m.} + \vec{R}_{c.m.}\times\vec{F}_{c.m.}$$

חשוב לשים לב שהתנועה יכולה להיות מורכבת וכן גם האנרגיה מביטויים של: $\tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv^2$

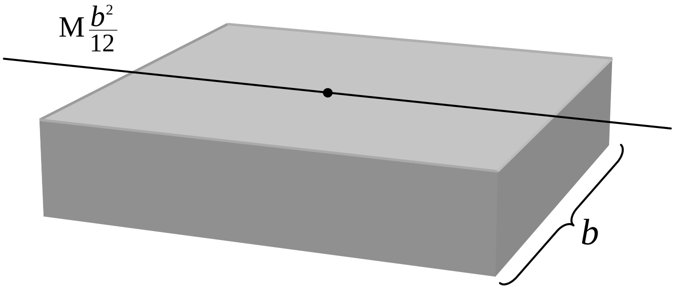
### מומנטי התמדה בסיסיים (דרך ציר המאונך למישור הגוף ועובר דרך מרכז המסה):

טבעת דקה: $M\cdot r^2$ דיסקה עגולה מלאה: $\frac{1}{2}M\cdot r^2$ מעטפת גלילית: $M\cdot r^2$ גליל מלא: $\frac{1}{2}M\cdot r^2$ מעטפת כדורית: $\frac{2}{3}M\cdot r^2$

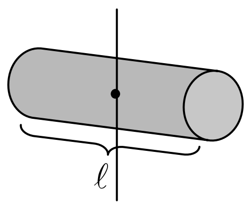
כדור מלא: $\frac{2}{5}M\cdot r^2$ מוט דק: $\frac{1}{12}M\cdot\ell^2$ לוח מלבני (או תיבה שבסיסה) $a\times b$ : $M\cdot\frac{a^2+b^2}{12}$

### מומנטים מיוחדים (+ציורים):

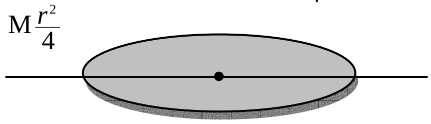
$M\frac{b^2}{12}$



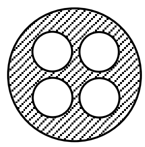

$M\left(\frac{r^2}{4}+\frac{\ell^2}{12}\right)$




$M\frac{r^2}{4}$



### דוגמא פתורה לחישוב מומנט התמד מסובך:



נתונים (ביחס לחתך).
מסת הגליל M אחרי החירור.
הרדיוס שלו הוא $a$ . רדיוס כל אחד מן הגלילים הקטנים הוא $a/3$ וציר הסימטריה של כל אחד מרוחק ב- $a/2$ מציר הסימטריה של הגליל.

$m - \textit{mass of small cylinder}$

$$I_{cm(small)} = \tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{a}{3}\right)^2$$

$$I_{small(cm-big)} = \tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{a}{3}\right)^2 + m\left(\tfrac{a}{2}\right)^2$$

$M + 4m - \textit{mass of big original cylinder}$

$$\frac{m}{M+4m} = \frac{V_{small}}{V_{big}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow M = 5m$$

$$I_{cm(big)} = \tfrac{1}{2}(M+4m)a^2$$

$$\Rightarrow I = \tfrac{1}{2}(M+4m)a^2 - 4\left[\tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{a}{3}\right)^2 + m\left(\tfrac{a}{2}\right)^2\right] \;;\; M = 5m$$

$$\Rightarrow I = 3\tfrac{5}{18}ma^2$$

$$\Rightarrow I = 3\tfrac{5}{18}ma^2 = \tfrac{59}{90}Ma^2$$

## שאלות פתורות לדוגמא

(1) אסטרואיד שמסתו $m$ נע באיזור בו פועל כוח הכובד של כדה״א. כאשר הוא עובר מעל קו המשווה (נקודה A) מרחקו ממרכז כדה״א הוא $4R_e$ ומהירותו מכוונת צפונה. כאשר הוא חולף מעל הקוטב הצפוני (נקודה B) מרחקו ממרכז כדה״א הוא $12R_e$ ומהירותו היא בכוון 30 מעלות מהצפון.

(א) כתוב את חוקי השימור המתאימים לתנועת האסטרואיד (בנקודה כלשהי במסלול).

(ב) חשבו את גודל המהירויות ב-A וב-B.

(ג) מהו המרחק המינימלי של האסטרואיד מפני כדה״א?

(ד) האם האסטרואיד יצליח לחזור פעם שנייה ל-A?

(א) שימור אנרגיה: $E_A = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{4R_e} = E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$

שימור תנע זוויתי: $\vec{J}_A = 4R_e m\vec{v}_1\hat{z} = \vec{J}_P = \vec{r}\times m\vec{v}$

(ב) מתוך התנע הזוויתי מוצאים את הקשר בין המהירויות וע״י הצבה במשוואת האנרגיה מתקבלים הערכים: $\vec{v}_1 = \sqrt{\frac{3GM}{5R_e}}$ $\vec{v}_2 = \sqrt{\frac{4GM}{15R_e}}$

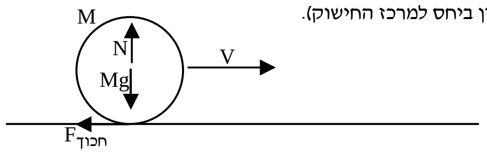
(ג)
$$\vec{J} = mrv = mr\omega r = mr^2\dot{\theta}$$
$$(*)\ \dot{\theta} = \frac{\vec{J}}{mr^2}$$
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$
$$v = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r} = (+*) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$
$$A = \begin{cases} E_A = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{4R_e} = \\ E_A = \frac{GMm}{20R_e} \\ \vec{J}_A = 4mR_e v_1 = m\sqrt{\frac{48GMR_e}{5}} \end{cases}$$

במרחק מינימלי נדרש: $\dot{r} = 0$ ולכן: $E = \frac{J^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$

ומתוך שימור האנרגיה:
$$\frac{GMm}{20R_e} = \left(m\sqrt{\frac{48GMR_e}{5}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$
$$\Rightarrow r_{\min} = 4R_e$$

(ד) לא. בגלל שיש לו אנרגיה גדולה מאפס.

(2) חישוק בעל רדיוס R ומסה M נזרק על מישור אופקי במהירות אופקית $V_0$ וללא מהירות זוויתית. בגלל חיכוך בין החישוק למשטח, מאיט החישוק ועובר ממצב של החלקה ללא גלגול, תחילה לגלגול תוך החלקה, ולבסוף לגלגול ללא החלקה. נתון מקדם חיכוך. מהי מהירות מרכז המסה של החישוק כאשר הגיע לגלגול טהור ואיזו דרך עבר? (פתרון ביחס למרכז החישוק).




מומנט כל הכוחות ביחס למרכז הוא אפס מלבד מומנט כוח החיכוך:
$$N_f = \mu MgR = I\dot{\omega}\ ;\ I = MR^2$$
$$\dot{\omega} = \frac{\mu g}{R} \Rightarrow \omega(t) = \int\dot{\omega}dt = \frac{\mu g}{R}t$$

מהירות מרכז המסה (גלגול + החלקה):
$$-\mu Mg = M\dot{v} \Leftrightarrow \dot{v} = -\mu g$$
$$v(t) = \int\dot{v}dt = V_0 - \mu gt$$

הגלגול יחל כאשר: $v(t) = \omega(t)\cdot R$
$$V_0 - \mu gt = \mu gt$$
$$t_f = \frac{V_0}{2\mu g}$$
$$v_f = \frac{1}{2}V_0$$
$$\Delta x = \int_0^{t_f} v(t)dt = \frac{3}{8}\frac{V_0^2}{\mu g}$$

תאוצתו הקווית של גוף קשיח המתגלגל במורד מישור משופע: $a = \dfrac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{MR^2}}$

מהירותו של אותו הגוף עם סיום התגלגלותו במישור המשופע והמשך תנועתו במישור אופקי: $V_{c.m.} = \sqrt{\dfrac{2gh}{1+\frac{I}{MR^2}}}$

### (8) תנועה הרמונית

$$m\ddot{x} = -kx$$
$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\dot{x}(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\ ;\ \omega_{\text{מטוטלת}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

**אוסילטור הרמוני מרוסן:**
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x} + kx = 0$$
$$\ddot{x}(t) + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}\ ;\ \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$
$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\beta = \frac{1}{2\tau}\ ;\ \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

יש פתרון רק אם...
$$\omega \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \tau > \frac{1}{2\omega_0}$$

**תנועה מאולצת ומרוסנת:**
$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x} + kx = F\sin(\omega t)$$

**פתרון כללי למשוואת התנועה בלי ה-Fsin...:**
$$x(t) = e^{\frac{-bt}{2m(eff)}}\left[B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)\right]$$
$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m_{eff}} - \frac{b^2}{2m_{eff}^2}}$$

$$a_{\max} = \pm\omega^2\cdot A \quad v_{\max} = \pm\omega\cdot A \quad v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

## (10) תורת היחסות הפרטית

**מהירות האור בריק:**

$c=3\times10^{10}[cm/\sec]=3\times10^{8}[m/\sec]=3\times10^{5}[km/\sec]$

$c=3\times10^{10}[cm/\sec]=180\times10^{10}[cm/\min]=10{,}800\times10^{10}[cm/\text{hour}]$

$c=3\times10^{8}[m/\sec]=180\times10^{8}[m/\min]=10{,}800\times10^{8}[m/\text{hour}]$

$c=3\times10^{5}[km/\sec]=180\times10^{5}[km/\min]=10{,}800\times10^{5}[km/\text{hour}]$

**סימונים מקובלים:**

$$\beta=\frac{V}{c}$$

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

**טרנספורמציית לורנץ (עבור מערכת S' הנעה ביחס למערכת S במהירות V בכוון X):**

| מעבר ממערכת S' (ידוע) למערכת S (לא ידוע) – יחסותי | קלסי | מעבר ממערכת S (ידוע) למערכת S' (לא ידוע) – יחסותי | קלסי |
|---|---|---|---|
| $x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$ | $x=x'+vt'$ | $x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$ | $x'=x-vt$ |
| $y=y'$ | $y=y'$ | $y'=y$ | $y'=y$ |
| $z=z'$ | $z=z'$ | $z'=z$ | $z'=z$ |
| $t=\frac{t'+x'\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$ | $t=t'$ | $t'=\frac{t-x\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-(V/c)^2}}$ | $t'=t$ |
| $v_x=\frac{v'_x+V}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}$ | $v_x=v'_x+V$ | $v'_x=\frac{v_x-V}{1-\frac{v_xV}{c^2}}$ | $v'_x=v_x-V$ |
| $v_y=\frac{v'_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}$ | $v_y=v'_y$ | $v'_y=\frac{v_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{v_xV}{c^2}}$ | $v'_y=v_y$ |
| $v_z=\frac{v'_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v'_xV}{c^2}}$ | $v_z=v'_z$ | $v'_z=\frac{v_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{v_xV}{c^2}}$ | $v'_z=v_z$ |

**מוטות נעים נראים מקוצרים:**

המוט שאורכו העצמי $l_0$ נע במהירות יחסותית ואנו מודדים את אורכו מן המערכת שבמנוחה:

$$L=\ell_0\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

**התרחבות הזמן:**

במערכת S' נמדד זמן מסוים בין שני מאורעות באותה נקודה:

$$\left.\begin{matrix} t'_1 & x_1=0 \\ t'_2 & x_2=0 \end{matrix}\right\} t'_2-t'_1=\Delta\tau$$

אותו זמן שיימדד במערכת S יהיה:

$$\Delta t=t_2-t_1=\Delta\tau\cdot\gamma$$

(*) מירווח הזמן בין שני מאורעות מנקודת מבט של...
(**) איפיון שני המאורעות

| (**) / (*) | בו-מקומיים ב-S | בו-מקומיים ב-S' | בו-זמניים ב-S | בו-זמניים ב-S' |
|---|---|---|---|---|
| צופה במנוחה ב-S | $\Delta t=\tau$, $\Delta x=0$ | $\Delta t=\gamma\tau$, $\Delta x=\beta c\gamma\tau$ | $\Delta t=0$, $\Delta x=\ell_0$ | $\Delta t=\frac{\beta\gamma}{c}\ell_0$, $\Delta x=\gamma\ell_0$ |
| צופה במנוחה ב-S' | $\Delta t'=\gamma\tau$, $\Delta x'=\gamma\beta c\tau$ | $\Delta t'=\tau$, $\Delta x'=0$ | $\Delta t'=\frac{\beta\gamma}{c}\ell_0$, $\Delta x'=\gamma\ell_0$ | $\Delta t'=0$, $\Delta x'=\ell_0$ |

**דינמיקה יחסותית**

$m(v)=\gamma m_0=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$

$\vec{P}\triangleq m(v)\cdot\vec{v}$

$E_0=m_0c^2$

$(W=)E_k=m(v)c^2-m_0c^2$

$E_{tot}=\gamma mc^2=E_0+E_k$

$E^2-c^2P^2=m_0^2c^4$

$c^2(P_1^2-P_2^2)=E_1^2-E_2^2$

$\vec{P}=\frac{E\vec{V}}{c^2}$

**אפקט דופלר:**

מתרחקים: $f=f'\sqrt{\frac{c-V}{c+V}}$ (אורכי) ; $f=\frac{1}{\gamma}f'$ (רוחבי)

מתקרבים: $f=f'\sqrt{\frac{c+V}{c-V}}$ (אורכי) ; $f=\frac{1}{\gamma}f'$ (רוחבי)

טרנספורמציית לורנץ לתנע ואנרגיה

| מעבר ממערכת S’ (ידוע) למערכת S (לא ידוע) | מעבר ממערכת S (ידוע) למערכת S’ (לא ידוע) |
|---|---|
| $\mathrm{P}_x=\dfrac{\mathrm{P'}_x+\frac{\mathrm{E'V}}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\mathrm{V}/c\right)^2}}$ | $\mathrm{P'}_x=\dfrac{\mathrm{P}_x-\frac{\mathrm{EV}}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\mathrm{V}/c\right)^2}}$ |
| $\mathrm{P}_y=\mathrm{P'}_y$ | $\mathrm{P'}_y=\mathrm{P}_y$ |
| $\mathrm{P}_z=\mathrm{P'}_z$ | $\mathrm{P'}_z=\mathrm{P}_z$ |
| $\mathrm{E}=\dfrac{\mathrm{E'}_x+\mathrm{VP'}_x}{\sqrt{1-\left(\mathrm{V}/c\right)^2}}$ | $\mathrm{E'}=\dfrac{\mathrm{E}_x-\mathrm{VP}_x}{\sqrt{1-\left(\mathrm{V}/c\right)^2}}$ |

פוטונים :

$$\mathrm{E}_{\mathrm{Ph}}=h\cdot f=h\cdot\upsilon$$

$$h=6.6\times10^{-27}[erg\cdot\sec]$$

$$\vec{\mathrm{P}}_{\mathrm{Ph}}=\frac{\mathrm{E}_{\mathrm{Ph}}}{c}=\frac{h\cdot f}{c}$$

הגדרת מהירות מרכז המסה :

$$\vec{\mathrm{V}}_{c.m.}=\frac{\sum\vec{\mathrm{P}}_i}{\sum\mathrm{E}_i}\cdot c^2$$

<u>הערה :</u> בהתנגשויות בין שני חלקיקים במהירויות יחסותיות פועלים תמיד חוק שימור התנע הקווי וחוק שימור האנרגיה!!!
כמו כן – בהתנגשויות "אי-אלסטיות" מתפרקים החלקיקים המקוריים ונוצרים חלקיקים חדשים בעלי תכונות (מסות למשל) שונות.

## (11) הערות ודוגמאות אחרונות

פיתוח טור טיילור, דוגמא :
בהינתן פוטנציאל $\mathrm{U}(r)$ ומבקשים למצוא את זמן המחזור / תדירות התנודות סביב נקודת שיווי-המשקל יש לפתח לטור טיילור לפי הנוסחא הבאה. לרוב הביטוי בו אנחנו מתעניינים מצוי בנגזרת השנייה. יש לקחת אותה כביטוי לאנרגיה "הרמונית" ולחלץ ממנה את הקבוע, ולמצוא את התדירות. ראה פתרון :

$$U(r)=2U_0\left[0.5(a/r)^2-(a/r)\right]$$

$$-\vec{\nabla}U=0\;\Leftrightarrow\;r=a$$

$$U(r)=\underbrace{U(a)}_{\text{Const}}+\underbrace{\frac{dU}{dr}(a)\cdot(r-a)}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2U}{dr^2}(a)\cdot(r-a)^2}_{\text{IMPORTANT!}}+\cdots$$

$$\frac{d^2U}{dr^2}(a)=\frac{2U_0}{a^2}$$

$$(r-a)\triangleq\psi$$

$$U(\psi)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2U_0}{a^2}\cdot\psi^2\;\Rightarrow\mathrm{K}=\frac{2U_0}{a^2}$$

## (12) כוחות מדומים במערכת מסתובבת

רכיבי וקטור המיקום :

$$x_{\mathrm{I}}=x_{\mathrm{R}}\cos\omega t-y_{\mathrm{R}}\sin\omega t$$
$$y_{\mathrm{I}}=x_{\mathrm{R}}\sin\omega t+y_{\mathrm{R}}\cos\omega t$$
$$z_{\mathrm{I}}=z_{\mathrm{R}}$$

רכיבי וקטורי המהירויות :

$$\mathrm{V}_{x-\mathrm{I}}=\dot{x}_{\mathrm{I}}=(\dot{x}_{\mathrm{R}}\cos\omega t-\dot{y}_{\mathrm{R}}\sin\omega t)-\omega(x_{\mathrm{R}}\sin\omega t+y_{\mathrm{R}}\cos\omega t)$$
$$\mathrm{V}_{y-\mathrm{I}}=\dot{y}_{\mathrm{I}}=(\dot{x}_{\mathrm{R}}\sin\omega t+\dot{y}_{\mathrm{R}}\cos\omega t)+\omega(x_{\mathrm{R}}\cos\omega t-y_{\mathrm{R}}\sin\omega t)$$
$$\mathrm{V}_{z-\mathrm{I}}=\dot{z}_{\mathrm{I}}=\dot{z}_{\mathrm{R}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{I}}}=\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{R}}}+\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{R}}}$$

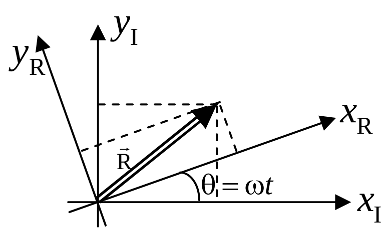
רכיבי וקטור התאוצה :

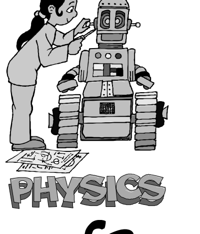
$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_{\mathrm{I}}&=(\ddot{x}_{\mathrm{R}}\cos\omega t-\ddot{y}_{\mathrm{R}}\sin\omega t)-2\omega(\dot{x}_{\mathrm{R}}\sin\omega t+\dot{y}_{\mathrm{R}}\cos\omega t)-\omega^2(x_{\mathrm{R}}\cos\omega t-y_{\mathrm{R}}\sin\omega t)\\\ddot{y}_{\mathrm{I}}&=(\ddot{x}_{\mathrm{R}}\sin\omega t+\ddot{y}_{\mathrm{R}}\cos\omega t)+2\omega(\dot{x}_{\mathrm{R}}\cos\omega t-\dot{y}_{\mathrm{R}}\sin\omega t)-\omega^2(x_{\mathrm{R}}\sin\omega t+y_{\mathrm{R}}\cos\omega t)\end{aligned}\right\}\vec{a}_{\mathrm{I}}=\vec{a}_{\mathrm{R}}+2\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{V}}_{\mathrm{R}}+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{R}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{R}}}=m\vec{a}_{\mathrm{R}}=m\vec{a}_{\mathrm{I}}-2m\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{V}_{\mathrm{R}}}-\vec{\omega}m\times(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{R}})\;\Rightarrow\;\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{R}}}=\vec{\mathrm{F}}+\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Coriolis}}+\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Centrefuga}}$$

כוח צנטריפטלי וכוח קוריוליס :

$$\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Cor.}}=-2m\vec{\omega}\times\overrightarrow{\mathrm{V}_0}\qquad\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{Cent.}}=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{R}})=-m\omega^2\mathrm{R}\hat{\mathrm{R}}$$




בהצלחה!