וקטורים

מכפלה סקלרית:

$$\vec{A}\bullet\vec{B} \triangleq A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\alpha$$

היטל וקטור A על B:

$$A_B = \left(\vec{A}\cdot\hat{B}\right)\hat{B} = \left(\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|}\right)\hat{B} = \left(\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\alpha\right)\hat{B} = \left(\left|\vec{A}\right|\cos\alpha\right)\hat{B}$$

מכפלה ווקטורית:

$$\vec{A}\times\vec{B} \triangleq \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\alpha$$

נפח מקבילון: $V = \left|\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}\right|$

מכפלות ציקליות של הרכיבים הקרטזיים $\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}$:

$$\hat{x}\times\hat{y} = \hat{z} \qquad \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} \qquad \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x}$$

$$\hat{y}\times\hat{x} = -\hat{z} \qquad \hat{x}\times\hat{z} = -\hat{y} \qquad \hat{z}\times\hat{y} = -\hat{x}$$

זהויות טריגונומטריות

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\left(\alpha\pm\beta\right) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha\pm\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

תנועה מעגלית

וקטורי היחידה המעגליים, ונגזרותיהם:

$$\hat{r} \triangleq \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$$

$$\hat{\theta} \triangleq -\sin\theta\hat{x} + \cos\theta\hat{y}$$

$$\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

וקטורי התנועה המעגלית:

$$\vec{r} = r\hat{r} \qquad \vec{v} \triangleq \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} \triangleq \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

וכאשר מגדירים: $\vec{\alpha} \triangleq \left|\ddot{\theta}\right|\hat{z}$ $\qquad \vec{\omega} \triangleq \left|\dot{\theta}\right|\hat{z}$

מקבלים: $\vec{v} = v\hat{r} + \omega r\hat{\theta},\quad \vec{a} = \left(a - \omega^2 r\right)\hat{r} + \left(2\omega v + r\alpha\right)\hat{\theta}$

טרנספורמציית וקטורים בין מערכת S למערכת S' מסובבת בזווית $\theta = \omega t$:

$$x_I = x_R\cos\omega t - y_R\sin\omega t$$

$$y_I = x_R\sin\omega t + y_R\cos\omega t$$

$$v_{x_I} = \left(\dot{x}_R\cos\omega t - \dot{y}_R\sin\omega t\right) - \omega\left(x_R\sin\omega t + y_R\cos\omega t\right)$$

$$v_{y_I} = \left(\dot{x}_R\sin\omega t + \dot{y}_R\cos\omega t\right) - \omega\left(x_R\cos\omega t - y_R\sin\omega t\right)$$

$$\vec{a}_I = \vec{a}_R + 2\vec{\omega}\times\vec{v}_R + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

תנועה שוות תאוצה

משוואות שימושיות מהתיכון:

$$x = x_0 + v_0t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v_t}{2}t$$

$$v_t^2 = v_0^2 + 2a\left(x_t - x_0\right)$$

משוואת מסלול בליסטי:

$$y(x) = x\tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

גוף קשיח

מומנט אינרציה: $I = \Sigma mr^2 = \int r^2dm$

מומנט אינרציה הוא אדיטיבי.

בגלגול ללא החלקה, כוח החיכוך לא מבצע עבודה.

מכיוון שרדיוס הגוף קבוע: $a = \alpha r$.

אורך קשת: $S = \theta r$.

מומנטים מחושבים, ביחס לציר הסימטריה:

טבעת דקה; מעטפת גלילית	MR^2
דיסקה מלאה דקה; גליל מלא	$\frac{1}{2}MR^2$
מעטפת כדורית	$\frac{2}{3}MR^2$
כדור מלא	$\frac{2}{5}MR^2$
מוט דק ביחס לאמצע	$\frac{1}{12}ML^2$
מוט דק ביחס לקצה	$\frac{1}{3}ML^2$
לוח מלבני; תיבה שבסיסה מלבן	$M\dfrac{a^2+b^2}{12}$

תנודות הרמוניות

תה"פ: $\ddot{x} + \omega^2x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = A\cos(\omega t + \phi)$

רק בתה"פ: $\dfrac{t}{T} = \dfrac{\theta}{2\pi} \qquad v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$

מגדירים: $f \triangleq \dfrac{1}{T} \qquad T \triangleq \dfrac{2\pi}{\omega}$

במטוטלת מתמטית: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

n גופים עם קפיץ: $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \ldots + \dfrac{1}{m_n}$, ואז $\omega_\mu = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}}$

תנודה הרמונית מרוסנת, ריסון חלש $\omega_0 > \frac{1}{2\tau}$:

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \qquad \tau \triangleq \frac{m}{b}$$

$$x = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos\left(\omega t + \phi\right), \omega \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \left(\tfrac{1}{2\tau}\right)^2}$$

תנודה הרמונית מרוסנת ומאולצת:

$$\ddot{x} + \tfrac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2x = \tfrac{1}{m}f_0\cos(\omega t)$$

$$x = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\dfrac{2\omega}{\tau}\right)^2}}\cos\left(\omega t + \phi\right)$$

כאשר $\tan\phi = \dfrac{2\omega}{\tau\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$ - הפרש המופע בין הכוח המאלץ לתגובת המערכת.

טרנספורמציית גלילי

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{V}t$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{V}$$

כבידה

כוח כבידה עולמי:

$$\vec{F}_G = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$$

חוק קפלר:

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2$$

אנרגיה פוטנציאלית כבידתית:

$$U_G = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

משוואת התנועה

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

כשאפשר, להציב $m = \left(m_0 - \lambda t\right)$ במקום לגזור לפי הספר.

התנגשויות חד-ממדיות

התנגשות כללית:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

מקדם התקומה:

$$e = -\frac{v_1 - v_2}{u_1 - u_2}$$

בהתנגשות אלסטית $e = 1$

בהתנגשות פלסטית $e = 0$

כוחות בטבע

אמיתיים	מדומים
אלסטי: $\vec{F}_{el} = -kx\hat{x}$	ד'אלמבר: $\vec{F}^* = -ma_0$
חשמלי: $\vec{F}_E = \vec{E}q = \frac{kQq}{r^2}\hat{r}$	צנטריפוגלי: $\vec{F}_{cen} = -m\omega\times\left(\omega\times r\right)$
מגנטי: $\vec{F}_B = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B}$	קוריוליס: $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{v}$
חיכוך: סטטי משטחי: $f_{S_{\max}} = \mu N$ קינטי משטחי: $f_k = \mu N$ אוויר/תוך צמיגי: $f = -\gamma\dot{x}$	

משוואות דיפרנציאליות ופתרונן

משוואה/סט משוואות	פתרון כללי
$\dot{x} + bx = 0$	$x = Ae^{-bt}$
$\dot{x} + bx = a$	$x = \frac{a}{b} + Ae^{-bt}$
$\dot{x} + bx = at$	$x = Ae^{-bt} + \frac{a}{b}t - \frac{a}{b^2}$
$\ddot{x} - \omega^2x = 0$	$x = Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t}$
$\ddot{x} + \omega^2x = 0$	$x = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$
$\ddot{x} + \omega^2x = b$	$x = A\cos\left(\omega t + \phi\right) + \frac{b}{\omega^2}$
$\dot{x} = \omega y$ $\dot{y} = -\omega x$	$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ $y = -A\sin\omega t + B\cos\omega t$

תנע ומומנטים

שקילות	תנועה קווית	תנועה סיבובית
גורם לתנועה	כוח $\vec{F}$	מומנט $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{F}$
אנרגיה קינטית	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$
תנע	$\vec{P} = m\vec{v}$	$\vec{J} = m\vec{r}\times\vec{v} = I\vec{\omega}$
תנע נשמר כאשר	$\sum\vec{F} = 0$	$\Sigma\vec{N} = 0$
משוואת תנועה	$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$	$\Sigma\vec{N} = I\vec{\alpha}$

משפט שטיינר: $I_z = I_{cm} + Ma^2$

לצירים x, y המאונכים במישור גוף דק: $I_z = I_x + I_y$

מרכז מסה: $\vec{v}_{cm} = \frac{\Sigma m_i\vec{v}_i}{\Sigma m_i}$ $\quad \vec{r}_{cm} = \frac{\Sigma m_i\vec{r}_i}{\Sigma m_i}$

תנע ביחס לנקודה A:

$$\vec{J}_A = \vec{J}_{cm} + M\cdot\vec{R}_{A,cm}\times\vec{V}_{cm}$$

עבודה ואנרגיה

עבודה של כוח/אנרגיה קינטית: $W_F \triangleq \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2\Big|_{initial}^{final}$

משפט עבודה-אנרגיה: $E_i + \Delta W = E_f$

הספק: $P \triangleq \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

לכוח משמר: $W \triangleq \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\Delta U = U(A) - U(B)$

עבור כוחות משמרים: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}, \frac{\partial U_y}{\partial y}, \frac{\partial U_z}{\partial z}\right)$

נקודת שיווי משקל: $F = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0$

שיווי משקל יציב $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \Leftrightarrow F' = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0$

שיווי משקל רופף $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \Leftrightarrow F' = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$

שיווי משקל אדיש $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$

אנרגיה של קפיץ: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, x נמדד מנקודת הרפיון

אנרגיה של קפיץ מאונך: $U_{el} = \frac{1}{2}k\left(x'\right)^2$, x' נמדד מנש"מ

בתנודות שקורות סביב נש"מ יציב: $k = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_0) > 0$,

כאשר $F(x_0) = 0$, וכרגיל $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

אנרגיה פוטנציאלית חשמלית של מטען q באזור מטען Q:

$$U_e = k\frac{Q}{r}q$$

אנרגיה פוטנציאלית כבידתית בין שתי מסות:

$$U_G = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

אנרגיה כוללת של לווין m במסלול סגור סביב M:

$$E_{total} = -\frac{GMm}{2r}$$

אנרגיה פוטנציאלית כבידתית בסביבת כדה"א:

$$E_p = mgh$$

קבועים

$$G = 6.67\cdot 10^{-11}\left[Nm^2/kg^2\right]$$

$$k = 9\cdot 10^{9}\left[Nm^2/C^2\right]$$

$$h = 6.6\cdot 10^{-27}\left[erg\cdot \sec\right]$$

$$c = 3\cdot 10^{8}\left[m/\sec\right] = 3\cdot 10^{10}\left[cm/\sec\right]$$

$$1\overset{0}{\mathrm{A}} = 10^{-10}\left[m\right]$$

שונות

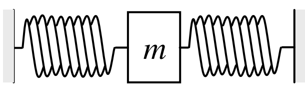
רדיוס תנועה בשדה מגנטי: $R = \frac{mvc}{qB}$

נוח להגדיר בתנועה בשדה מגנטי: $\omega_c \triangleq \frac{qb}{mc} = \frac{2\pi}{T}$

חיבור קפיצים במקביל: $k_{eff} = \sum K_i$

חיבור קפיצים בטור: $\frac{1}{k_{eff}} = \sum \frac{1}{k_i}$

זהו חיבור מקבילי דווקא:



תורת היחסות - הגדרות

$$\gamma \triangleq \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1 \qquad \beta \triangleq \frac{u}{c} < 1$$

מערכת S' נעה במהירות u יחסית למערכת S.

התארכות הזמן: $t = \gamma t'$

התקצרות האורך: $L = \frac{L_0}{\gamma}$ (L_0 אורך עצמי)

אפקט דופלר

תוצאה קלאסית: $T_R = \frac{v - v_E}{v - v_R} T_E\ ;\ \ f_R = \frac{v - v_R}{v - v_E} f_E$

תוצאה יחסותית: $f'_x = f_x\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad f'_y = \frac{f_y}{\gamma}$

f - תדירות גל במערכת משדרת S

f' - תדירות גל המערכת קולטת S'

v - מהירות יחסית בין המערכות, $v>0$ להתרחקות

טרנספורמציית לורנץ

זמן	$t = \gamma\left(t' + \frac{u}{c^2}x'\right)$	$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$
העתק	$x = \gamma\left(x' + ut'\right)$	$x' = \gamma\left(x - ut\right)$
	$y = y'$	$z = z'$
מהירות	$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{uv_x'}{c^2}}$	$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$
	$v_y = \frac{v_y'}{\gamma\left(1 + \frac{uv_x'}{c^2}\right)}$	$v_y' = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{uv_x}{c^2}\right)}$
תנע	$P_x = \gamma\left(P_x' + \frac{u}{c^2}E'\right)$	$P_x' = \gamma\left(P_x - \frac{u}{c^2}E\right)$
	$P_y' = P_y$	$P_z' = P_z$
אנרגיה	$E = \gamma\left(E' + uP_x'\right)$	$E' = \gamma\left(E - uP_x\right)$
כוח	$F_x = F_x'$; $F_y = \frac{F_y'}{\gamma}$	$F_z = \frac{F_z'}{\gamma}$

גדלים דינאמיים יחסותיים ויחידות טבעיות

תנע: $\vec{P} \triangleq m\left(\gamma\vec{v}\right)\left[\frac{MeV}{c}\right]$

אנרגיה: $E \triangleq \gamma mc^2\left[MeV\right]$

נוסחת האנרגיה (אינווריאנטיות המסה): $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$

תנע כתלות באנרגיה: $p = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{c}$

ועבור מערכת מסות:

$$\left(\Sigma E_i\right)^2 = \left(\Sigma\vec{P}_i\right)^2 c^2 + M^2c^4$$

$$M \triangleq \frac{\sqrt{\left(\Sigma E_i\right)^2 - \left(\Sigma\vec{P}_i\right)^2 c^2}}{c^2}\left[\frac{MeV}{c^2}\right]$$

אנרגית מרכז מסה: $E_{cm} = Mc^2 = \sqrt{\left(\Sigma E_i\right)^2 - \left(\Sigma\vec{P}_i\right)^2 c^2}$

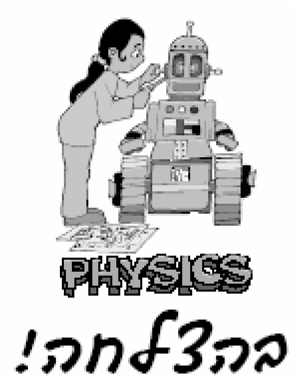
מהירות מרכז מסה: $\vec{v}_{cm} = \frac{\Sigma\vec{p}_i}{\Sigma E_i}c^2$

עבור פוטונים:

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad E = pc$$

$$c = \lambda f$$

$$E_{ph} = hf$$



(1) קרונית נעה בקו ישר על מסילה ישרה אופקית באמצעות הנעה רקטית. הרקטה פולטת גזים בקצב קבוע, $\dot{m} = -\lambda$, ומהירות הגזים ביחס לקרונית היא u (קבועה). כוח החיכוך הפועל על העגלה מתכונתי למהירותה, $v(t)$, ביחס למסילה: $F=-\alpha v$. ברגע הפעלת הרקטה הקרונית במנוחה ומסתה הכוללת היא m_0.

(א) מהי המירות המכסימלית שיכולה הקרונית לפתח (אם קיימת)!

(ב) מצא את המהירות והמרחק שעברה הקרונית כתלות בזמן.

משוואת התנועה: $m(t) = m_0 - \lambda t \quad ; \quad m(t)\dot{v}(t) = -\alpha v(t) + \lambda u$

קל לראות כי המהירות הולכת וגדלה בתאוצה שהולכת וקטנה עד שתתאפס. כלומר עד אשר $\dot{v} = 0$ במהירות $v_f = \lambda u / \alpha$. במצב זה תישאר המהירות קבועה וזו המהירות המירבית של הקרונית.

על-מנת למצוא ביטויים למהירות ולמקום כפונקציה של הזמן יש לבצע אינטגרציות (שים לב כי המהירות תמיד תשאף למהירות המקסימלית ולא תגיע אליה):

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv}{v_f - v} = \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^t \frac{dt}{(m_0/\lambda) - t} \iff v(t) = v_f \left[1 - \left(\frac{m(t)}{m_0} \right)^{u/v_f} \right]$$

$$x(t) = \frac{\lambda u t - m(t) v(t)}{\alpha + \lambda}$$