וקטורים

מכ' סקלרית: $\vec{A}\bullet\vec{B} \equiv A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha$

היטל וקטור A על B: $A_b = (\vec{A}\bullet\hat{B})\hat{B} = \left(\vec{A}\bullet\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}\right)\hat{B} = (|\vec{A}||\hat{B}|\cos\alpha)\hat{B} = (|\vec{A}|\cos\alpha)\hat{B}$

מכ' וקטורית: $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{pmatrix}$

$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$

$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z}$

קבועים

$c = 3\bullet10^8 \frac{m}{\sec} = 3\bullet10^{10}\frac{cm}{\sec}$

$\omega_{earth} = \frac{2\pi}{24\cdot60\cdot60} \cong 7.2722\cdot10^{-5}\frac{rad}{\sec}$

חיבור קפיצים במקביל: $k_{eff} = \sum k_i$

חיבור קפיצים בטור: $\frac{1}{k_{eff}} = \frac{1}{\sum k_i}$

מסה שקולה של שתי מסות מחוברות לקפיץ: $\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

משוואות שימושיות:

מתקף: $\int Fdt = \frac{\Delta P}{\Delta t}$

כוח כשינוי תנע/מהירות: $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$

קצב איבוד/ספיחת מסה: (צפיפותXשטח פניםXמהירות) $Q = \rho Av\left[\frac{kg}{\sec}\right]$

המרה לפולאריות

$\hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$

$\hat{r} = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$

$\vec{r}(t) = r\hat{r}$

$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$

מד"ר

$\dot{u}_{(t)} + \beta u_{(t)} = 0 \Rightarrow u_{(t)} = Ae^{-\beta t}$

$\dot{u}_{(t)} + \beta u_{(t)} = \alpha \Rightarrow u_{(t)} = \frac{\alpha}{\beta} + Ae^{-\beta t}$

A נקבע ע"י תנאי התחלה $u_{(t=0)}=A$

תנועה בתאוצה קבועה(!)

$v = v_0 + at$

$v_{(t)} = v_0^2 + 2ax_{(t)}$

$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$

$x = x_0 + \frac{v_0 + v_t}{2}t$

תאוצה של גוף על משטח משופע לא חלק: $a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

גובה במסלול בליסטי (פונ' של מיקום אופקי): $y(x) = xtg\theta - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} = xtg\theta - x^2\frac{g(1+tg^2\theta)}{2v_0^2}$

העתק מ"מ בזריקה בליסטית: $x_{cm_{max}} = \frac{v_0^2\sin2\theta}{g}$

זריקה בליסטית מגובה h הנותנת מרחק מקס': $tg\theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$

$x_{max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$

מערכת מרכז מסה

מיקום מ"מ: $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}$

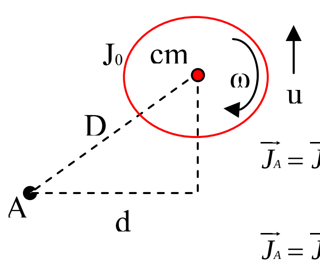
מהירות מ"מ: $\vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{P}_{cm}}{\sum m_i}$

תאוצת מ"מ: $\vec{a}_{cm} = \frac{\sum\vec{F}_{ext}}{\sum m_i}$

משפט שטיינר (מומנט סביב ציר המרוחק D ממ"מ): $I_A = I_{cm} + D^2\sum m_i$

תנע זויתי במע' יחוס השונה ממ"מ: $\vec{J}_A = \vec{J}_{cm} + \vec{D}X\vec{P}_{cm} = \vec{J}_{cm} + \vec{D}X(\sum m_i\vec{v}_i)$

דוגמא: דיסקה מסתובבת:
אם יש תנועה קוית u
(d הוא מרחק ראשית
הצירה A מקום התנועה):



$\vec{J}_A = \vec{J}_{cm} + \vec{D}X\vec{P} = (I_{cm}\omega + mud)\hat{z}$

אם אין תנועה קווית (אין u)
התנע הזוויתי זהה
בכל הצירים המקבילים: $\vec{J}_A = \vec{J}_0$

*(התנע הכללי במע' מ"מ הוא 0. התנע של מ"מ P_{cm} יכול להיות שונה מ-0)
*(האנרגיה הקינטית של גופים במערכת מ"מ היא המינימלית מבין האנרגיות שלהם במע' אינרציאליות שונות)
*(האנרגיה הקינטית המקס' שניתן לנצל היא האנ' הקינטית של מ"מ)
*תנועות של גוף קשיח מורכבת מתנועה קווית של מ"מ ותנועה סיבובית סביב מ"מ
*אם יש שימור תנע, אזי מ"מ לא משנה כיוון ומהירות.
*במע' מ"מ הכוחות הפנימיים מבטלים זה את זה (למשל בפיצוץ של מסה, או כשיש קפיץ בין גופים, אבל לא מחובר אליהם)

תנועה מעגלית/מערכות מסתובבות

במע' חיצונית אינ':

מהירות זוויתית (R רדיוס התנועה): $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}\left[\frac{rad}{\sec}\right]$

מהירות משיקית
(גם תנאי לגלגול ללא החלקה): $v = \omega R\left[\frac{m}{\sec}\right]$

תאוצה מעגלית (a_T תאוצה משיקית): $\alpha = \frac{a_T}{R}\left[\frac{rad}{\sec^2}\right]$

תאוצה מרכזית (v מהירות משיקית): $a_o = \frac{v^2}{R}$

*אפשר להציב את הגדלים α=a,ω=v,θ=x במשוואות התנועה בתאוצה קבועה במקום a,v,x

מומנט סיבובי: $N = \vec{F}X\vec{R} = \frac{dJ}{dt} = I_o\frac{\vec{a}_T}{R} = I_o\alpha$

מומנט התמדה (אינרציה): $I = \frac{N}{\alpha} = \frac{RF}{\frac{a_T}{R}} = \frac{F}{a_T}R^2 = mR^2$

תנ"ז של גוף סביב ציר: $J = \vec{R}X\vec{P} = I\omega = mR^2\omega = m\vec{v}\vec{R}$

תנ"ז כולל=תנ"ז של מ"מ(J_{cm})+תנ"ז ב-מ"מ(J'): $J_{tot} = J_{cm} + J'$

מומנט אינרציה (I_{cm} שלהם) של:

מוט אחיד סביב מרכזו: $I_o = \frac{1}{12}ml^2$

מוט אחיד סביב קצהו: $I_A = \frac{1}{3}ml^2$

טבעת דקה/מעטפת גלילית סביב מרכזה: $I_o = mR^2$

דיסקה מלאה/גליל מלא סביב מרכז: $I_o = \frac{1}{2}mR^2$

מעטפת כדורית סביב מרכזה: $I_o = \frac{2}{3}mR^2$

כדור מלא סביב מרכזו: $I_o = \frac{2}{5}mR^2$

לוח/תיבה מלבניים סביב מרכז: $I_o = m\frac{a^2 + b^2}{12}$

אנ' קינטית של גוף בתנועה מעגלית: $E_k = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 = \frac{\omega^2}{2}I$

הס"כ אנ' קינטית של גוף: $E_{k,T} = E_{k,straight\_line} + E_{k,rotation}$

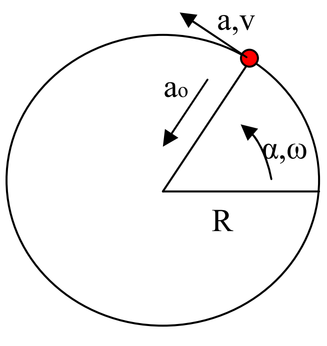
תאוצות/כוחות במע' מסתובבת:

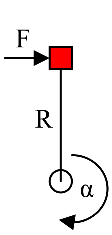
$a_r = a_i - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right) - 2\vec{\omega}\times\vec{v} + \frac{v^2}{R}\hat{r}$

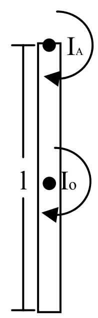
$ma_r = F_i - m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right) - 2m\vec{\omega}\times\vec{v} + \frac{mv^2}{R}\hat{r}$

צנט' קוריוליס מרכזית

*כשמתייחסים אל מע' מסתובבת כאל אינ', צריך להוסיף לכל גוף שני כוחות מדומים – צנט' וקוריוליס
*כוח אמיתי שמפעילה מע' מסתובבת הפוך לשקול הכוחות המדומים (לחשוב על מה קורה כשמאיצים או פונים במכונית-הכוח שמרגישים הפוך..)







עובדות חשובות

*התנגשות אלסטית: שימור אנ'
*התנגשות פלסטית: אין שימור אנ' (איבוד אנ' קינטית)
*אם שקול הכוחות החיצוניים במע' הוא 0 – יש שימור תנע
*אם גופים נעים סביב ציר (למשל מסמר), הציר מהווה כוח חיצוני, כלומר מגדיר מומנט. התנ"ז ישמר רק בנק' שביחס אליה סכום המומנטים מתאפס (בד"כ זהו ציר הסיבוב, אבל לא לבדוק טוב!)

תנודות הרמוניות פשוטות

תנועה שתלויה בכוחXקבוע היא תה"פ: $\vec{F}=-kx=-\nabla U$

"מהירות זוויתית": $\omega=2\pi f=\sqrt{\frac{k}{m}}$

תדירות: $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

זמן מחזור: $T=\frac{1}{f}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

מטוטלת מתמטית: $\omega=\sqrt{\frac{g_{eff}}{l}}$

מיקום ביחס לנק' שיווי-משקל: $x=A\cos(\omega t+\rho)$

מהירות: $v=\frac{dx}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\rho)=-\omega\sqrt{A^2-x^2}$

תאוצה: $a=-\omega^2 A\cos(\omega t+\rho)=-\omega^2 x=\frac{F}{m}=\frac{-\nabla U}{m}$

אנרגיה פוטנ' ביחס לנק' ש"מ: $U\equiv\int Fdx=\int_0^x kxdx=\frac{k}{2}x^2$

אנרגיה קינטית: $K\equiv\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)$

אנרגיה כוללת (נשארת קבועה): $E_{tot}=K+U=\frac{k}{2}A^2$

*בזויות מאד קטנות, sinθ=θ, cosθ=1 (עוזר להראות תנודות הרמוניות)

*להיעזר בזהות הטריג' עבור cos(α+β) או sin(α+β) למסומנים באדום.

*אפשר להחליף את ה-sin ב-cos וההיפך לפי הפאזה.

עבודה ואנרגיה

$\vec{F}=(W_F)'$

עבודה של כוח/א' קינטית:

נכון רק עבור כוח משמר

(כוח שאינו תלוי במהירות או בכיוון תנועה, רק במיקום)

$W_F=\int_A^B \vec{F}\bullet d\vec{r}=\Delta E_K=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$

עבודה של כוח חיכוך (כוח חיכוךXהעתק במישור אופקי בלבד): $W_\mu=F_\mu\cdot\Delta x$

דוגמא: כוח נתון כ:

$F=(y^2-x^2)\hat{x}-2xy\hat{y}$

מה העבודה שדרושה להעברת גוף

מ-(0,0)

ל-(2,4) במסלול y=2x?

$W_F=\int_0^2 \vec{F}_x(x,y=2x)d\hat{r}\hat{x}+\int_0^4 \vec{F}_y(x=\frac{y}{2},y)d\hat{r}\hat{y}=$

$=\int_0^2(4x^2-x^2)+\int_0^4(-2\frac{y}{2}y)=x^3|_0^2-\frac{y^3}{3}|_0^4=-\frac{40}{3}$

אנרגיה פוטנציאלית: $E_P=mgh$

זהויות טריגונומטריות

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

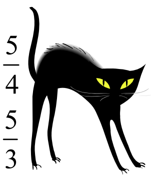
תורת היחסות

הגדרות: $\beta=\frac{u}{c}<1$

$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}>1$

$\gamma_{v=0.6c}=1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$\gamma_{v=0.8c}=1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$



מערכת 'S נעה במהירות u

על ציר x לעומת מע' S

התארכות הזמן: $t=\gamma t_0$

התקצרות האורך: $L=\frac{L_0}{\gamma}$

אפקט דופלר קלסי:
(v מהירות גל)

$T_R=\frac{v-v_E}{v-v_R}T_E$

$f_R=\frac{v-v_R}{v-v_E}f_E$

אפקט דופלר יחסותי:

$f'_x=f_x\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

$f'_y=\frac{f_y}{\gamma}$

$\Delta t'=\Delta t\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

f – תדירות גל במערכת משדרת S

'f – תדירות גל במערכת קולטת 'S

v – מהירות יחסית בין המערכות v>0 מציין התרחקות

תנע: $\vec{P}\equiv m(\gamma\vec{v})\left[\frac{MeV}{c}\right]$

אנרגיה: $E\equiv\gamma mc^2[MeV]$

אינווריאנטיות המסה: $E^2=\vec{p}^2c^2+m^2c^4$

תנע: $p=\frac{\sqrt{E^2-m^2c^4}}{c}$

אינווריאנטיות I: $I=E_{tot}{}^2-P_{tot}{}^2c^2$

עבור מע' מסות: $\left(\sum E_i\right)^2=\left(\sum\vec{P}_i\right)^2c^2+\left(\sum m_i\right)^2c^4$

אנרגית מ"מ: $E_{cm}=\left(\sum m_i\right)c^2=\sqrt{\left(\sum E_i\right)^2-\left(\sum\vec{P}_i\right)^2c^2}$

מהירות מ"מ: $\vec{v}_{cm}=\frac{\left(\sum E_i\right)}{\left(\sum\vec{P}_i\right)}c^2$

$(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-(c\Delta t)^2=(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-(c\Delta t')^2$

--- x_1-x_0 ------ - t_1-t_0 - --- x'_1-x'_0 ------ - t'_1-t'_0 -

עבור פוטון: $m=0\rightarrow E=pc$

אפקט דופלר לאנרגיה: $E'=E\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

ע"מ לקבל אנרגיה מינ'. מהירות מ"מ צריך להיות 0.

כאשר נוצר חלקיק יחיד מהתנגשות, הוא נע במהירות מ"מ

תוספות:

כוח מגנטי: $F=\frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$

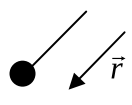
מטוטלת במערכת מאיצה (ללא g) והמסה מוסטת כך

שהיא מקבילה ל-r:

זווית ההיסט: $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{|a|\cdot|r|}$

גובה ההיסט: $h=l(1-\cos\theta)$

$\frac{1}{2}mv^2=mah\Rightarrow v=\sqrt{2ah}=\sqrt{2al(1-\cos\theta)}$



זמן	$t=\gamma\left(t'+\frac{u}{c^2}x'\right)$	$t'=\gamma\left(t-\frac{u}{c^2}x\right)$
העתק	$x=\gamma(x'+ut')$	$x'=\gamma(x-ut)$
	$z=z'$	$y=y'$
מהירות	$v_x=\frac{v_x'+u}{1+\frac{uv_x'}{c^2}}$ $v_y=\frac{v_y'}{\gamma\left(1+\frac{uv_x'}{c^2}\right)}$	$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\frac{uv_x}{c^2}}$ $v_y'=\frac{v_y}{\gamma\left(1-\frac{uv_x}{c^2}\right)}$
תנע	$P_x=\gamma\left(P_x'+\frac{u}{c^2}E'\right)$	$P_x'=\gamma\left(P_x-\frac{u}{c^2}E\right)$
	$P_z'=P_z$	$P_y'=P_y$
אנרגיה	$E=\gamma(E'+uP_x')$	$E'=\gamma(E-uP_x)$
כוח	$F_y=\frac{F_y'}{\gamma};F_z=\frac{F_z'}{\gamma}$	$F_x=F_x'$