<u>מערכת בינארית</u>:

• ייצוג שרשרת בינארית של סה"כ N מגנטים.

1 2 3 … N

$\uparrow \; \downarrow \; \uparrow \; \uparrow$ כיוון הקיטוב של המגנט

$\uparrow$"up" – מומנט מגנטי $+m$; $\downarrow$"down" – מומנט מגנטי $-m$

סה"כ מס' מצבים אפשריים של המערכת: 2^N

מס' מצבים עבור $N,N_\uparrow$ נתונים: $g(N,N_\uparrow)=\binom{N}{N_\uparrow}=\frac{N!}{N_\uparrow!N_\downarrow!}$

נגדיר את מחצית ההפרש: $s\triangleq\frac{N_\uparrow-N_\downarrow}{2}$

ונקבל: $N_\uparrow=\frac{N}{2}+s \; ; \; N_\downarrow=\frac{N}{2}-s$

פונק' הריבוי: $g(N,s)=g(N,N_\uparrow)=\frac{N!}{N_\uparrow!N_\downarrow!}=\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+s\right)!\left(\frac{N}{2}-s\right)!}$

אחרי קירוב סטרלינג (עבור $N\gg1$) נקבל:

$g(N,s)=g(N,0)\exp\left(-\frac{2s^2}{N}\right)$; $g(N,0)=2^N$ (זהו סך המצבים)

צפיפות הסתברות (אחרי נרמול): $P(s)=\sqrt{\frac{2}{N\pi}}\exp\left(-\frac{2s^2}{N}\right)$

ההסתברות עצמה: $\frac{g(N,s)}{2^N}=\exp\left(-\frac{2s^2}{N}\right)$

• אנרגיה של מערכת בינארית של מגנטים (ללא אינטראקציה ביניהם):

$$U_n=-\vec{m}_n\vec{B} \Rightarrow U_{tot}=\sum_{n=1}^{N}U_n=-Bm\left(N_\uparrow-N_\downarrow\right)=-2sBm$$

בחיבור 2 מערכות עם N_1,N_2 מגנטים מתקיים:

פונקצית הריבוי הכללית: $g(N,s)=g_1(N_1,s_1)\cdot g_2(N_2,s_2)$

(g מקס' בש"מ): $0=\frac{df}{ds_1}=-\frac{4s_1}{N_1}+\frac{4(s-s_1)}{N_2} \Rightarrow \frac{s_1}{N_1}=\frac{s_2}{N_2}=\frac{s}{N}$

• ייצוג מערכת בעלת 2 רמות אנרגיה:

ε_2 ——— N_2

ε_1 ——— N_1

נתוני המערכת: $E=\varepsilon_1N_1+\varepsilon_2N_2 \; ; \; N=N_1+N_2$

לכן נובע כי: $N_1=\frac{\varepsilon_2N-E}{\Delta\varepsilon}$ $N_2=\frac{E-\varepsilon_1N}{\Delta\varepsilon}$

האנטרופיה: $S=k_B\ln\frac{N!}{N_1!N_2!}\cong k_B\left(N\ln N-N_1\ln N_1-N_2\ln N_2\right)$

הטמפרטורה: $\frac{1}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)=\frac{\partial S}{\partial N_1}\frac{\partial N_1}{\partial E}+\frac{\partial S}{\partial N_2}\frac{\partial N_2}{\partial E}=\frac{k_B}{\Delta\varepsilon}\ln\frac{N_1}{N_2}$

האכלוס היחסי: $\frac{N_1}{N_2}\xrightarrow{T\to\infty}1$, $\frac{N_1}{N_2}=e^{\beta\Delta\varepsilon}\ge1$; $\beta=\frac{1}{k_BT}$

<u>ההנחה הבסיסית של המכניקה הסטטיסטית</u>:

ההסתברות להימצא בכ"א מהמצבים הקוונטיים הנגישים של מערכת סגורה שווה.
ההסתברות הגבוהה ביותר להימצא באותו אזור בו צפיפות המצבים מרבית.

עבור המערכות N_1,N_2 נוח להגדיר: $s_1=\frac{N_1s}{N}+\delta \; ; \; s_2=\frac{N_2s}{N}-\delta$

צפיפות ההסתברות של δ: $P(\delta)=A\exp\left[-2\left(\frac{1}{N_1}+\frac{1}{N_2}\right)\delta^2\right]$

<u>אנטרופיה</u>:

$k_B=1.38\cdot10^{-23}\left[Joule/Kelvin\right]$

• <u>הגדרה</u>: $\sigma(N,U)=\ln g(N,U) \Leftrightarrow g=e^{\sigma} \; ; \; S=k_B\sigma$

$$S(E,V,N)=-k_B\sum\frac{1}{\Omega}\ln\frac{1}{\Omega}=k_B\ln\Omega$$

• טמפרטורה: $\boxed{\tau=k_BT\;[J];\;\beta=\frac{1}{\tau}=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U}\right)_{N,V} \Rightarrow \frac{1}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V}}$

✓ קשר שימושי (כלל השרשרת): $\frac{1}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{N,V}=\frac{\partial S}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial U}$

בשיווי משקל תרמי מתקיים: $\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial U_1}\right)_{N_1}=\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial U_2}\right)_{N_2} \Rightarrow \begin{cases}\tau_1=\tau_2\\ T_1=T_2\end{cases}$

מעבר אנרגיה ושינוי אנטרופיה:

$\begin{bmatrix}U_1\\ \tau_1\\ \sigma_1\end{bmatrix} \xrightarrow{\delta U} \begin{bmatrix}U_2\\ \tau_2\\ \sigma_2\end{bmatrix}$ $\delta\sigma=\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial U_1}\right)(-\delta U)+\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial U_2}\right)(\delta U)=\left(-\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)\delta U$

אם התהליך מתאר מעבר לשיווי משקל אזי: $\delta\sigma>0$
$\Leftarrow$ האנרגיה זורמת מ- τ גבוה ל- τ נמוך.

• האנטרופיה של המערכת המחוברת: $\sigma=\ln\Omega=\sigma_1+\sigma_2$

הקשר בין אנטרופיה ופונקצית החלוקה: $\sigma=\ln Z+\beta\langle U\rangle$

הקשר בין אנטרופיה והאנרגיה: $\sigma=\frac{1}{k_BT}(U-F)=\frac{U}{k_BT}+\ln Z$

קשר בין אנטרופיה לאנרגיה חופשית: $\sigma=-\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_{V,N}$

✓לכן מהצבה - אנטרופיה בגז של N חלקיקים זהים: $\sigma=N\left(\ln\frac{n_Q}{n_N}+\frac{5}{2}\right)$

✓<u>מהנוסחה האחרונה ומהצבת חוק הגזים מחשבים את קיבול החום !!!</u>

<u>החוק השני של תרמודינמיקה</u>:
כאשר שתי תתי-מערכות מובאות למגע תרמי, האנטרופיה הכוללת גדלה.

<u>שיווי משקל תרמי</u>:
נתונות 2 מערכות אשר מבודדות מהסביבה, היכולות להעביר אנרגיה ביניהן, אך לא חלקיקים $N=N_1+N_2$.

האנרגיה הכוללת של המערכת קבועה: $U=U_1+U_2$

מספר המצבים עבור המערכות $g_1(N_1,U_1)$ ו- $g_2(N_2,U_2)$: $g=g_1\cdot g_2$

עפ"י ההנחה הבסיסית בש"מ תרמי $g(U_1)$ מקס' ולכן גם <u>**אנטרופיה מקס'**</u>:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial U_1}=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U_1}\right)_N+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U_2}\right)_N\cdot\frac{\partial U_2}{\partial U_1}=0 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial U_1}\right)_{N_1}=\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial U_2}\right)_{N_2}}$$

<u>משפט ה- H</u>:

נסמן $P_r(t)$ - הסתברות להימצא במצב r בזמן t, מתקיים $\sum_r P_r(t)=1$

$W_{rs}\left[1/time\right]$ - קצב המעבר ממצב r למצב s ונובע $W_{rs}=W_{sr}$

מתקיים: $\frac{dp_r}{dt}=\sum_s P_sW_{sr}-\sum_r P_rW_{rs}$ - השינוי שחל בהסת' להימצא ב- r

נגדיר: $H\equiv\langle\ln(P_r)\rangle=\sum_r P_r\ln(P_r)$ ונראה ש- H קטן בזמן עד ש"מ.

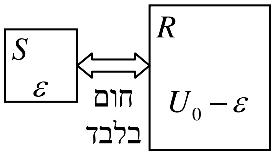
$$\frac{dH}{dt}=-\frac{1}{2}\sum_r\sum_s W_{rs}\left(P_r-P_s\right)\left(\ln(P_r)-\ln(P_s)\right)\le0$$

אס"ם $P_r=P_s$ עבור כל זוג מצבים מתקבל $\frac{dH}{dt}=0$, אחרת $\frac{dH}{dt}<0$

מצב סופי זה נקרא <u>מצב שיווי משקל תרמודינמי</u> ועבור "צבר קנוני" מתקיים

כי $H=\langle\ln P_r\rangle=\left\langle\ln\frac{e^{-\beta U_r}}{Z}\right\rangle=-\left(\ln Z+\beta\langle U\rangle\right)=-\frac{S}{k_B}=-\sigma$

<u>צבר קנוני</u> : מער' במגע עם מאגר חום (N,V,T)



✓ סה"כ אנרגיה באמבט ובמערכת : U_0

✓ לגבי אנרגיית המערכת מתקיים : $\varepsilon \ll U_0$

- <u>פקטור בולצמן</u> :
  - אנטרופיה : $g_R(U_0-\varepsilon)=\exp\left[\sigma_R(U_0-\varepsilon)\right]$
  - סדר I : $\sigma_R(U_0-\varepsilon)=\sigma_R(U_0)-\varepsilon\underbrace{\frac{\partial\sigma_R}{\partial U}}_{1/\tau\triangleq\beta}+\cancel{\frac{\varepsilon}{\tau}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial U}\frac{\varepsilon}{\tau}\right)}+\dots$
  - הסתברות להימצא במצב מסוים עם אנרגיה ε :

$$g_R(U_0-\varepsilon_S)=\exp\left[\sigma_R(U_0)\right]\underbrace{\exp(-\beta\varepsilon_S)}_{boltzman\ factor}\Rightarrow P(\varepsilon_S)\propto\exp(-\beta\varepsilon_S)$$

- <u>פונקצית החלוקה</u> :

סיכום כל המצבי המער' האפשריים : $\boxed{Z_1=\sum_s e^{-\beta\varepsilon_s}=\sum_U\Omega(U)e^{-\beta U}}$

✓ עבור $k_BT\gg g^{-1}(\varepsilon)$: $\boxed{Z_1\cong\int g(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon_s}\,d\varepsilon\ ,\ \beta=\frac{1}{k_BT}}$

פונקצית חלוקה עבור N חלקיקים <u>שונים</u> ללא אינטראקציה : $Z_N=Z_1^N$

פונקצית חלוקה עבור N חלקיקים <u>זהים</u> ללא אינטראקציה : $Z_N=\frac{Z_1^N}{N!}$

✓ מתאים למער' קלאסיות, שם מתקיים $n_N\ll n_Q$.

- <u>הסתברות להימצא במצב מסוים</u> עם אנרגיה ε_s : $P(\varepsilon_s)=\frac{1}{Z}e^{-\beta\varepsilon_s}$
- <u>מספר החלקיקים הממוצע במצב</u> (מתוך N במער') : $n_r=N\cdot P_r$
- <u>אנרגיה ממוצעת בצבר קנוני</u> :

$$\langle\varepsilon\rangle=\sum_s\varepsilon_s p(\varepsilon_s)=-\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}=-\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta}=\begin{cases}\min(\varepsilon),T=0\\ avg(\varepsilon),T\to\infty\end{cases}$$

- <u>השונות (פלקטואציות) של האנרגיה</u> :

$$\mathrm{var}(\varepsilon)=\left\langle(\Delta\varepsilon)^2\right\rangle=-\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\beta}\underbrace{\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)}_{-\langle\varepsilon\rangle}+\underbrace{\frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial\beta}\right)^2}_{\langle\varepsilon\rangle^2}=\frac{\partial^2\ln Z}{\partial\beta^2}$$

<u>קיבול חום</u> : $\mathrm{var}(U)=-\frac{\partial U}{\partial\beta}=-\frac{\partial U}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial\beta}=(-k_BC_V)(-k_BT^2)=\tau^2C_V$

- <u>האנרגיה החופשית של הלמהולץ (Helmholtz) בצבר קנוני</u> :

<u>הגדרה</u> : $F=U-ST=U-\tau\sigma=-pV+\mu_{\text{int}}N_{\text{int}}$

הקשר לפונקצית החלוקה והטמפרטורה : $F=-\tau\ln Z_N$

עבור N חלקיקים <u>זהים</u> (בגז אידיאלי): $F=-N\tau\left(\ln\frac{n_Q}{n_N}+1\right)$

✓ משמעות האנרגיה החופשית : $\sigma=\sigma_{\mathrm{Res}}+\sigma_{Sys}=\sigma_{\mathrm{R}(U-U_S)}+\sigma_{S(U_S)}$

$$\cong\sigma_{\mathrm{R}(U)}-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U_R}\right)_{V,N}U_S+\sigma_{S(U_S)}=\sigma_{\mathrm{R}(U)}-\frac{1}{\tau}\underbrace{(U_S-\tau\sigma_S)}_{F}$$

לכן האנרגיה U_s שהמערכת תבחר היא האנרגיה שעבורה האנרגיה החופשית תהיה מינימאלית בשיווי משקל. ואז האנטרופיה מקסימאלית!

✓ עבור אוסילטורים הרמוניים (Z_ω - פונקצית חלוקה פר תדר) :

$$F=\text{קיטוב}\cdot\sum_\omega F_{\omega(n_x,n_y,n_z)}=\text{קיטוב}\cdot\sum_{n_x}\sum_{n_y}\sum_{n_z}-\tau\log Z_\omega$$

<u>צבר קנוני בגבול הקלאסי</u> (טמפ' גבוהה וצפיפות מצבים ואכלוס נמוכים):

- נתונה מער' פיזיקלית עם f דרגות חופש.
- נסמן $\vec q=(q_1,q_2,...,q_f)$ - וקטור קואורדינטות

$\vec p=(p_1,p_2,...,p_f)$ - צמוד קנוני

(במקרה המכני אלה הם מסה ותנע)

- האנרגיה מובאת באמצעות המילטוניאן : $H=H(\vec q,\vec p)$

✓ <u>דוגמה</u> : עבור N חלקיקים עם מסה m :

$$H=H(\vec q,\vec p)=E_{kin}+E_{pot}=\sum_{n=1}^N\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+V(q_1,q_2,...q_{3N})$$

- צפיפות הסתברות למציאת חלקיק מסומנת ע"י : $\rho(\vec q,\vec p)$
- הסתברות למצוא מער' בסביבה ברוחב $d\vec q\cdot d\vec p$

ליד הנקודה $(\vec q,\vec p)$ במרחק פאזה : $\rho(\vec q,\vec p)\cdot d\vec q\cdot d\vec p$

- מצב שיווי משקל : $\rho(\vec q,\vec p)$ לא תלוי בזמן לכן $\frac{d\rho(\vec q,\vec p)}{dt}=0$
- בקירוב הקלאסי ($h\to0$) $\rho(\vec q,\vec p)\propto\exp(-\beta H(\vec q,\vec p))$

משמעות הקירוב הקלאסי הינו גם שבתוך k_BT יש הרבה רמות אנרגיה.

- תוחלת $\left\langle A(\vec q,\vec p)\right\rangle=\dfrac{\iint d\vec qd\vec p\cdot A(\vec q,\vec p)\cdot e^{-\beta H(\vec q,\vec p)}}{\iint d\vec qd\vec p\cdot e^{-\beta H(\vec q,\vec p)}}$

<u>משפט החלוקה השווה</u>:

נניח כי עבור הקואורדינטה q_n מסוימת מתקיים : $H=a_nq_n^2+\tilde H$

כאשר $\tilde H$ לא תלוי ב- q_n, אזי מתקיים : $a_n\left\langle q_n^2\right\rangle=\frac{k_BT}{2}$

באופן דומה עבור הצמוד קנוני p_n אם מתקיים : $H=b_np_n^2+\tilde H$

כאשר $\tilde H$ לא תלוי ב- q_n, אזי מתקיים : $b_n\left\langle p_n^2\right\rangle=\frac{k_BT}{2}$

הוכחה :

$$\left\langle a_nq_n^2\right\rangle=\frac{\iint d\vec qd\vec p\cdot(a_nq_n^2)\cdot e^{-\beta H}}{\iint d\vec qd\vec p\cdot e^{-\beta H}}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}dq_n\left(a_nq_n^2\right)\cdot e^{-\beta\left(a_nq_n^2\right)}}{\int_{-\infty}^{\infty}dq_n\cdot e^{-\beta\left(a_nq_n^2\right)}}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial\beta}\log\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}dq_n\cdot e^{-\beta\left(a_nq_n^2\right)}}_{\sqrt{\frac{\pi}{\beta a_n}}}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\beta a_n}{\pi}=\frac{1}{2\beta}=\frac{k_BT}{2}$$

❖ <u>דוגמה</u> : עבור גוף תלוי על קפיץ תלוי (דרגת חופש אחת – ציר x)

$$E_{pot}=\frac{1}{2}kx^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}k\left\langle x^2\right\rangle=\frac{1}{2}k_BT\ \Rightarrow\ \left\langle x^2\right\rangle=\frac{k_BT}{k}$$

$$E_{tot}=\frac{1}{2}kx^2+\frac{p_x^2}{2m}\ \Rightarrow\ \langle E\rangle=\frac{1}{2}k\left\langle x^2\right\rangle+\frac{\left\langle p_x^2\right\rangle}{2m}=k_BT$$

✓ באופן קוונטי : $\langle\varepsilon\rangle=\frac{\hbar\omega}{2}\coth\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\xrightarrow[\hbar\omega\ll2k_BT]{}k_BT$

❖ <u>דוגמה</u> : חישוב אנרגיה בגבול הקלאסי.

$$F=U-\tau\sigma\ \Rightarrow\ U=F+\tau\sigma=F-\tau\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_{V,N}=-\tau^2\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{F}{\tau}\right)_{V,N}\right]$$

$$=\tau^2\frac{\partial}{\partial\tau}\left[N\left(\log\frac{n_Q}{n_N}+1\right)\right]_{V,N}=\tau^2N\frac{\partial}{\partial\tau}\log n_Q=\tau^2N\cdot\frac{3}{2\tau}=\frac{3}{2}N\tau$$

$$\Rightarrow\ \boxed{U=\underbrace{3N}_{\text{דרגות חופש}}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}k_BT}_{\text{משפט החלוקה השווה}}}$$

<u>קיבול חום</u> - זוהי האנרגיה הדרושה ע"מ להעלות את הטמפרטורה של הגוף.

- קיבול חום בנפח קבוע V : $\boxed{C_V=\tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_V=\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)_V}$

✓ הערה: σ הינה האנטרופיה של הגוף בלבד (ללא האמבט המוצמד).

- קיבול חום בלחץ קבוע p : $\boxed{C_p=\tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_p=\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_p}$

❖ בגז אידיאלי מתקיים $\sigma=N\left(\ln\frac{n_Q}{n}+\frac52\right)\underset{pV=N\tau}{=}N\left(\ln\frac{n_Q\tau}{p}+\frac52\right)$

ולכן נקבל: $C_{p,gas}=\tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_p=\frac52N$

❖ בגז אידיאלי מתקיים $\langle U\rangle=\frac32N\tau$ ולכן: $C_{V,gas}=\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)_V=\frac32N$

✓ $\boxed{C_p>C_V\Leftarrow C_p-C_V=N}$ כי השקעת אנרגיה בנפח לא קבוע (לחץ קבוע) תורמת גם להגדלת הנפח, כלומר מבצעת עבודה נוספת, ולכן להשגת אותו שינוי בטמפ' יש להשקיע יותר אנרגיה.

<u>קשרים דיפרנציאליים</u>:

- $d\sigma=\frac1\tau dU+\frac p\tau dV\quad\Leftrightarrow\quad dU=\tau d\sigma-pdV$
- $dF=dU-\tau d\sigma-\sigma d\tau=-\sigma\cdot d\tau-p\cdot dV=-S\cdot dT-p\cdot dV$

	$\sigma(U,V,N)$	$U(\sigma,V,N)$	$F(\tau,V,N)$
σ אנטרופיה			$-\sigma=\left(\frac{\partial F}{\partial\tau}\right)_{V,N}$
τ אנרגיה	$\frac1\tau=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U}\right)_{V,N}$	$\tau=\left(\frac{\partial U}{\partial\sigma}\right)_{V,N}$	$-\tau=\left(\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right)_{U,N}$
p לחץ ממוצע	$\frac p\tau=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_{U,N}$	$-p=\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{\sigma,N}$	$-p=\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\tau,N}$
μ פוטנציאל כימי	$-\frac\mu\tau=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)_{U,V}$	$\mu=\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{\sigma,V}$	$\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V}$

- <u>יחס מקסוול (Maxwell)</u>: $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_\tau=\left(\frac{\partial p}{\partial\tau}\right)_V$

הוכחה:

$$\frac{\partial^2F}{\partial\tau\partial V}=\frac{\partial^2F}{\partial V\partial\tau}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial F}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial F}{\partial\tau}\Rightarrow-\left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_\tau=-\left(\frac{\partial p}{\partial\tau}\right)_V$$

<u>חוק שימור האנרגיה</u>:

באופן כללי: $\sigma=\sigma(U,V,N)$ ולכן

$$d\sigma=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U}\right)_{V,N}dU+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial V}\right)_{U,N}dV+\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)_{U,V}dN$$

$$\Rightarrow d\sigma=\frac1\tau dU+\frac p\tau dV-\frac\mu\tau dN\quad\Rightarrow\quad\boxed{dU=\underbrace{\tau d\sigma}_{\substack{added\\heat}}-\underbrace{pdV}_{\substack{system\\work}}+\underbrace{\mu dN}_{\substack{combine\\energy}}}$$

<u>הפרדוקס של גיבס (Gibs)</u>:

פרמטר אקסטנסיבי (extensive): עבורו מתקיים $p=p_1+p_2$

פרמטר אינטנסיבי (intensive): עבורו מתקיים $p=p_1=p_2$

לדוגמה: אנטרופיה, טמפרטורה, אנרגיה ולחץ הינם אקסטנסיביים.

תחת הנחה שגויה לגבי פונקצית החלוקה ל- N חלקיקים: $Z_N=Z_1^N$

הדבר מוליד את האנטרופיה הלא אקסטנסיבית:

$$\cancel{S=Nk_B\left(\ln Z_1+\frac32\right)=Nk_B\left[\ln V+\frac32\left(1-\ln\frac{2\pi\hbar^2}{M\tau}\right)\right]}$$

<u>הכנסת מחיצה לא צריכה לשנות את האנטרופיה</u>, אך כאן $S'=S_1+S_2\neq S$

<u>גז אידאלי</u> (אין אינטראקציה בין החלקיקים):

בתיבה עם נפח $V=L^3$ מצוי אטום בעל מסה M

פונקצית הגל: $\Psi_{n_x,n_y,n_z}=\left(\frac2L\right)^{3/2}\sin\frac{n_x\pi x}{L}\sin\frac{n_y\pi y}{L}\sin\frac{n_z\pi z}{L}$

רמות האנרגיה של האטום: $\varepsilon_{n_x,n_y,n_z}=-\frac{\hbar^2\pi^2}{2ML^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)$

פונקצית החלוקה: $Z_{1\,atom}=\sum_{n_x=1}^\infty\sum_{n_y=1}^\infty\sum_{n_z=1}^\infty\exp\left(-\frac{\varepsilon_{n_x,n_y,n_z}}{\tau}\right)=$

$$=\sum_{n_x=1}^\infty\sum_{n_y=1}^\infty\sum_{n_z=1}^\infty\exp\left[-\alpha^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\right]\quad,\quad\alpha^2=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ML^2\tau}$$

נניח כי $\alpha\ll1$ ואז: $\sum_{n_z=1}^\infty\exp\left[-\alpha^2n_x^2\right]\cong\frac1\alpha\int_{\alpha\to0}^\infty\exp\left[-x^2\right]dx=\frac{\sqrt\pi}{2\alpha}$

לכן בסה"כ נקבל: $Z_{1\,atom}=\frac{\pi^{3/2}}{8\alpha^3}=\left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}V\quad;\quad Z_N=\frac{Z_1^N}{N!}$

מה המשמעות של $\alpha\ll1$? $\lambda=\frac{h}{Mv}\ ,\ E_k=\frac{Mv^2}{2}=\tau\Rightarrow\lambda=\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\tau M}}$

צפיפות קוונטית (נפח חבילת הגלים עם λ): $n_Q=\left(\frac{\sqrt\pi}{\lambda}\right)^3=\left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$

הצפיפות בתוך התיבה מוגדרת ע"י: $n_1=\frac1V\quad;\quad n_N=\frac NV$

- <u>הגבול הקלאסי</u>: $Z_1=\frac{n_Q}{n_1}=n_QV\gg1\ \Leftarrow\ \frac{n}{n_Q}\ll1\ \Rightarrow\ \frac{Z_1}{N}=\frac{n_Q}{n_N}$

✓ גבול קלאסי מושג כאשר איכלוס המצבים נמוך (קטן ממש מ-1).

אנרגיה ממוצעת של חלקיק בודד בגז: $\langle\varepsilon\rangle=-\frac{\partial\ln Z_1}{\partial\beta}=\tau^2\frac{\partial\ln Z_1}{\partial\tau}=\frac32\tau$

השונות באנרגיה של הגז: $\left\langle(\Delta\varepsilon)^2\right\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}\langle\varepsilon\rangle=\tau^2\frac{\partial\langle\varepsilon\rangle}{\partial\tau}=\frac32\tau^2$

גז אידאלי עם N חלקיקים זהים:

- <u>אנרגיה ממוצעת</u>: $\langle U\rangle=N\langle\varepsilon\rangle=3N\cdot\frac{k_BT}{2}$
- <u>שונות האנרגיה</u>: $\left\langle(\Delta U)^2\right\rangle=N\left\langle(\Delta\varepsilon)^2\right\rangle=\frac32k_B{}^2T^2\cdot N$
- הגודל המאפיין את רוחב ההתפלגות: $\frac{\sqrt{\left\langle(\Delta U)^2\right\rangle}}{\langle U\rangle}=\sqrt{\frac{2}{3N}}\ll1$
- <u>פוטנציאל כימי</u> (כמות האנרגיה שיש להשקיע ע"מ להוסיף חלקיק למער'):

$$\mu_{\text{int}}=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V}=-\tau\frac{\partial\log Z_N}{\partial N}=...=-\tau\log\frac{Z_1}{N}=\tau\log\frac{n_N}{n_Q}$$

- <u>האנרגיה החופשית</u>:

$$F=\int_0^N dN'\cdot\mu\left(N',\tau,V\right)=\tau\int_0^N dN'\cdot\log\frac{N'}{V\cdot n_Q}=N\tau\left(\log\frac{n_N}{n_Q}-1\right)$$

<u>חוק הגזים האידאליים</u>:

○ $p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{\tau,N}=-\frac{\partial}{\partial V}N\tau\left(\log\frac{N}{Vn_Q}-1\right)=N\tau\frac{\partial}{\partial V}(\log V)=\frac{N\tau}{V}$

- לכן מקבלים: $\boxed{pV=N\tau\quad,\quad\frac NV=n_N\quad\Rightarrow\quad p=n_N\cdot\tau}$
- עבור גז אידאלי $\langle\varepsilon\rangle=\frac32\tau$ לכן מקבלים: $p=\frac NV\frac23\langle\varepsilon\rangle$

צפיפות המצבים של חלקיק בקופסה – תרגיל כיתה 7

- צפיפות המצבים: $g(E)=\lim_{\Delta E\to 0}\frac{\Sigma(E+\Delta E)-\Sigma(E)}{\Delta E}=\frac{\partial\Sigma}{\partial E}$
  - ✓ זהו מס' המצבים ליח' אנרגיה.

$\Sigma(E)=\sum_{E'=0}^{E}\Omega(E')$ - מספר כולל של מיקרו מצבים מאנרגיה 0 עד E.

$\Omega(E)=g(E)\cdot dE$ - מס' מיקרו מצבים באנרגיה E.

- פונק' חלוקה $Z=\sum_r e^{-\beta E_r}=\sum_E\Omega(E)e^{-\beta E}\cong\int_0^\infty g(E)e^{-\beta E}dE$
  - ✓ הקירוב טוב כאשר האנרגיות מספיק גבוהות, כך שמכילות מספר מיקרו-מצבים גדול.
- אנרגיה ממוצעת: $\langle E\rangle=\frac{1}{Z}\sum_r E_r e^{-\beta E_r}\cong\frac{1}{Z}\int_0^\infty E\cdot g(E)e^{-\beta E}dE$
- אנרגיה של חלקיק בקופסה d מימדית:

$$E_{(n)}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2\quad ;\quad n^2=n_1^2+n_2^2+\ldots+n_d^2\quad ,\quad n_i=1,2,\ldots$$

❖ דוגמה לחישוב מספר וצפיפות מצבים של חלקיק יחיד בקופסה.

מספר המצבים עבור 2D: $\Sigma_{2D}(E)=\sum_{\substack{n_x^2+n_y^2\le n^2\\ n_x,n_y\ge 0}}1\cong\frac{1}{4}\pi n^2=\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}E$

ציפות המצבים עפ"י ההגדרה: $g(E)=\frac{\partial\Sigma}{\partial E}=\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}$

עבור חלקיק בודד במימד כללי d:

$$\Sigma_d(E)=\frac{1}{2^d}\int_{n_1^2+\ldots+n_d^2\le n^2}\prod_{i=1}^{d}dn_i=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\frac{\sqrt{\pi}\cdot n}{2}\right)^d$$

$$g_d(E)=\frac{\partial\Sigma}{\partial E}\underset{\frac{dn^2}{dE}=2n\frac{dn}{dE}}{=}\frac{d}{2\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^d\left(n^2\right)^{\frac{d}{2}-1}\frac{\partial\left(n^2\right)}{\partial E}=$$

$$\Rightarrow g_d(E)=\frac{d}{2\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\frac{L}{\hbar}\right)^d E^{\frac{d}{2}-1}$$

✓ עבור אלקטרון יש להתחשב בספין ולכן להכפיל פי 2 את $\Sigma(E)$.

✓ עבור N חלקיקים יש בסה"כ Nd דרגות חופש לכן יש להציב Nd במקום d בכל החישובים.

- צפיפות המצבים לחלקיק יחיד בקופסה בשלושת המימדים הראשונים:

$$g_1(\varepsilon)=\frac{\sqrt{2m}\cdot L}{2\pi\hbar}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\quad ;\quad g_2(\varepsilon)=\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\quad ;\quad g_3(\varepsilon)=\frac{L^3}{\pi^2\hbar^3}\sqrt{\frac{m^3\varepsilon}{2}}$$

✓ 1D – הצפיפות קטנה עם האנרגיה.

✓ 2D – הצפיפות קבועה כתלות באנרגיה.

✓ 3D – הצפיפות גדלה כתלות באנרגיה.

✓ יחידות צפיפות המצבים הן: $\left[g(\varepsilon)\right]=\frac{1}{energy}$

רעש תרמי (Jhonson-Nyuist) בנגדים

✓ עבור נגד ובתדרים קטנים $\left(\hbar\omega\ll k_BT\right)$ נמדדות פלוקטואציות במתח.

✓ בתדרים גבוהים מספיק מתקיים cut-off ואין רעשים תרמיים.

- משפט גונסון-נייקויסט: ניתן למדל רעש תרמי בנגד ע"י הוספות מקור מתח אידאלי אשר מקיים: $\left\langle V^2\right\rangle=4Rk_BT\Delta f$ ו- $\langle V\rangle=0$
  - ✓ מסקנה: נגד בטמפ' T שקול לנגד בטמפ' 0 + מקור מתח הנ"ל.
- הוכחת המשפט באמצעות קו תמסורת (באורך l) המחובר ל- 2 נגדים.
  - ○ האנרגיה האגורה בתחום תדרים Δf: $E_{\Delta f}=2\frac{l\Delta f}{c'}k_BT$
  - ✓ 2 – לכל תדר יש שני אופני תנודה (ניוון)
  - ✓ $\frac{l\Delta f}{c'}$ - מספר תדרים עצמיים בתחום Δf, c' - מהירות הגל בקו
  - ○ ההספק הנבלע ע"י כ"א מהנגדים: $\frac{\frac{1}{2}E_{\Delta f}}{\frac{l}{c'}}=\Delta f\cdot k_BT$
  - ○ הספק זה שווה להספק שכ"א מהנגדים משדרים לקו התמסורת:

$$\left\langle I^2\right\rangle R=\left\langle\left(\frac{V}{2R}\right)^2\right\rangle R=\frac{\left\langle V^2\right\rangle}{4R}=\Delta f\cdot k_BT\Rightarrow\left\langle V^2\right\rangle=4R\cdot k_BT\Delta f$$

  - ✓ $V=I\cdot 2R$ כי האימפדנס השקול של המעגל הוא $2R$.
- הוכחת המשפט ע"י ניתוח ספקטראלי של מעגל RLC טורי:
  - ○ ראשית נמדל את הנגד בטמפ' T בנגד בטמפ' 0 ומקור מתח בטור.
  - ○ משוואת המעגל עפ"י מטען הקבל (נסמן ע"י $q(t)$) הינה:

$$V_C(t)+V_L(t)+V_R(t)=\frac{q}{c}+L\ddot{q}+R\dot{q}=V(t)$$

  - ○ נסמן דגימה של הפונק $q(t)$ ע"י: $q_\tau(t)=\begin{cases}q(t) & ,-\frac{\tau}{2}\le t\le\frac{\tau}{2}\\ 0 & ,\ else\end{cases}$
  - ○ עפ"י "משפט החלוקה השווה": $\left\langle E_C\right\rangle=\left\langle\frac{q^2}{2C}\right\rangle=\frac{1}{2}k_BT$

כאשר מתקיים $\left\langle q^2\right\rangle=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}q_\tau^2(t)dt$ (*)

- הגדרת התמרת פורייה של $q_\tau(t)$: $q_\tau(t)\triangleq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\cdot q_\tau(\omega)e^{-i\omega t}$
  - ○ $q_\tau(t)\in\mathbb{R}\Rightarrow q_\tau(-\omega)=q_\tau^*(\omega)$ ולכן מתקבל ע"י הצבת ההתמרה ל- (*): $\left\langle q^2\right\rangle=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\left|q_\tau(\omega)\right|^2d\omega$
- הצפיפות הספקטראלית מוגדרת ע"י: $S_q(\omega)\triangleq\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left|q_\tau(\omega)\right|^2$
  - ✓ לכן מתקבל ע"י הצבה: $\left\langle q^2\right\rangle\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}S_q(\omega)d\omega=C\cdot k_BT$
  - ○ מהפעלת התמרת פוריה על משוואת המעגל והצבת $\omega_0=\sqrt{1/LC}$:

$$q(\omega)=\frac{V(\omega)}{L\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+i\omega R}\quad\underset{|\ldots|^2}{\Rightarrow}\quad S_q(\omega)=\frac{S_V(\omega)}{L^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2R^2}$$

  - ✓ המקסי' מתקבל כאשר $\omega=\omega_0$ ואז רוחב הפיק נקבע ע"י ω^2R^2
  - ○ נסמן את מקדם האיכות: $Q=2L\omega_0/R$ ומהנחה כי $Q\gg 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}S_q(\omega)d\omega=\ldots=\frac{S_V(\omega_0)\pi Q}{4\omega_0^3L^2}=C\cdot k_BT$$

  - ○ $\frac{2Rk_BT}{\pi}\underset{sub\ Q,\omega_0}{=}\frac{4C\omega_0^3L^2}{\pi Q}k_BT=S_V(\omega_0)\xleftarrow[\int\cdot d\omega]{}$ מש"ל.
- הפירוק הספקטראלי של q: $S_q(\omega)=\frac{2Rk_BT}{\pi}\frac{1}{L^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\omega^2R^2}$

קרינה א״מ

- נתונה תיבה חלולה בעלת קירות מתכתיים $(\sigma \to \infty)$ ואורך צלע L.
רוצים לדעת מהי הטמפרטורה כתלות באנרגיה ומימדי התיבה.
- $\sigma \to \infty$ לכן על הקירות הרכיב המשיקי של $\vec{E}$ מתאפס והאופני תנודה:

$$E_u = E_{u,0}\sin(\omega t)\cos\left(\frac{n_u \pi u}{L}\right)\sin\left(\frac{n_w \pi w}{L}\right)\sin\left(\frac{n_s \pi s}{L}\right)$$

כאשר $\{u,w,s\}$ - שלשה א״ג ימנית וכן $n_u, n_w, n_s = 0,1,2,\ldots$ שלמים.

- נדרוש כי $\nabla\cdot\vec{E}=0$ ולכן

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

$$E_{x,0}n_x + E_{y,0}n_y + E_{z,0}n_z = \vec{E}_0\cdot\vec{n} = 0$$

- לכל $\vec{n}$ (הניצב לשדה) יש שני פתרונות א״ג עבור $\vec{E}_0$
- נציב במשי׳ הגלים $c^2\nabla^2\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ נקבל: $c^2\pi^2\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\omega^2 L^2$
- נסמן $n=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$ ואז: $\boxed{\omega_n = \frac{\pi c}{L} n}$
- עפ״י מכניקת קוונטית לכ״א מהמודים יש דינמיקה של **<u>אוסילטור הרמוני</u>**:
רמות אנרגיה של אוסילטור הרמוני קוונטי: $s=0,1,2,\ldots$ $\quad \varepsilon_s = s\hbar\omega_n$

פונקצית חלוקה **<u>פר תדר</u>**: $Z=\sum_{s=0}^{\infty}\exp(-s\beta\hbar\omega)=\frac{1}{1-\exp(-\beta\hbar\omega)}$

רמת אנרגיה ממוצעת <u>(גם מסי׳ הפוטונים)</u> **<u>פר תדר</u>**: $\langle s\rangle = \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}$

אנרגיה ממוצעת של האוסילטור **<u>פר תדר</u>**:

$$\langle\varepsilon\rangle = \langle s\rangle\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}\xrightarrow{k_BT\gg\hbar\omega}\frac{\hbar\omega}{1+\beta\hbar\omega-1}=k_BT$$

<u>חוק הקרינה של סטפן בולצמן</u>

- מחשבים אנרגיה ממוצעת בתוך התיבה:

$$U=\sum_n\langle\varepsilon_n\rangle=\sum_n\frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}=2\sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty}\sum_{n_z=0}^{\infty}\frac{\hbar\omega_n}{\exp(\beta\hbar\omega_n)-1}\simeq$$

$$=2\cdot\frac{1}{8}\cdot 4\pi\int_0^{\infty}dn\cdot n^2\cdot\frac{\hbar\frac{n\pi c}{L}}{\exp\left(\beta\hbar\frac{n\pi c}{L}\right)-1}=\frac{\pi^2\hbar c}{L}\left(\frac{\tau L}{\pi\hbar c}\right)^4\int_0^{\infty}dn\cdot\frac{x^3}{e^x-1}$$

- לכן בסה״כ קיבלנו כי מתקיים: $\boxed{\frac{U}{V}=\frac{\pi^2\tau^4}{15\hbar^3c^3}}$

כאשר $\tau=k_BT$ וכן $V=L^3$ - נפח התיבה.

<u>התפלגות ספקטראלית וחוק הקרינה של פלאנק:</u>

אם נגדיר **אנרגיה לתדר**: $U_\omega=\frac{\hbar}{\pi^2c^3}\frac{\omega^3}{\exp(\beta\hbar\omega)-1}$

אזי ניתן לרשום את חוק הקרינה כך: $\frac{U}{V}=\int d\omega\cdot U_\omega$

✓ החוק מאפשר למדוד טמפ׳ ע״י קרינה של גוף (בקירובו לגוף שחור).

<u>פליטת קרינה (פוטונים)</u>

- הנפח הממוצע שתופסים הפוטונים הנפלטים דרך חריץ עם שטח A, בזמן dt והנעים במהירות האור c עבור כל כיווני $\hat{u}$ עם רכיב חיובי בכיוון הנורמל $\hat{n}$: $\langle V\rangle = Ac\cdot dt\cdot\langle\cos\theta\rangle=\frac{c}{4}A\cdot dt$
- אנרגיה כוללת שנפלטת בזמן dt: $\langle U\rangle = Ac\cdot dt\cdot\langle\cos\theta\rangle\cdot\frac{\pi^2\tau^4}{15\hbar^3c^3}$
- הספק הקרינה ליחידת שטח (אנרגיה ליחידת זמן ליחידת שטח):

$$J=\frac{\pi^2\tau^4}{60\hbar^3c^2}=\sigma_BT^4\ ,\ \sigma_B=\frac{2\pi^5k_B^4}{15h^3c^2}=\frac{\pi^2k_B^4}{60\hbar^3c^2}=5.67\cdot10^{-8}\left[\frac{W}{m^2K^4}\right]$$

<u>קרינת גוף שחור – תרגיל כיתה 8</u>

- **<u>פוטון</u>** – עיוות בשדה הא״מ במרחב, **<u>בעל 2 דרגות חופש (קיטובים)</u>**.
- אנרגיה של פוטון: $\varepsilon=\hbar\omega$ - כל תדירות מאפיינת אנרגיה שונה!
- תנע של פוטון: $\vec{p}=\hbar\vec{k}$, $\vec{k}$ - וקטור הגל בכיוון התקדמותו.
- תנע של חלקיק בקופסה (התנע מקוונטת כי מתאפס על הקירות!):

$$\left|\vec{k}\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^{d}k_i^2}\triangleq k=\frac{\omega}{c}\ ;\ k_i=\frac{\pi n_i}{L_i}\ ;\ n_i=1,2,\ldots\ ;\ n=\sqrt{n_1^2+\ldots+n_d^2}$$

✓ האנרגיה ε כתלות באופן התנודה n:

$$\varepsilon=\hbar\omega=\hbar kc=\frac{\hbar\pi c}{L}n\ \Rightarrow\ \frac{\varepsilon L}{\hbar\pi c}=n=\sqrt{n_1^2+\ldots+n_d^2}$$

- אורך הגל: $\lambda=\frac{2\pi}{k}$
- מספר פוטונים (או פונונים) ממוצע במיקרו מצב אחד בעל אנרגיה ε_s:

$$\langle n_s\rangle=\frac{1}{Z}\sum_r n_s e^{-\beta E_r}=\frac{\sum\limits_{n_1,n_2,\ldots,n_\infty=0}^{\infty}n_s e^{-\beta\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i n_i}}{\sum\limits_{n_1,n_2,\ldots,n_\infty=0}^{\infty}e^{-\beta\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i n_i}}=\frac{\sum\limits_{n_s=0}^{\infty}n_s e^{-\beta\varepsilon_s n_s}}{\sum\limits_{n_s=0}^{\infty}e^{-\beta\varepsilon_s n_s}}=$$

$$=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_s}\ln\left[\sum_{n_s=0}^{\infty}e^{-\beta\varepsilon_s n_s}\right]=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_s}\ln\frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_s}}=\frac{1}{e^{\beta\varepsilon_s}-1}=f_{MB}(\varepsilon)$$

✓ <u>בכל</u> רמת אנרגיה ε_i ישנם n_i פוטונים. <u>ללא ניוון ברמות אנרגיה!</u>

✓ בבעיה יש אינסוף דרגות חופש (כמספר רמות האנרגיה של פוטון).

✓ אנרגיה של כל מצב קוונטי מהווה סכימת אני׳ המערכת: $E_r=\sum_i\varepsilon_i n_i$

- מספר המצבים של פוטון יחיד בקופסה d-מימדית:

$$\Sigma=2\cdot\frac{1}{2^d}\frac{\left(\sqrt{\pi}n\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\frac{\varepsilon L}{2\hbar c\sqrt{\pi}}\right)^d$$

- צפיפות המצבים של פוטון יחיד בקופסה d-מימדית:

$$g_d(\varepsilon)=\frac{\partial\Sigma}{\partial\varepsilon}=\frac{2}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\left(\frac{L}{2\hbar c\sqrt{\pi}}\right)^d\varepsilon^{d-1}$$

- <u>צפיפות המצבים פר אנרגיה</u> של פוטון יחיד בקופסה במימדים שימושיים:

$$g_1(\varepsilon)=\frac{2L}{\hbar c\pi}\quad ;\quad g_2(\varepsilon)=\frac{L^2}{\hbar^2c^2\pi}\varepsilon\quad ;\quad g_3(\varepsilon)=\frac{L^3}{\hbar^3c^3\pi^2}\varepsilon^2$$

✓ כאן, עבור 1D הצפיפות אינה תלויה באנרגיה.

- <u>צפיפות מצבים פר תדר</u>:

$$g_1(\omega)=\frac{2L}{c\pi}\quad ;\quad g_2(\omega)=\frac{L^2}{c^2\pi}\omega\quad ;\quad g_3(\omega)=\frac{L^3}{c^3\pi^2}\omega^2$$

- <u>ציפות האנרגיה</u> פר נפח, פר תדר במערכת:

$$u_d(\omega)=\underbrace{g_d(\omega)}_{\text{density of states}}\cdot\underbrace{L^{-d}}_{\text{per volume}}\cdot\underbrace{\hbar\omega}_{\text{state energy}}\cdot\underbrace{\left(e^{\beta\hbar\omega}-1\right)^{-1}}_{\text{Number of particles per state}}$$

$$u_{1(\omega)}=\frac{2}{\pi c}\frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\ ;\ u_{2(\omega)}=\frac{1}{\pi c^2}\frac{\hbar\omega^2}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\ ;\ u_{3(\omega)}=\frac{1}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

- מספר פוטונים ממוצע בקופסה (ליח׳ נפח): $\langle N\rangle=\int_0^{\infty}\underbrace{f_{MB}(\varepsilon)}_{\text{Number of photons per state}}\underbrace{g(\varepsilon)d\varepsilon}_{\text{Number of states}}$
- אנרגיה כללית ממוצעת של קופסה: $U=\langle E\rangle=\int_0^{\infty}\underbrace{\varepsilon f_{MB}(\varepsilon)}_{\text{Energy per state}}\cdot\underbrace{g(\varepsilon)d\varepsilon}_{\text{Number of states}}$

גוף שחר וחוק סטפן-בולצמן – תרגיל כיתה 9

- צפיפות מצבים פר אורך גל (צפיפות ספקטראלית)

$$g(\lambda)\equiv \frac{\partial\Sigma}{\partial\lambda}=\frac{\partial\Sigma}{\partial\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}=g(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{hc}{\lambda}\right)=\frac{-hc}{\lambda^2}g\left(\varepsilon=\frac{hc}{\lambda}\right)$$

✓ הסבר לצפיפות השלילית:

$$N=\int_0^\infty g(\varepsilon)d\varepsilon=\int_\infty^0 g(\lambda)d\lambda=\int_\infty^0 -\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}d\lambda=\int_0^\infty\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}d\lambda>0$$

✓ דרך נוספת לראות זאת היא ע"י שיוויון הגדלים הנמדדים:

$\tilde g(\lambda)d\lambda=g(\varepsilon)d\varepsilon$ **ולא**: $\cancel{\tilde g(\lambda)=g(\varepsilon)}$

$$g_1(\lambda)=\frac{4L}{\lambda^2}\quad;\quad g_2(\lambda)=\frac{4\pi L^2}{\lambda^3}\quad;\quad g_3(\lambda)=\frac{8\pi L^3}{\lambda^4}$$

- צפיפות אנרגיה פר נפח, פר אורך גל במערכת:

$$u_d(\lambda)=\underbrace{g_d(\lambda)}_{\text{density of states}}\cdot\underbrace{L^{-d}}_{\text{per volume}}\cdot\underbrace{\frac{hc}{\lambda}}_{\text{state energy}}\cdot\underbrace{\left(e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1\right)^{-1}}_{\text{Number of particles per state}}$$

$$u_{1(\lambda)}=\frac{4}{\lambda^3}\frac{hc}{e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1}\quad;\quad u_{2(\lambda)}=\frac{4\pi}{\lambda^4}\frac{hc}{e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1}\quad;\quad u_{3(\lambda)}=\frac{8\pi}{\lambda^5}\frac{hc}{e^{\beta\frac{hc}{\lambda}}-1}$$

✓ להתפלגות התדרים בתלת-מימד קוראים התפלגות פלאנק.

✓ נשים לב כי ההתפלגות אינה תלויה בנפח (בגאומטריה של המרחב).

✓ באמצעות התפלגות זו ניתן למדוד טמפרטורה של גופים רחוקים.

❖ מציאת טמפ' השמש, אם אורך הגל "החזק" ביותר הוא צהוב $550nm$:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}u(\lambda)\underset{3D}{=}8\pi hc\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\lambda^{-5}}{e^{\beta hc\lambda^{-1}}-1}=$$

$$=8\pi hc\left(\frac{-5\lambda^{-6}\left(e^{\beta hc\lambda^{-1}}-1\right)+\beta hc\lambda^{-7}e^{\beta hc\lambda^{-1}}}{\left(e^{\beta hc\lambda^{-1}}-1\right)^2}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-5\left(e^x-1\right)+xe^x=0\\ x=\beta hc\lambda_m^{-1}\end{cases}\Rightarrow x_{max}=4.965\Rightarrow T=\frac{hc}{4.96k_B\lambda_m}=5270K$$

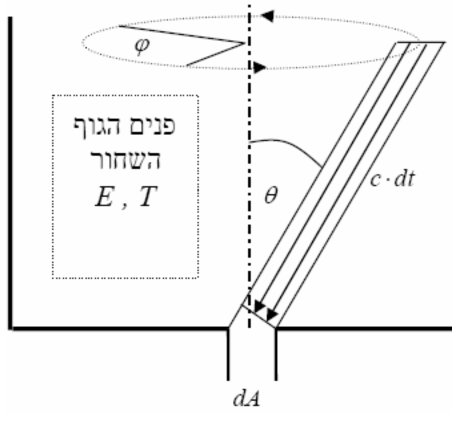
❖ שטף הקרינה של גוף שחור כפונקציה של הטמפרטורה:

○ כמות האנרגיה העוזבת את הגוף בזמן dt דרך חריר בעל שטח dA עבור כיוון מוין המאופיין ע"י הזוויות θ,φ:

$$dU=u_3(\lambda)dV\cdot d\lambda\cdot\frac{d\Omega}{4\pi}=u_3(\lambda)\cdot c\cdot dt\cdot dA\cos\theta\cdot d\lambda\cdot\frac{d\Omega}{4\pi}$$

○ ע"מ לקבל את סה"כ האנרגיה העוזבת יש לסכם על כל λ,θ,φ:

$$J=\frac{U}{dAdt}=2hc^2\cdot2\pi\cdot\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^\infty\frac{\lambda^{-5}d\lambda}{e^{\beta hc\lambda^{-1}}-1}=\sigma_BT^4$$



פונונים במוצק ומודל דבאי – תרגיל כיתה 10

- **פונון** – עיוות המתקדם בתוך סריג המוצק במהירות הקול.

לעיוות זה 3 דרגות חופש (עיוות אורכי – דרגה אחת או עיוות טרנסוורסלי (כמו בפוטון)– שתי דרגות חופש).

- ספקטרום של פונונים: באנלוגיה לקוונטיזציה של הפוטונים מקוונטטים גם את הפונונים (כי תלויים באורך הסריג בכל כיוון- $L_i=N_ia_i$).
- קשרי תנע ואנרגיה:

$$\omega_k=vk=v\frac{\pi n}{L}\Rightarrow\varepsilon_k=\hbar\omega_k=\hbar kv=\frac{hv}{\lambda_k}\quad,\quad v$$ - מהירות הקול.

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}\quad;\quad k_i=\frac{\pi n_i}{L_i}=\frac{\pi n_i}{N_ia_i};\quad n_i=1,2,...,N_i\quad;\quad n=\sqrt{n_1^2+...+N_i^2}$$

✓ ההבדל מפוטון הוא שאורך הגל של הפונון לא יכול להיות קטן מהמרחק בין שני אתרים סמוכים, ולכן **גם האנרגיה וגם מספר המודים של הפונונים חסומים מלעיל**. ב- 3D נניח כי בסריג $a_x=a_y=a_z=a$ ואז

$$n_{i,max}=N_i\Rightarrow n_{max}=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}=\sqrt{3N_i^2}=\sqrt3N_i$$

$$k_{max}=\frac{\sqrt3\pi}{a}\quad;\quad\omega_{max}=\frac{\sqrt3\pi v}{a}\quad;\quad\varepsilon_{max}=\frac{\hbar v\sqrt3\pi}{a}$$

- צפיפות מצבים:

$$\boxed{g_{phonon}(\omega)=\tfrac32 g_{photon}\xrightarrow{3D}\frac{3L^3}{2v^3\pi^2}\omega^2}$$

- מספר פונונים במצב קוונטי אחד:

$$f(\omega)=\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$

- תדירות דבאי:

$$3N=\int_0^{\omega_D}g(\omega)d\omega=\frac{3L^3}{2v^3\pi^2}\int_0^{\omega_D}\omega^2d\omega=\frac{3L^3\omega_D^3}{2v^3\pi^2}$$

$$\Rightarrow\omega_D=v\pi\sqrt[3]{\frac6\pi\left(\frac{N}{L^3}\right)}=v\pi\sqrt[3]{\frac6\pi\left(\frac{N_i^3}{(N_ia)^3}\right)}=\frac{v\pi}{a}\sqrt[3]{\frac6\pi}\cong\frac{v\pi}{a}\sqrt3=\omega_{max}$$

✓ ω_D ו- ω_{max} שווים רק בערך כי החישוב של האינטגרל מקורב בלבד.

✓ $3N$ - נובע מ- N אטומים בסריג כפול 3 קיטובים (דרגות חופש).

- טמפרטורת דבאי: סקלת הטמפרטורה מוגדרת ע"י:

$$\theta=\frac{\hbar v}{k_B}\sqrt[3]{\frac{6\pi^2N}{L^3}}$$

✓ טמפרטורה זו תלויה בתכונות המוצק, ליתר דיוק בצפיפות הסריג ובמהירות הקול בתוך הסריג והיא קובעת את סקלת הטמפרטורה שהחל ממנה כל המודים של הפונונים מעוררים.

- אנרגיה של פונונים:

$$\boxed{x_D=\beta\hbar\omega_D=\beta\hbar v\sqrt[3]{\frac{6\pi^2N}{L^3}}=\frac\theta T}$$

$$\boxed{E=\int_0^{\omega_D}\hbar\omega\cdot g(\omega)f(\omega)d\omega=\underbrace{\frac{3L^3}{2v^3\pi^2}}_{\triangleq\alpha}\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega\cdot\omega^2d\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1}=\frac{\alpha\hbar}{(\beta\hbar)^4}\int_0^{x_D}\frac{x^3dx}{e^x-1}}$$

✓ האינטגרל חסום מלמלה ע"י ω_D (במקום ∞ עבור פוטון)!

✓ אנו לא יודעים לחשב אנליטית אינטגרל זה ולכן פונים לקירובים:

א. $T\ll\theta$ רק המודים הנמוכים מעוררים וכן $x_D\gg1$ לכן מקרבים לאינטגרל:

$$E\cong\frac{3L^3\hbar}{2v^3\pi^2}\frac{1}{(\beta\hbar)^4}\int_0^\infty\frac{x^3dx}{e^x-1}=\frac{L^3\pi^2}{10v^3\hbar^3}(k_BT)^4$$

ב. $T\gg\theta$ כל המודים מעוררים בצורה אחידה וכן $x<x_D\ll1$ ולכן ניתן לפתח את האינטגרל לטור טיילור:

$$\int_0^{x_D}\frac{x^3dx}{e^x-1}\cong\int_0^{x_D}\frac{x^3dx}{(1+x-1)}=\int_0^{x_D}x^2dx=\frac{x_D^3}{3}=\frac13\left(\frac\theta T\right)^3$$

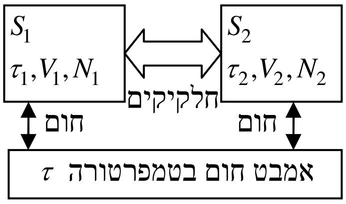
$$E\cong\frac{3L^3\hbar}{2v^3\pi^2}\frac{1}{(\beta\hbar)^4}\frac13\left(\frac\theta T\right)^3=\frac{L^3k_B^4}{2v^3\pi^2\hbar^3}\left(\frac{\hbar v}{k_B}\right)^3\left(\frac{6\pi^2N}{L^3}\right)T=3N\cdot k_BT$$

✓ כל המודים מאוכלסים בצורה אחידה לפי כלל החלוקה שווה.

- קיבול חום:

$$C_V=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V=L^3}=3k_BN\ @\ (T\gg\theta);\ \frac{12k_B\pi^4}{5}N\left(\frac T\theta\right)^3\ @\ (T\ll\theta)$$

<u>צבר גרנד-קנוני</u> (μ,V,T)



✓ <u>המערכת במגע עם מאגר חום ו/או חלקיקים.</u>

✓ בשיווי משקל תרמודינמי $\tau_1=\tau_2=\tau$

✓ מערכת אשר מצומדת לאמבט שמאלץ τ מסויים, תבחר אנרגיה חופשית F מינימאלית (אנטרופיה מקסימלית).

- האנרגיה החופשית של המערכת: $F=F_1+F_2=U_1+U_2-\tau(\sigma_1-\sigma_2)$
- המצב בשיווי משקל (F – מיני): $dF=0=\left(\frac{\partial F_1}{\partial N_1}\right)dN_1-\left(\frac{\partial F_2}{\partial N_2}\right)dN_1$
  - ✓ הדבר מתאר מעבר של N_1 חלקיקים בין המערכות.

- <u>הגדרת הפוטנציאל הכימי</u>: $\boxed{\mu(\tau,V,N)=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V,S}=-T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}}$
  - ✓ <u>משמעותו</u> של הפוטנציאל הכימי הינו כמות האנרגיה שיש להשקיע על מנת להוסיף חלקיק למערכת (בדומה לאנרגיה פוטנציאלית).
  - ✓ <u>לפוטנציאל הכימי יש יחידות של אנרגיה</u>
  - ✓ בשיווי משקל נקבל: $dF=0=(\mu_1-\mu_2)dN_1 \Rightarrow \mu_1=\mu_2$
  - ✓ במעבר לשיווי משקל החלקיקים עוברים מ- μ גבוה ל- μ נמוך

❖ <u>פוטנציאל כימי של גז אידאלי</u>:

$$\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V}=-\tau\frac{\partial\log Z_N}{\partial N}=-\tau\frac{\partial}{\partial N}\left[N\log Z_1-\log N!\right]=$$

$$\cong-\tau\left[\log Z_1-\log N\right]=-\tau\log\frac{Z_1}{N}=+\tau\log\frac{n_N}{n_Q}$$

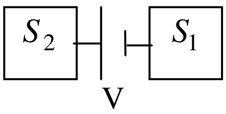
- <u>פוטנציאל כימי פנימי, חיצוני וכללי</u>: $\mu_{tot}=\mu_{ext}+\mu_{\text{int}}$

❖ גז אידאלי בשדה גרביטציה: $\mu_{\text{int}}=\tau\log\frac{n_N}{n_Q}$; $\mu_{ext}=mgh$

בשיווי משקל הפוטנציאל הכימי קבוע ומשתווה בשכבות השונות, לכן:

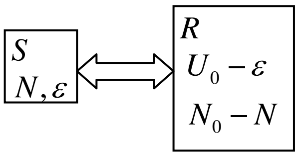
$$\mu_{tot}=\tau\log\frac{n(h)}{n_Q}+mgh=const \Rightarrow n(h)=n_Q\cdot e^{const}\cdot e^{-\frac{mgh}{\tau}}$$

❖ חלקיקים טעונים: $\Delta\mu_{ext}=qV$



ישנו מעבר של חלקיקים כך שנוצרת צפיפות גדולה של אלקטרונים בצד הטעון שלילית. בנוסף את הפוטנציאל הפנימי של המתכת.

<u>פקטור Gibbs</u>



✓ U_0 - אנרגיה כוללת, $S+R$

✓ N_0 - מסי חלקיקים כולל

- מהי הסתברות למצוא את המערכת S עם N חלקיקים ובמצב קוונטי מסוים עם אנרגיה ε_S ?
  - ○ מסי המצבים הכולל בהינתן ε_S,N: $g=g_R(N_0-N,U_0-\varepsilon_S)\cdot 1$
  - ○ אנטרופיה: $g=e^{\sigma}$
  - ○ $\sigma(N_0-N,U_0-\varepsilon_S)=\sigma(N_0,U_0)-N\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N_0}\right)_{U_0}-\varepsilon_S\left(\frac{\partial\sigma}{\partial U_0}\right)_{N_0}$

- פונצית החלוקה: $\boxed{\mathcal{Z}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{s(N)}e^{-\beta(\varepsilon_s-N\mu)}=\sum_N e^{\beta\mu N}Z_N(N,V,\beta)}$
  - ✓ למערכת בת N יכולות להיות s אנרגיות שונות – לסכם את כולן.
- התפלגות גרנד-קנונית עם פקטור Gibbs: $p(N,\varepsilon_0)=\frac{1}{\mathcal{Z}}e^{-\beta(\varepsilon_s-N\mu)}$
- ממוצע של משתנה X: $\langle X\rangle=\frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{N,s}X(N,s)\exp\left[-\beta(\varepsilon_s-N\mu)\right]$
-

- <u>מספר חלקיקים ממוצע</u>:

$$\langle N\rangle=\frac{\sum_{N,s}N\exp\left[-\beta(\varepsilon_s-N\mu)\right]}{\sum_{N,s}\exp\left[-\beta(\varepsilon_s-N\mu)\right]}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\log\mathcal{Z}}{\partial\mu}$$

- השונות (פלקטואציה) של מספר החלקיקים: $\left\langle(\Delta N)^2\right\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\langle N\rangle}{\partial\mu}$
- <u>מקדם הנשירות (fugacity)</u>: $\boxed{\lambda\triangleq e^{\beta\mu}}$
  - ✓ ניתן לכן לרשום את סכום Gibbs: $\boxed{\mathcal{Z}=\sum_{N,s}\lambda^N e^{-\beta\varepsilon_S}}$
  - ✓ מספר חלקיקים הממוצע: $\boxed{\langle N\rangle=\lambda\frac{\partial\log\mathcal{Z}}{\partial\lambda}}$
- <u>אנרגיה ממוצעת של צבר גרנד-קנוני</u>:

$$\boxed{U=\langle E\rangle=\left(\frac{\mu}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}-\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\log\mathcal{Z}=\mu\langle N\rangle-\frac{\partial\log\mathcal{Z}}{\partial\beta}}$$

- <u>דרגות חופש פנימיות בצבר גרנד-קנוני בגבול הקלאסי</u>:
  - ✓ במקרה הרלוונטי היא למשל גז עם 2 אטומים במולקולה
  - ○ ללא דרגות חופש פנימיות מתקיים בגבול הקלאסי $\mathcal{Z}=1+\lambda\exp(-\beta\varepsilon_n)$ כאשר ε_n היא אנרגיה של האורביטל.
  - ○ במקרה שבו קיימות דרגות חופש פנימיות יש להכליל ולסכם גם את כל המצבים הפנימיים (ספין וכדי), כלומר:

$$\mathcal{Z}=1+\lambda\sum_{\text{int}}\exp\left[-\beta(\varepsilon_n+\varepsilon_{\text{int}})\right]=1+\lambda\underbrace{\sum_{\text{int}}e^{-\beta\varepsilon_{\text{int}}}}_{Z_{\text{int}}}\cdot e^{-\beta\varepsilon_n}$$

  - ✓ <u>מסקנה</u>: בכל מקום שהופיע λ כעת יופיע במקומו λZ_{int}
- פונקצית חלוקה של גז עם דרגת חופש: $\mathcal{Z}=1+\lambda e^{-\beta\varepsilon_n}Z_{\text{int}}$
- אכלוס של אורביטל עם אנרגיה ε_n:

$$f_n=\frac{\lambda e^{-\beta\varepsilon_n}Z_{\text{int}}}{1+\lambda e^{-\beta\varepsilon_n}Z_{\text{int}}}\xrightarrow[\lambda e^{-\beta\varepsilon_n}Z_{\text{int}}\ll1]{classical\ case}\lambda e^{-\beta\varepsilon_n}Z_{\text{int}}$$

- הפוטנציאל הכימי: $\mu=\tau\left[\log\frac{n_N}{n_Q}-\log Z_{\text{int}}\right]$
- אנרגיה חופשית פנימית: $F_{\text{int}}=-N\tau\log Z_{\text{int}}$
- אנטרופיה פנימית: $\sigma_{\text{int}}=-\left(\frac{\partial F_{\text{int}}}{\partial\tau}\right)_V$
  - ✓ <u>כל הגדלים עם האינדקס "int" הינם גדלים אדיטיביים</u>, כלומר ע"מ לקבל את הגודל המלא יש לחבר אותם לגודל המקורי הידוע.

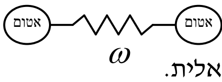
❖ גז המורכב ממולקולות חד אטומיות כאשר ל<u>גרעיני האטומים ספין I.</u> נניח כי לא מופעל שדה מגנטי, לפיכך במצב היסוד יש ניוון $2I+1$.

$$(-I,-I+1,...,-1,0,1,...,I-1,I)$$

לפיכך $Z_{\text{int}}=2I+1$ וכן נקבל: $F_{\text{int}}=-N\tau\log(2I+1)$

$$\sigma_{\text{int}}=-\left(\frac{\partial F_{\text{int}}}{\partial\tau}\right)_V=-N\log(2I+1)\ ,\ \mu=\tau\left[\log\frac{n_N}{n_Q}-\log(2I+1)\right]$$

❖ <u>גז המורכב ממולקולות דו-אטומיות.</u>



את האינטראקציה נמדל ע"י קפיץ אשר מתאר את הפוטנציאל הפרבולי אשר נותן אנרגיה מינימאלית.

✓ <u>דרגת החופש הפנימית ← אוסילטור הרמוני</u> עם תדר ω:

- פונקצית החלוקה: $Z_{\text{int}}=\frac{1}{2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2}}\xrightarrow{k_BT\gg\hbar\omega}\frac{k_BT}{\hbar\omega}$
- $F_{\text{int}}=-N\tau\log Z_{\text{int}}=-N\tau\log\frac{\tau}{\hbar\omega}\Rightarrow\sigma_{\text{int}}=N\left[\log\frac{\tau}{\hbar\omega}+1\right]$
- $C_{\text{int}}=\tau\left(\frac{\partial\sigma_{\text{int}}}{\partial\tau}\right)=N\Rightarrow C_V=\frac{5}{2}N\ ,\ C_p=\frac{7}{2}N$

✓ קיבול החום הפנימי זהה ללחץ ונפח קבוע ועדיין $C_p-C_V=N$

<u>מערכות עם מספר חלקיקים משתנה – תרגול 11</u>

סוג המערכת	פונקצית החלוקה	גדלים תרמודינמיים
האנרגיה ומס' החלקיקים נתונים	לכל מצב אותה הסתברות פונקצית החלוקה קבועה וניתנת לנירמול (ל-1).	$S = k_B \ln \Omega$
מס' החלקיקים והטמפרטורה נתונים	$Z(N,\beta)=\sum_{\varepsilon}\Omega(N,\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}=\sum_{r}e^{-\beta\varepsilon_r}$	$F=-k_BT\ln Z$ $\quad E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$
טמפרטורה ופוטנציאל כימי נתונים	$\mathcal{Z}(\mu,\beta)=\sum_r e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu N_r)}=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\beta\mu N}Z_N(\beta)$	$\Xi=F-\mu N=-k_BT\ln\mathcal{Z}$ $\quad \langle N\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathcal{Z}$ $F=-k_BT\ln\mathcal{Z}+\mu\langle N\rangle$ $\quad E=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\mathcal{Z}+\mu\langle N\rangle$

- <u>פוטנציאל כימי</u>: הפרש פוטנציאל כימי קובע את זרימת החלקיקים (כפי שהפרש טמפרטורות קובע את זרימת החום).

$$\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,S}=-T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}$$

- <u>שיווי משקל דיפוזיבי</u>: החלקיקים מפסיקים לזרום כאשר $\mu_1=\mu_2$
- <u>אפקטיביות מוחלטת/ מקדם הפוגאסיות</u>: $\lambda\equiv e^{\beta\mu}$

❖ <u>נתון גז אידיאלי עם N חלקיקים, חשבו את הפוטנציאל כימי של הגז</u>:

- פונקצית החלוקה לחלקיק בודד $Z_1=Vn_Q \Rightarrow Z_N=\frac{1}{N!}Z_1^N$
- ולכן פונקצית החלוקה הגרנד-קנונית

$$\mathcal{Z}=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\beta\mu N}\frac{Z_1^N}{N!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda n_QV\right)^N}{N!}=e^{\lambda n_QV}$$

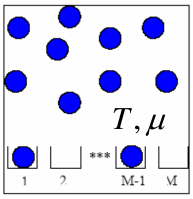
- מספר החלקיקים הממוצע הוא

$$\langle N\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathcal{Z}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\lambda n_QV\right)=\lambda n_QV\Rightarrow\lambda=\frac{\langle N\rangle}{n_QV}=e^{\beta\mu}$$

✓ <u>מסקנה</u>: הפוטנציאל הכימי: $\boxed{\mu=k_BT\ln\frac{\langle N\rangle}{n_QV}=k_BT\ln\frac{n_N}{n_Q}}$

✓ <u>מסקנה</u>: מכאן ברורה הפרופורציונאליות: $\mu\propto n_N,T$

❖ <u>משטחי ספיחה</u>:



נתון משטח ספיחה עם M אתרים אשר נמצא במגע עם גז אידיאלי בעל טמפרטורה ולחץ מסוימים. בכל אתר יכול להימצא חלקיק אחד עם אנרגיה $-\varepsilon$. מהו אחוז האכלוס של האתרים כתלות בלחץ הגז. כיצד משתנה התשובה אם אין הגבלה לכמות החלקיקים שיכולים להיספח לאתר ?

- הגז האידיאלי מהווה אמבט חום וחלקיקים וקובע את הטמפרטורה והפוטנציאל הכימי של המערכת כולה.
- נסתכל על אתר בודד:

$$\mathcal{Z}_1(\mu,\beta)=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\beta\mu N}Z_N=\underbrace{1}_{N=0}+e^{\beta\mu}\underbrace{Z_1}_{N=1}=1+e^{\beta(\mu+\varepsilon)}$$

✓ <u>הערה</u>: הגבול העליון של הסכום הוא בפועל $N=1$ כי זהו מספר החלקיקים המקסימאלי שיכול להיספח לאחד האתרים.

- עבור M אתרים נקבל:

$$\mathcal{Z}_M(\mu,\beta)=\sum_r e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu N_r)}=\sum_{r_1,r_2\cdots r_M}e^{-\beta\left[(\varepsilon_{r1}+\cdots+\varepsilon_{rM})-\mu(N_{r1}+\cdots+N_{rM})\right]}$$

$$=\prod_{i=1}^{M}\sum_{r_i}e^{-\beta(\varepsilon_{r,i}-\mu N_{r,i})}=(\mathcal{Z}_1)^M\quad\Rightarrow\quad\mathcal{Z}_M(\mu,\beta)=\left(1+e^{\beta(\varepsilon+\mu)}\right)^M$$

✓ והתוצאה צפויה כיוון שמדובר ב-M אתרים ב"ת ומובחנים.

- מספר סה"כ החלקיקים הממוצע, אשר נמצא בכל האתרים:

$$\langle N\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\mathcal{Z}_M=\frac{Me^{\beta(\varepsilon+\mu)}}{e^{\beta(\varepsilon+\mu)}+1}=\frac{M}{e^{-\beta(\varepsilon+\mu)}+1}$$

$$\Rightarrow\frac{\langle N\rangle}{M}=\frac{1}{e^{-\beta(\varepsilon+\mu)}+1}=f_{FD}(-\varepsilon)$$

✓ קיבלנו אכלוס יחסי כשל פרמיונים כי למעשה דרשנו אכלוס של לכל היותר חלקיק אחד באתר (מצב) מסוים.

- כעת נציב $p=n\cdot k_BT$; $\mu=k_BT\ln\frac{n_N}{n_Q}\Rightarrow e^{-\beta\mu}=\frac{n_Q}{n}=\frac{n_Qk_BT}{p}$

- $$\Rightarrow\boxed{\frac{\langle N\rangle}{M}=\frac{1}{\frac{k_BTn_Q}{P}e^{-\beta\varepsilon}+1}\Rightarrow\begin{cases}1\ ,\ p\gg k_BTn_Q\\1\ ,\ \varepsilon\gg1\\0\ ,\ T\gg1\end{cases}}$$

✓ ככל שלחץ הגז גדול יותר כך הסיכוי לאכלוס עולה.

✓ המערכת רוצה שאתרי הספיחה יתמלאו כי אז לכל אתר יש אנרגיה $-\varepsilon$ והמערכת מקבלת בסה"כ אנרגיה מינימאלית. ככל ש- ε גדול יותר כך הסיכוי לאכלוס גדל (אנרגיה שלילית יותר)

✓ מצד שני מי שמפריע לספיחה היא הטמפרטורה ולכן אין אכלוס מלא

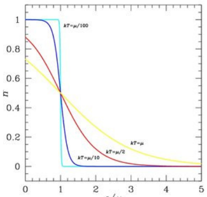
כעת עבור המקרה שמספר החלקיקים שיכולים להיספח לאתר איננו מוגבל:

- פונקצית החלוקה של חלקיקי הגז הזהים בכל אתר: $Z_N=\frac{Z_1^N}{N!}$
- $\mathcal{Z}_1(\mu,\beta)=\sum_{N=0}^{\infty}e^{\beta\mu N}Z_N=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(\lambda Z_1)^N}{N!}=e^{\lambda Z_1}=\exp\left[\lambda e^{\beta\varepsilon}\right]$
- $\mathcal{Z}_M(\mu,\beta)=(\mathcal{Z}_1)^M=\exp\left[M\lambda e^{\beta\varepsilon}\right]$
- $\Rightarrow\langle N\rangle=\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(M\lambda e^{\beta\varepsilon}\right)=M\lambda e^{\beta\varepsilon}$
- $\Rightarrow\boxed{\frac{\langle N\rangle}{M}=\lambda e^{\beta\varepsilon}=\frac{n}{n_Q}e^{\beta\varepsilon}=\frac{P}{k_BTn_Q}e^{\beta\varepsilon}}$

✓ גם פה ההתנהגות דומה, אלא שהאכלוס היחסי איננו מוגבל עד 1.

<u>סוגי חלקיקים בגזים אידיאליים</u>:

- <u>אורביטל</u>: סט המצבים של חלקיק <u>בודד</u> בנפח נתון.
- <u>פרמיונים</u>:
  - ✓ חלקיקים בעלי ספין חצי שלם (אלקטרון, פרוטון, ניוטרון)
  - ✓ <u>חוק האיסור של פאולי</u>: האורביטל יכול להיות מאוכלס ע"י 0 או 1 פרמיונים מאותו סוג.
- <u>בוזונים</u>:
  - ✓ חלקיקים בעלי ספין שלם (פוטון, פונון).
  - ✓ אורביטל יכול להיות מאוכלס ע"י כל מספר מס' שלם $(0,1,2,...)$ של בוזונים מאותו סוג.
- עבור תת-מערכת הכוללת אורביטל <u>מסוים אחד</u>:



<u>התפלגות פרמי-דירק (Fermi-Dirac)</u>

- ✓ ההתפלגות תקפה עבור פרמיונים בלבד.
- נגדיר סכום Gibbs:
(נניח כי אורביטל לא מאוכלס בעל אנרגיה אפס)

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{FD}}=\sum_{r=0}^{1}e^{-\beta(\varepsilon_r-\mu N_r)}=1+e^{-\beta(\varepsilon_1-\mu\cdot 1)}=1+\lambda e^{-\beta\varepsilon_1}$$

- האיכלוס הממוצע של האורביטל:

$$\boxed{f_{FD}(\varepsilon)=\langle N(\varepsilon)\rangle=\lambda\frac{\partial\log\mathcal{Z}_{\mathcal{FD}}}{\partial\lambda}=\frac{\lambda\exp(-\beta\varepsilon)}{1+\lambda\exp(-\beta\varepsilon)}=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}}$$

<u>התפלגות בוזה-אינשטיין (Bose-Einstein)</u>

- ✓ ההתפלגות תקפה עבור בוזונים בלבד.
- ✓ הבוזונים הם בהכרח חלקיקים <u>לא</u> מובחנים.
- סכום גיבס במקרה זה:

$$\mathcal{Z}_{BE}=\sum_{N=0}^{\infty}\lambda^N e^{-\beta\varepsilon N}=\sum_{N=0}^{\infty}\left[\lambda e^{-\beta\varepsilon}\right]^N=\frac{1}{1-\lambda e^{-\beta\varepsilon}}$$

- האכלוס הממוצע של האורביטל:

$$\boxed{f_{BE}(\varepsilon)=\langle N(\varepsilon)\rangle=\lambda\frac{\partial\log\mathcal{Z}_{BE}}{\partial\lambda}=\frac{\lambda\exp(-\beta\varepsilon)}{1-\lambda\exp(-\beta\varepsilon)}=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}}$$

<u>הגבול הקלאסי (התפלגות מקסוול-בולצמן)</u>

- ✓ בגבול הקלאסי כל האורביטלים כמעט ריקים – אכלוס קרוב לאפס, כלומר: $e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\gg 1$
- ✓ בגלל האכלוס הנמוך, N החלקיקים יתפלגו על הרבה מאד אורביטלים.
- ✓ בגבול זה מקבלים שוויון פונקציות חלוקה: $\mathcal{Z}_{FD}\simeq\mathcal{Z}_{BE}$ ולכן גם

שוויון התפלגויות: $\boxed{f_{FD}(\varepsilon)\simeq f_{BE}(\varepsilon)\triangleq f_{MB}(\varepsilon)=\exp\left[\beta(\mu-\varepsilon)\right]}$

- <u>פוטנציאל כימי בגבול הקלאסי</u> (בלבד):
- נדרוש כי סך האיכלוס יתן את סך החלקיקים: $\sum_S f_{MB}(\varepsilon_S)=N$
- $N=\lambda\sum_S e^{-\beta\varepsilon_S}=e^{\beta\mu}\cdot Z_1\ \Rightarrow\ \mu=\tau\left(\log\frac{N}{Z_1}\right)=\tau\log\left(\frac{n_N}{n_Q}\right)$
- עבור הגבול הקלאסי יש כבר טיפול נכון בחלקיקים זהים.

- <u>n חלקיקים ב- m מצבים</u>:

א) שונים: $\Omega=m^n$.

ב) בוזונים: $\Omega=\binom{m+n-1}{n}=\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$

ג) פרמיונים: $\Omega=\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$

<u>פרמיונים – תרגול 12</u>

- <u>פונקציות אכלוס (של מצב קוונטי)</u>

א. <u>עבור פרמיונים (פרמי-דירק)</u>: $f_{FD}=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$

ב. <u>עבור בוזונים (בוזה-אינשטיין)</u>: $f_{BE}=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$

- ✓ בטמפ' אפס החלקיקים מאכלסים את הרמה הנמוכה ביותר האפשרית:
א. בוזונים – כולם ברמת היסוד.
ב. פרמיונים – עפ"י חוק האיסור של פאולי, מאכלסים בצפיפות מרבית.
- ✓ <u>עבור פוטונים ופונונים</u> $\mu=0$ <u>כי אין מגבלה על מספר החלקיקים.</u>

- <u>מספר חלקיקים ממוצע</u> $(N\gg 1)$: $N=\int_0^\infty g(\varepsilon)f_{FD/BE}(\varepsilon)d\varepsilon$
- <u>אנרגיה כוללת</u> $(N\gg 1)$: $E=\int_0^\infty \varepsilon\cdot g(\varepsilon)f_{FD/BE}(\varepsilon)d\varepsilon$
- <u>אנרגית פרמי</u>: $\varepsilon_F\equiv\mu(T=0)$
  - ✓ זוהי גם האנרגיה הגבוהה ביותר של אלקטרון בטמפרטורה אפס.

❖ נתונה מערכת עם 3 מצבי אנרגיה ו-2 חלקיקים. חשבו את מספר מצבי המערכת עבור: א) חלקיקים מובחנים, ב) בוזונים ג) פרמיונים.

פרמיונים			בוזונים			חלקיקים מובחנים (קלאסיים)		
x	x		x	x		x	y	
x		x	x		x	y	x	
	x	x		x	x	x		y
			xx			y		x
				xx			x	y
					xx		y	x
						xy		
							xy	
								xy
סה"כ 3 מצבים			סה"כ 6 מצבים			סה"כ 9 מצבים		

- רשמו ביטוי עבור מס' חלקיקים והאנרגיה של הפרמיונים בטמפ' אפס.

<u>פתרון</u>: נסתכל על פונקצית פרמי דירק. עבור $T=0$ זוהי מדרגה הפוכה. לכן האינטגרלים מקבלים את הצורה:

$$N=\int_0^\infty g(\varepsilon)f_{FD}(\varepsilon)d\varepsilon\underset{T=0}{=}\int_0^{\varepsilon_F}g(\varepsilon)d\varepsilon\quad;\quad E_{T=0}=\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon\cdot g(\varepsilon)d\varepsilon$$

ועבור חלקיק בודד:

$$\langle\varepsilon\rangle=\frac{E}{N}=\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon\cdot g(\varepsilon)d\varepsilon\cdot\left(\int_0^{\varepsilon_F}g(\varepsilon)d\varepsilon\right)^{-1}$$

- חשבו את <u>אנרגית פרמי של גז אלקטרונים תלת-מימדי</u>: עם 14 חלקיקים ועם N חלקיקים.

<u>פתרון</u>:

$$g_e(\varepsilon)=2g(\varepsilon)=\frac{V}{2\pi^2\hbar^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}\ \Rightarrow N=\frac{V}{3\pi^2\hbar^3}(2m)^{\frac{3}{2}}(\varepsilon_F)^{3/2}$$

ולכן נקבל את רמת פרמי: $\boxed{\varepsilon_{F,3D}=\frac{1}{2m}\left(\frac{3\pi^2\hbar^3N}{V}\right)^{2/3}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{3N}{\pi}\right)^{2/3}}$

ובאופן דומה: $\boxed{\varepsilon_{F,2D}=\frac{\pi\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{A}\right)\ ;\ \varepsilon_{F,1D}=\frac{\pi^2\hbar^2}{8m}\left(\frac{N}{L}\right)^2}$

- בשביל 14 חלקיקים מצטרך לרשום את המצבים בצורה מפורשת, מכיוון שמדובר במספר חלקיקי קטן. צריך לרשום את כל המצבים עד למצב פרמי, כלומר $n_x^2+n_y^2+n_z^2\le n_F^2$.

אינדקס מצב n^2	ניוון	מצבים (n_x,n_y,n_z)
3	$1\times2=2$	(1,1,1)
6	$3\times2=6$	(1,1,2) (1,2,1) (2,1,1)
9	$3\times2=6$	(1,2,2) (2,1,2) (2,2,1)
11	$3\times2=6$	(1,1,3) (1,3,1) (3,1,1)

הניוון הינו מספר האלק' אשר יכולים לאכלס את רמת האנרגיה מסוימת.

<u>הערה</u>: ישנה הכפלה פי-2 בגלל ספין האלקטרון.

כל ה-14 אלקטרונים נכנסים בדיוק עד לרמה $n^2=9$ לכן $\varepsilon_F=9\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

פיתוח סומרפלד – תרגול 13

✓ **המטרה: לחשב פוטנציאל כימי, האנרגיה וקיבול החום של גז פרמיונים בטמפרטורות נמוכות.**

✓ רעיון מנחה: בטמפ' נמוכות פונקצית האכלוס בקירוב מדרגה וניתן לפתח את האינטגרלים לטורים.

○ יש לחשב את האינטגרלים מהצורה: $\boxed{I=\int_0^\infty H(\varepsilon) f_{FD}(\varepsilon-\mu)d\varepsilon}$

○ נגדיר $K(\varepsilon)\equiv\int_{-\infty}^{\varepsilon}H(\varepsilon')d\varepsilon'$ (*) ונבצע אינטגרציה בחלקים:

$$I=\cancel{\left[K(\varepsilon)f_{FD}(\varepsilon-\mu)\right]_{-\infty}^{\infty}}+\int_0^\infty K(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f}{\partial\varepsilon}\right)d\varepsilon$$

○ כמו כן $\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)=\frac{\beta e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}{\left(e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1\right)^2}=\frac{\beta}{4\cosh^2\frac{\beta}{2}(\varepsilon-\mu)}$

○ וזאת היא פונקצית פיק סביב ל- μ. לכן אם $K(\varepsilon)$ חלקה באזור μ, רוב התרומה לאינטגרל תהיה מאזור זה.

○ נפתח את $K(\varepsilon)$ לטור טיילור סביב μ: $K(\varepsilon)=\sum_{n=0}^\infty \frac{K^{(n)}(\mu)}{n!}(\varepsilon-\mu)^n$

○

$$I=\sum_{n=0}^\infty \frac{K^{(n)}(\mu)}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\varepsilon-\mu)^n\,d\varepsilon}{4\cosh^2\frac{\beta}{2}(\varepsilon-\mu)}\underbrace{=}_{\substack{\text{only even}\\ \text{powers remain}}}\sum_{n=0}^\infty (k_BT)^{2n}\frac{K^{(2n)}(\mu)}{(2n)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2n}dx}{4\cosh^2\frac{x}{2}}$$

• $$\boxed{I=K(\mu)+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2K''(\mu)+\frac{7\pi^4}{360}(k_BT)^4K^{(4)}(\mu)+O(T^6)}$$

○ כעת נשאר לפתח רק את האינטגרל שנשאר (*), בהנחה כי עבור טמפ' קטנות ניתן לפתח את μ סביב אנרגית פרמי:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\mu}H(\varepsilon)d\varepsilon\cong\int_{-\infty}^{\varepsilon_F}H(\varepsilon)d\varepsilon+(\mu-\varepsilon_F)H(\varepsilon_F)}$$

○ כעת ניתן לחשב את הגדלים הרצויים: $N=\int_{-\infty}^{\infty}g(\varepsilon)f_{FD}(\varepsilon-\mu)d\varepsilon\simeq$

$$\simeq\int_0^{\varepsilon_F}g(\varepsilon)d\varepsilon+g(\varepsilon_F)(\mu-\varepsilon_F)+\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2g'(\varepsilon_F)=N+\ldots$$

• פוטנציאל כימי:

$$\boxed{\mu=\varepsilon_F-\frac{\pi^2}{6}(k_BT)^2\frac{g'(\varepsilon_F)}{g(\varepsilon_F)}\underset{3D}{\Rightarrow}(\mu-\varepsilon_F)\varepsilon_F=-\frac{\pi^2\tau^2}{12}}$$

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\varepsilon\cdot g(\varepsilon)}_{H(\varepsilon)}f_{FD}(\varepsilon-\mu)\simeq$$

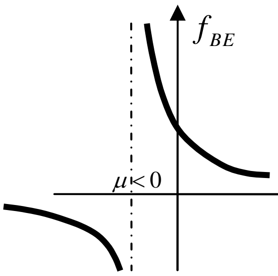
$$\simeq\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon g(\varepsilon)d\varepsilon+\varepsilon_F g(\varepsilon_F)(\mu-\varepsilon_F)+\frac{\pi^2}{6}\tau^2\left[\varepsilon_F g'(\varepsilon_F)+g(\varepsilon_F)\right]$$

• אנרגיה: $\boxed{E=E_0+\frac{\pi^2}{6}\tau^2g(\varepsilon_F)\quad,\quad E_0=\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon\cdot g(\varepsilon)d\varepsilon}$

• קיבול חום: $\boxed{C_V=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=\frac{\pi^2k_B^2}{3}g(\varepsilon_F)T}$

✓ קיבול חום של מתכות מורכב מתרומת הסריג ותרומת האלקטרונים: $C_V=AT+BT^3$ - בטמפ' החדר קיבול החום האלקטרוני זניח, אולם בטמפרטורות קטנות זהו האיבר הדומיננטי.

עיבוי בוזה-אינשטיין – תרגול 14



• פונקצית האכלוס: $\boxed{f_{BE}(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}}$

✓ מכיוון שהפונקציה מציינת מספר חלקיקים ממוצע במצב קוונטי, היא לא יכולה לקבל ערכים שליליים ולכן $\Leftarrow$ $\mu\le0$. (אם נדייק $\mu\le\varepsilon_0$)
אך עבור בוזונים מתקיים כי $\varepsilon_0=0$.

• **עיבוי בוזה אינשטיין: קיימת טמפרטורה קריטית השונה מאפס, אשר עבורה מצב היסוד מאוכלס מקרוסקופית.** נביט על מס' החלקיקים הכולל:

$$N=N_0+N_e=N_0+\int_0^\infty g(\varepsilon)f_{BE}(\varepsilon-\mu)d\varepsilon$$

כאשר N_0 - מס' חלקיקים במצב היסוד.

✓ N_0 מופרד מן האינטגרל, כי יהיה מקרוסקופי ובאינטגרל 0 ($g(0)=0$).

○ N_0 לפי ההגדרה $N_0=\frac{1}{e^{-\beta\mu}-1}\Leftarrow e^{-\beta\mu}=\frac{1}{N_0}+1\underbrace{\cong}_{N_0\gg1}1$ ולכן

$$N_e=\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}\cong\int_0^\infty\frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}=\frac{V(2m)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}=$$

○ $$=\frac{V(2m\cdot k_BT)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}dx}{e^x-1}=\frac{V(2m\cdot k_BT)^{3/2}}{4\pi^2\hbar^3}\cdot1.306\sqrt{\pi}=$$

$$=\frac{1.306V}{4}\left(\frac{2m\cdot k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}=2.612\cdot n_QV$$

• כעת נחשב את הטמפרטורה הקריטית, אז מתקיים $N_e=N$ לכן נקבל:

$$N=N_e=2.612V\left(\frac{m\cdot k_BT_C}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\Rightarrow\boxed{T_C=\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{N}{2.612V}\right)^{2/3}}$$

✓ T_C - תלויה בצפיפות $n=\frac{N}{V}$.

✓ ככל שהצפיפות גדולה יותר, כך הטמפרטורה הקריטית עולה.

○ בנוסף ניתן לפשט את תלותו של N_e בטמפרטורה:

$$N=\frac{N_e}{N}=\frac{2.612V\left(\frac{2m\cdot k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}{2.612V\left(\frac{2m\cdot k_BT_C}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}=\left(\frac{T}{T_C}\right)^{3/2}$$

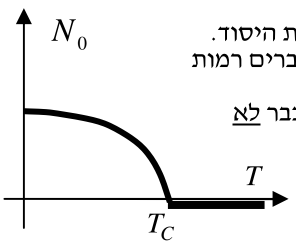
• לכן עבור $N_0(T)$:

$$\boxed{N_0=N-N_e=N\left(1-\frac{N_e}{N}\right)=N\left[1-\left(\frac{T}{T_C}\right)^{\frac{3}{2}}\right]}$$

✓ עבור $T=T_C$, N_0 מתאפס, כלומר אין חלקיקים ברמת היסוד כלל.

✓ עבור $T=0$ - $N_0=N$, כלומר כל החלקיקים ברמת היסוד.

• סיכום: בטמפרטורה אפס כל החלקיקים ברמת היסוד. עם עליית הטמפרטורה החלקיקים עוברים רמות גבוהות יותר. בטמפרטורה קריטית כל החלקיקים כבר לא ברמת היסוד.



✓ התופעה מתממשת רק במימד 3.

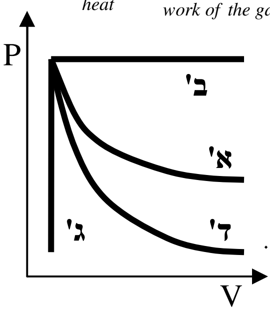
✓ התופעה קיימת רק עבור חלקיקים בעלי מסה ולא מתרחשת בפוטונים.

<u>תהליכים בגזים אידיאליים קלאסיים</u>

✓ ראשית מציין כי אנו דנים בתהליכים עבורם N קבוע ⇐ $dN=0$

- דיפרנציאל האנרגיה המלא: $dU=\underbrace{\tau\cdot d\sigma}_{\substack{dQ\\ heat}}-\underbrace{p\cdot dV}_{\substack{dW\\ work\ of\ the\ gas}}=\underbrace{C_V\cdot d\tau}_{\substack{system\ energy\\ change}}$

- ישנם 4 תהליכים:
  א. תהליך איזו-תרמי – טמפרטורה קבועה.
  ב. תהליך איזו-ברי – לחץ קבוע.
  ג. תהליך איזו-כורי – נפח קבוע.
  ד. תהליך אדיאבטי – אנטרופיה קבועה
  (אין כניסה ויציאה של חום מהמערכת)



✓ הגדרת הקשר P-V מגדיר היטב את המצב.

- <u>נתבסס כאן על חוק הגזים</u>: $pV=N\tau$

- **<u>תהליך איזותרמי</u> ($\tau=k_BT$ קבוע):**
  - $\boxed{pV=Nk_BT=const}$
  - $U=\frac{3}{2}N\tau \;\Rightarrow\; dU=0 \;\Rightarrow\; dQ=dW=p\cdot dV=\frac{N\tau}{V}dV$
  - העבודה שהמערכת עושה על הגז: $\boxed{W=Q=N\tau\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V}=N\tau\log\frac{V_2}{V_1}}$

- **<u>תהליך איזוברי</u> (p - קבוע):**

✓ נפריד את החישוב לשתי תרומות בלתי תלויות (C_V - אינו תלוי בטמפ')
  - העבודה לשינוי נפח: $dW=p\cdot dV \;\Rightarrow\; \boxed{W=\int_{V_1}^{V_2}p\cdot dV=p\left(V_2-V_1\right)}$
  - $C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)_V \;\Rightarrow\; dU=C_Vd\tau \;\Rightarrow\; \int dU=\Delta U_V=k_BC_V\int_{T_1}^{T_2}dT$
  - השינוי באנרגיה של הגוף (לנפח קבוע): $\boxed{U_{tot}=\Delta U_V=k_BC_V\left(T_2-T_1\right)}$

✓ כאן יש שימוש ב- C_V ולא ב- C_p כדי לקחת בחשבון את כל האנרגיה שכולה הולכת כ- dQ ולא עושה עבודה על הנפח (כאילו $dV=0$).

$Q=\Delta U_V+W=p\left(V_2-V_1\right)+k_BC_V\left(T_2-T_1\right)=\ldots\left(pV=Nk_BT\right)$
  - $=p\left(V_2-V_1\right)+k_BC_V\frac{p}{Nk_B}\left(V_2-V_1\right)=p\left(V_2-V_1\right)\left(1+\frac{C_V}{N}\right)=$

$=p\left(V_2-V_1\right)\left(\frac{N+C_V}{N}\right)=p\left(V_2-V_1\right)\left(\frac{C_p}{N}\right)$
  - $\boxed{Q=p\left(V_2-V_1\right)\left(1+\frac{C_V}{N}\right)=p\left(V_2-V_1\right)\left(\frac{C_p}{N}\right)=C_p\left(T_2-T_1\right)}$

- **<u>תהליך איזוכורי</u> (V – קבוע):**
  - העבודה המבוצעת: $V-const \;\Rightarrow\; dV=0 \;\Rightarrow\; \boxed{dW=0}$
  - השינוי הכללי באנרגיה: $\boxed{\Delta U_{tot}=Q=k_BC_V\int_{T_1}^{T_2}dT=k_BC_V\left(T_2-T_1\right)}$

✓ ושוב רק נזכיר כי ההנחה היא כי $C_V=\frac{3}{2}N$ אינו תלוי בטמפ'.

-

- **<u>תהליך אדיאבטי</u> (σ - קבועה):**
  - $\sigma-const \;\Rightarrow\; d\sigma=0 \;\Rightarrow\; dQ=0 \;\Rightarrow\; dU=-dW$
  - $\Rightarrow dU=k_BC_VdT=-p\cdot dV=-\frac{Nk_BT}{V}dV \;\Rightarrow\; \frac{dT}{T}=-\frac{N}{C_V}\frac{dV}{V}$
  - מתקיים $C_p=C_V+N$, $\boxed{\gamma\equiv\frac{C_p}{C_V}>1}$ ⇐ $\frac{dT}{T}=-\left(\gamma-1\right)\frac{dV}{V}$

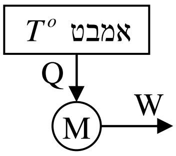
✓ עבור גז אידיאלי מתקיים: $\gamma_{idial\ gas}=\frac{C_p}{C_V}=\frac{\frac{5}{2}N}{\frac{3}{2}N}=\frac{5}{3}$
  - מאינטגרציה: $\log\frac{T_2}{T_1}=\log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \;\Rightarrow\; \boxed{TV^{\gamma-1}=const}$
  - בהצבת $T=\frac{pV}{Nk_B}$ <u>בגז אידיאלי</u> נקבל גם כי: $\boxed{PV^{\gamma}=const}$
  - $(*)\quad p_1V_1^{\gamma}=pV^{\gamma} \;\Rightarrow\; p=p_1V_1^{\gamma}V^{-\gamma}$

$W=\int_{V_1}^{V_2}p\cdot dV\underset{(*)}{=}p_1V_1^{\gamma}\int_{V_1}^{V_2}dV\cdot V^{-\gamma}=p_1V_1^{\gamma}\cdot\left.\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right|_{V_1}^{V_2}=$
  - $=p_1V_1^{\gamma}\cdot\frac{V_2^{1-\gamma}-V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma}=\frac{p_1V_1^{\gamma}V_2^{1-\gamma}-p_1V_1}{1-\gamma}=\frac{p_2V_2^{\gamma}V_2^{1-\gamma}-p_1V_1}{1-\gamma}=$

$=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-\gamma}\underset{\left(pV=Nk_BT\right)}{=}\frac{Nk_B}{1-\gamma}\left(T_2-T_1\right)$
  - ואם נסכם, קיבלנו: $\boxed{W=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{1-\gamma}=\frac{Nk_B}{1-\gamma}\left(T_2-T_1\right)=-U}$

$\boxed{Q=0}$
  -

מנועים, מקררים והחוק השני של תרמודינמיקה



- מנוע הינו מכונה מחזורית אשר מפיקה עבודה מחום.

✓ מה שנכנס למנוע תמיד יוצא ממנו (שימור אנרגיה).

- עקרון יסוד : לא ניתן להפוך את כל החום המסופק למנוע לעבודה (לעולם אינו אידאלי).
- תהליך מחזורי – בתום כל מחזור המנוע M חוזר למצב מקרוסקופי התחלתי, והאנטרופיה של הסביבה לא משתנה (הסביבה היא האמבט המספק את החום)
- עפ"י החוק השני של תרמודינאמיקה $\Delta S \ge 0$ (האנטרופיה חייבת לעלות). שינוי האנטרופיה בתום מחזור של המנוע הוא שינוי באנטרופית האמבט.

הוכחה : (*) - נניח בשלילה כי $W = Q$ - כל החום הופך לעבודה.

$$-dQ \underset{(**)}{=} TdS \underset{T-const}{\Rightarrow} -Q = \int_{S_1}^{S_2} TdS = T\Delta S \Rightarrow \Delta S = -\frac{Q}{T}$$

(**) - שלילי כי $Q < 0$, כמות החום שעברה למנוע, עזבה את האמבט.

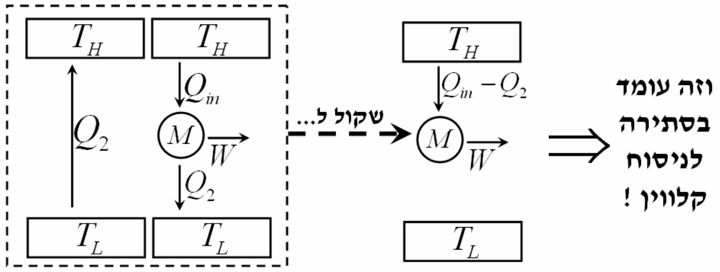
$$0 \le \Delta S = -\frac{Q}{T} \underset{(*)}{=} -\frac{W}{T} \Rightarrow W \le 0$$ - סתירה

- עקרון Kelvin : לא יתכן תהליך מחזורי שיהפוך לעבודה את כל החום המופק מאמבט אחד.
- עקרון Clausius : לא יתכן תהליך מחזורי שבו יעבור החום מאמבט אחד לאמבט אחר, חם ממנו, מבלי שתושקע עבודה בתהליך.

❖ פעולת המזגן מעבירה חום מהחדר הקר אל הסביבה החמה. לצורך כך המזגן צורך אנרגיה (ומשקיע עבודה).

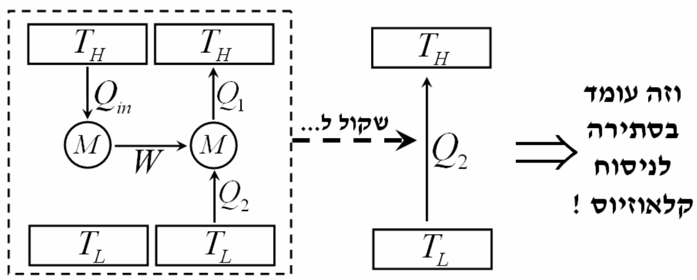
- הוכחת השקילות של העקרונות :

← נניח בשלילה כי עקרון Clausius לא מתקיים.

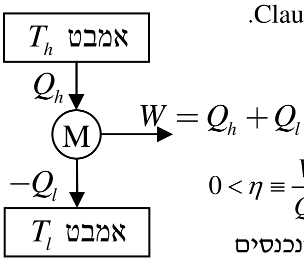


הצירוף של שתי המערכות הופך את כל החום שמועבר מהאמבט החם לעבודה – בניגוד לעקרון Kelvin.
המנוע מנתק אותנו מהאמבט הקר (בכך שמחזיר לו את אותו החום בדיוק) לכן יש הפקת עבודה מחומו של אמבט אחד – שוב סתירה ל- Kelvin.

→ נניח בשלילה כי עקרון Kelvin לא מתקיים.



הצירוף של שתי המנות מאפשר העברת חום Q_2 מהאמבט הקר אל האמבט החם מבלי להשקיע עבודה בניגוד לעקרון Clausius.



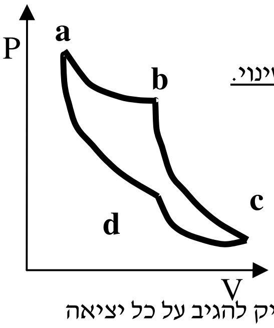
- נצילות של מכונות :

הנצילות של מנוע מוגדרת ע"י :

$$0 < \eta \equiv \frac{W}{Q_{in}} = \frac{Q_{in}+Q_{out}}{Q_{in}} = 1+\frac{Q_{out}}{Q_{in}} = 1-\frac{|Q_l|}{Q_h} \le 1$$

✓ כל ה- Q-ים מוגדרים חיובית עבור אלה הנכנסים למנוע $Q_h > 0$ ושלילית אם יוצאים ממנו, לכן : $Q_l < 0 \Leftrightarrow -Q_l > 0$

מכונת קרנו



נתבונן בתהליך הפיך שהאנטרופיה בסיומו ללא שינוי.

$a \to b$ - איזותרמה T_h - אילוץ חום גבוה.

$b \to c$ - אדיאבטה.

$c \to d$ - איזותרמה T_l - אילוץ חום נמוך.

$d \to a$ - אדיאבטה.

✓ השטח הכלוא ע"י הגרף הינו עבודת התהליך.

✓ התהליך איטי (אינסופית) כדי שהמערכת תספיק להגיב על כל יציאה קטנה משיווי משקל, בכל רגע ורגע.

○ ע"י מה שידוע על התהליכים האדיאבטיים והאיזותרמיים נחשב את Q ו- W - ומשם נקבל עפ"י ההגדרה את הנצילות η :

○ עבור התהליך הראשון (הפקת חום מאמבט חם) : $Q_h = N\tau \log\frac{V_b}{V_a}$

○ העבודה הכוללת : $W = W_{ab}+W_{bc}+W_{cd}+W_{da} =$

$$= Nk_B\left[T_h\log\frac{V_b}{V_a}+T_l\log\frac{V_d}{V_c}\right]+\frac{Nk_B}{1-\gamma}\cancel{\left[T_l-T_h+T_h-T_l\right]}$$

✓ נשים לב כי תהליכים אדיאבטיים מבטלים אחד את השני מבחינת עבודה. (רק כאשר יש שילוב של תהליכים איזותרמיים לפני ואחרי).

- נקבל את הנצילות : $$\eta = \frac{W}{Q_h} = 1+\frac{T_l}{T_h}\frac{\log\frac{V_d}{V_c}}{\log\frac{V_b}{V_a}}$$

○ נשתמש ב- $TV^{\gamma-1} = const$ עבור התהליכים האדיאבטיים ונקבל :

$$\begin{cases}T_hV_b^{\gamma-1}=T_lV_c^{\gamma-1}\\ T_hV_a^{\gamma-1}=T_lV_d^{\gamma-1}\end{cases} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a}=\frac{V_c}{V_d} \Rightarrow \boxed{\eta_C=\frac{W}{Q_h}=1-\frac{T_l}{T_h}}$$

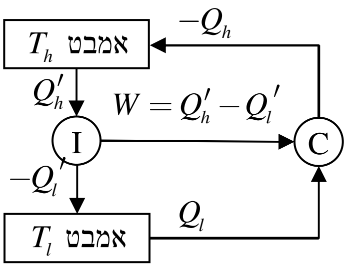
✓ באופן תיארטי מהנוסחה, קיימות טמפרטורות שליליות, אך הדבר יתקבל כאשר יש חסם עליון לאנרגיה ואנו לא נדון במקרים כאלה.

- משפט: לא יתכן מנוע הפועל בין אמבטי חום בטמפ' T_l, T_h המפיק עבודה עם נצילות גבוהה מ- $\boxed{\eta_C = 1-\frac{T_l}{T_h}}$.

○ הוכחת המשפט : יהי I מנוע הפועל בין אמבטי החום כמפורט :

○ נפעיל מנוע קרנו בין אותם אמבטי החום.

○ המנוע יופעל בצורה הפוכה.



○ $-Q_h = Q_h' + Q_l' + Q_l$

$$\Rightarrow \underbrace{-Q_l'-Q_l}_{\text{accepted by the cold bath}} = \underbrace{Q_h'+Q_h}_{\text{given by the hot bath}}$$

○ לכן הצירוף של שתי המכונות מעביר כמות חום השווה ל- $Q_h'+Q_h$ מהמאגר החם למאגר הקר, בלי השקעת עבודה.

○ עפ"י עקרון Clausiu : $Q_h'+Q_h \ge 0$, לפיכך עבור היעילות של המכונה I מתקיים : $$\eta_I = \frac{W}{Q_h'} \le -\frac{W}{Q_h} = \eta_C = 1-\frac{T_l}{T_h}$$

✓ רק עבור $T_l = 0$ הנצילות תהיה אידאלית, כלומר $\eta_C = 1-\frac{\cancel{T_l}}{\cancel{T_h}} = 1$.

✓ **מסקנה: לכל המנועים הפועלים בין אמבטי החום המבוססים על תהליך הפיך, מתקיים:** $\eta \le 1-\frac{T_l}{T_h}$

סטטיסטיקה של מל"מ

- בטמפרטורה אפס E_F הינו באמצע הפס האסור.
- ככל שמעלים את הטמפרטורה כך יותר אלקטרונים יעברו לפס ההולכה.
- שיטה נוספת להעלאת האיכלוס הינה להוסיף זיהומים.

- מושגים בסיסיים:
- n_e - צפיפות האלקטרונים בפס ההולכה.
- n_h - צפיפות החורים בפס הערכיות.
- Donor – תורם – אטום שיכול לשחרר אלקטרון לפס ההולכה.
- Acceptor – נוטל – אטום שיכול לקשור אלקטרון מפס הערכיות ובכך ליצור "חור".
- n_d^+ - ריכוז התורמים (donors) הטעונים חיובית (מיוננים)
- n_a^- - ריכוז הנוטלים (acceptors) הטעונים שלילית (מיוננים).
- **נגדיר את הפרש הריכוזים הקובע את סוג המל"מ:** $\boxed{\Delta n \equiv n_d^+ - n_a^-}$
- דרישה לניטרליות חשמלית: $\boxed{\Delta n \equiv n_d^+ - n_a^- = n_e - n_h}$
- סוג המל"מ: **סוג N** - $\Delta n > 0$ **סוג P** - $\Delta n < 0$
- רמת פרמי: הפוטנציאל הכימי μ במל"מ זוהי רמת פרמי וסימונה E_F
- אכלוס האלקטרונים:
$$f_e(\varepsilon) = f_{FD}(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$
- אכלוס החורים:
$$f_h(\varepsilon) = 1 - f_e(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\mu-\varepsilon)}+1}$$
- מספר כולל של אלקטרונים וחורים:
$$N_e = \sum_{\substack{Conduction\\Band}} f_e(\varepsilon) \;;\; N_h = \sum_{\substack{Valence\\Band}} f_h(\varepsilon)$$
- הגבול הקלאסי:
$$f_e(\varepsilon) \ll 1 \;\Rightarrow\; f_e(\varepsilon) = f_{MB}(\varepsilon) = e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}$$
$$f_h(\varepsilon) \ll 1 \;\Rightarrow\; f_h(\varepsilon) = 1 - f_e(\varepsilon) = e^{-\beta(\mu-\varepsilon)}$$
- צפיפות האלקטרונים בפס ההולכה:
$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{1}{V}\sum_{CB} e^{-\beta(\varepsilon-\mu)} = \exp\left[-\beta(\varepsilon_c-\mu)\right]\underbrace{\frac{1}{V}\sum_{CB} e^{-\beta(\varepsilon-\varepsilon_c)}}_{\triangleq n_c}$$

ולכן נקבל: $\boxed{n_e = n_c \cdot \exp\left[-\beta(\varepsilon_c-\mu)\right]}$

- צפיפות החורים בפס הערכיות:
$$n_h = \frac{N_h}{V} = \frac{1}{V}\sum_{VB} e^{-\beta(\mu-\varepsilon)} = \exp\left[-\beta(\mu-\varepsilon_v)\right]\underbrace{\frac{1}{V}\sum_{VB} e^{-\beta(\varepsilon_v-\varepsilon)}}_{\triangleq n_v}$$

ולכן נקבל: $\boxed{n_h = n_v \cdot \exp\left[-\beta(\mu-\varepsilon_v)\right]}$

- קירוב המסה האפקטיבית:
$$\boxed{n_c = 2\left(\frac{m_e^*\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \;;\; n_v = 2\left(\frac{m_h^*\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}$$

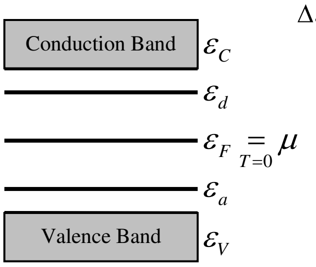
✓ m_e^* - מסה אפקטיבית של אלקטרון בפס ההולכה.
✓ m_h^* - מסה אפקטיבית של חור בפס הערכיות.
✓ קיבלנו למעשה צורה זהה לצפיפות הקוונטית עד כדי המסה.

- ריכוז אינטרינסי בגבול הקלאסי: $\boxed{n_e \cdot n_h = n_c n_v e^{-\beta\varepsilon_g} \triangleq n_i^2}$

כאשר פער האנרגיה מוגדר ע"י: $\varepsilon_g \equiv \varepsilon_c - \varepsilon_v$

✓ נשים לב כי קשר זה אינו תלוי בפוטנציאל הכימי μ.
✓ הקשר נכון גם בנוכחות זיהומים, אך יש לדרוש קירוב קלאסי.

- הפוטנציאל הכימי עבור מל"מ אינטרינסי (ללא זיהומים):
  - ללא זיהומים ועפ"י התנאי לניטרליות:
  $$\Delta n \equiv n_d^+ - n_a^- = 0 - 0 = 0 = n_e - n_h \;\Rightarrow\; \boxed{n_e = n_h = n_i}$$
  - $$n_{e,i} = n_i = n_c \cdot \exp\left[-\beta(\varepsilon_c-\mu_i)\right] = (n_c n_v)^{1/2}\exp\left(-\frac{\beta\varepsilon_g}{2}\right)$$
  - $$n_{h,i} = n_i = n_v \cdot \exp\left[-\beta(\mu_i-\varepsilon_v)\right] = (n_c n_v)^{1/2}\exp\left(-\frac{\beta\varepsilon_g}{2}\right)$$
  - $$\Rightarrow -\beta(\varepsilon_c-\mu_i) = \log\left[\left(\frac{n_v}{n_c}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\beta\varepsilon_g}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\log\frac{n_v}{n_c} - \frac{\beta\varepsilon_g}{2}$$
  - $$\Rightarrow -\beta(\varepsilon_c-\mu_i) = \log\left[\left(\frac{n_v}{n_c}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{\beta\varepsilon_g}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\log\frac{n_v}{n_c} - \frac{\beta\varepsilon_g}{2}$$
  - $$\Rightarrow \mu_i = \frac{1}{2}\tau\log\frac{n_v}{n_c} - \frac{\varepsilon_g}{2} + \varepsilon_c = \frac{1}{2}\tau\log\frac{n_v}{n_c} - \frac{\varepsilon_c-\varepsilon_v}{2} + \varepsilon_c$$
  - ולכן מקבלים: $$\boxed{\mu_i = \frac{1}{2}\tau\log\frac{n_v}{n_c} + \frac{\varepsilon_c+\varepsilon_v}{2} = \frac{3}{4}\tau\log\frac{m_h^*}{m_e^*} + \frac{\varepsilon_c+\varepsilon_v}{2}}$$
- מל"מ עם זיהומים:
  - נניח כי כל הסיגים מיוננים: כל התורמים D^+, כל הנוטלים A^-.
  - מהניטראליות החשמלית: $$n_e - n_h = n_e - \frac{n_i^2}{n_e} = n_d^+ - n_a^- \equiv \Delta n$$
  - הפתרון: $$\Rightarrow n_e\Delta n = n_e^2 - n_i^2 \Rightarrow n_e = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(\Delta n)^2 + 4n_i^2} + \Delta n\right]$$
  - ובאופן דומה: $$n_h = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(\Delta n)^2 + 4n_i^2} - \Delta n\right]$$
- הגדרה: אם $|\Delta n| \gg n_i$ אנו אומרים כי המל"מ אקסטרינסי
- בגבול האקסטרינסי:
$$\boxed{\begin{cases} n_e = \Delta n \;;\; n_h = \dfrac{n_i^2}{n_e} \;,\; N-type \\ n_e = -\dfrac{n_i^2}{n_h} \;;\; n_h = \Delta n \;,\; P-type \end{cases}}$$
- רמות של זיהומים:
  - מתי ניתן להניח בקירוב כי כל הזיהומים מיוננים?
  - נסמן: $\Delta\varepsilon_a \equiv \varepsilon_a - \varepsilon_c$, $\Delta\varepsilon_d \equiv \varepsilon_c - \varepsilon_d$



  - מצבי האכלוס של הדונור (תורם):
    - D^+ $n=0$ $\varepsilon=0$
    - D^0 $spin\uparrow$ $n=1$ $\varepsilon=\varepsilon_d>0$
    - D^0 $spin\downarrow$ $n=1$ $\varepsilon=\varepsilon_d>0$
  - מצבי האכלוס של האקספטור (נוטל):
    - A^- $n=-1$ $\varepsilon=0$
    - A^0 $spin\uparrow$ $n=0$ $\varepsilon=\varepsilon_a>0$
    - A^0 $spin\downarrow$ $n=0$ $\varepsilon=\varepsilon_a>0$
  - איבר כללי בסכום Gibbs עבור אלקטרונים: $e^{(\mu n-\varepsilon)\beta}$
  - איבר כללי בסכום Gibbs עבור חורים: $e^{(\varepsilon-\mu n)\beta}$
  -
- הסתברות לדונור מיונן: $$\boxed{f(D^+) = \frac{1}{1+2\exp\left[(\mu-\varepsilon_d)\beta\right]}}$$
- הסתברות לאקספטור מיונן: $$\boxed{f(A^-) = \frac{1}{1+2\exp\left[(\varepsilon_a-\mu)\beta\right]}}$$

הסתברות:

- מרחב האפשרויות (המדגם) : $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$
- הסתברות לאירוע : $P(\omega_i)=P_i$
- צפיפות ההסתברות : $P(x)\geq 0 \quad \int P(x)dx=1$
- תוחלת : $\langle x\rangle=\sum_i x_iP_i=\int xP(x)dx$

  תוחלת של פונקציה : $\langle f(x)\rangle=\sum_i f(x_i)P_i=\int f(x)P(x)dx$
- שונות : $var(x)=\sigma_x^2=\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$
- שונות משותפת : $cov(x,y)=\langle x\cdot y\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle$

  השונות המשותפת מתאפסת עבור x,y בלתי תלויים.
- תכונות וזהויות : $\langle x\pm a\rangle=\langle x\rangle\pm a \quad ; \quad \langle x\pm y\rangle=\langle x\rangle\pm\langle y\rangle$

  $var(x\pm y)=var(x)+var(y)\pm 2cov(x\pm y)$

רוחב הגאוסיאן מאופיין ע"י : $\frac{\sqrt{\text{var}(x)}}{\langle x\rangle}=\frac{\sigma_x}{\langle x\rangle}$

- פונקצית מעבר בין צפיפויות: $f_X(x)=f_P\left(h^{-1}(x)\right)\cdot\left|\left(h^{-1}(x)\right)'\right|$
- פונקציה יוצרת מומנטים: $m_x(s)=Ee^{sx} \Rightarrow \langle m^k\rangle=\left.\frac{\partial^k m_x(s)}{\partial s^k}\right|_{s=0}$
- משפט הגבול המרכזי : אם $X_1,X_2,...,X_N$ ב"ת עם תוחלות (μ_i) ושונויות (σ_i^2) סופיות. נגדיר סכום $S_N=\sum_{i=1}^N X_i$ עם תוחלת $\langle S_N\rangle=\sum_i\mu_i=N\mu$ ושונות $\text{var}(S_N)=\sum_i\sigma_i^2=N\sigma$

אזי עבור $N\to\infty$ ההתפלגות מתקרבת להתפלגות נורמאלית (גאוסית) :

$$P(S_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\text{var}(S_N)}}\exp\left[-\frac{\left(S_N-\langle S_N\rangle\right)^2}{2\,\text{var}(S_N)}\right]$$

קומבינטוריקה :

- בינום ניוטון: $(a+b)^N=\sum_{n=0}^N\binom{N}{n}a^Nb^{N-n}$

סידורים : סידור N עצמים שונים בשורה : $N!$

בחירות : בחירת k עצמים מתוך N ערכים אפשריים לכל עצם.

	עם חשיבות הסדר	אין חשיבות לסדר
עם חזרות	N^k	$\frac{(N+k-1)!}{k!(N-1)!}$
בלי חזרות	$\frac{N!}{(N-k)!}$	$\frac{N!}{k!(N-k)!}$

נספח גיאומטרי:

- נפח היפר-כדור: $V=\int_{n_1^2+n_2^2+...+n_d^2\leq R^2}\prod_{i=1}^d dn_i=\frac{\left(\sqrt{\pi}R\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$

כאשר d - מימד הכדור, $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_d^2}$ - רדיוס הכדור.

- זווית מרחבית: $d\Omega_{2D}=d\varphi$

  $d\Omega_{3D}=\sin\theta d\theta d\varphi$
- זווית ממוצעת:

$$\begin{cases}\langle\cos\theta\rangle\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}=\frac{d\Omega}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$$

נספח מתמטי :

- קבוע בולצמן : $k_B=1.38\cdot 10^{-23}\left[J/K\right]$
-
- קירובים: **כולם עבור** $x\ll 1$

✓ טיילור: $(1\pm\alpha x)^n=1\pm\alpha nx \quad ; \quad (1\pm x)^n=1\pm nx$

$$e^{\alpha x}=1+\alpha x+\frac{(\alpha x)^2}{2} \quad ; \quad e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}$$

✓ סטרלינג: (עבור $N\gg 1$) : $N!\approx\sqrt{2\pi N}\cdot N^N\exp(-N+\frac{1}{2N}+...)$

$$\Rightarrow \ln(N!)\approx N\ln(N)-N$$

✓ לינאריזציה:

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}=1-a_1x+\left(a_1^2-a_2\right)x^2+\left(-a_1^3+2a_1a_2-a_3\right)x^3$$

- פונקצית גאמה : $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

✓ תכונות של פונקצית הגאמה :

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1 \quad ; \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \quad ; \quad \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ; \quad \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad ; \quad \Gamma(n+1)=n!$$

- אינטגרלים שימושיים :

פונקצית גאמה : $\int_{-\infty}^\infty x^me^{-ax^2}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{a^{\frac{m+1}{2}}}$

$$\int_{-\infty}^\infty x^me^{-ax}dx=\frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}}$$

$$\int_0^\infty\frac{x^3\cdot dx}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15} \quad ; \quad \int_0^\infty\frac{x^2\cdot dx}{e^x-1}=2.404\approx\frac{\pi^3}{12.9} \quad ; \quad \int_0^\infty\frac{x\cdot dx}{e^x-1}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int\frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\pm 1}=\mp\tfrac{1}{\beta}\ln\left[1\pm e^{\beta(\mu-\varepsilon)}\right] \quad ;$$

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2\cdot dx}{4\cosh^2\frac{x}{2}}=\frac{\pi^2}{3} \quad ; \quad \int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a} \quad ;$$

אינטגרל על גאוסיאן: $\int_{-\infty}^\infty dx\cdot e^{-\alpha x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

- זהויות דיפרנציאליות :

$$F-\tau\left(\frac{\partial F(\tau)}{\partial\tau}\right)_{V,N}=-\tau^2\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{F(\tau)}{\tau}\right)_{V,N}$$

- סכום סדרה הנדסית סופית : $\sum_{s=m}^N a^s=a^m\frac{1-a^{N-m+1}}{1-a}$
- סכום סדרה הנדסית אינסופית : $\sum_{s=m}^\infty a^s=\frac{a^m}{1-a}$

שיעורי בית 3

❖ תרגיל 1: נתון מערך של N אוסילטורים קוונטיים הרמוניים עם תדירות אופיינית ω ואנרגיה $n=0,1,...$, $\varepsilon_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$ לכל אוסילטור.

האנרגיה הכללית של המערכת היא: $m=\sum_{l=1}^{N} n_l$, $E=\hbar\omega\left(m+\frac{N}{2}\right)$.

א. מצא מספר מצבי מערכת. ב. אם $m\gg 1$, $N\gg 1$ מצא קשר בין E ל T

פתרון:

א. סידור של m כדורים זהים (רמות אנרגיה) ו- $N-1$ מחיצות בשורה:

$$\boxed{g(N,m)=\frac{(N-1+m)!}{m!(N-1)!}}$$

ב. עפ"י ההגדרה $S=\lim_{N\gg1,m\gg1} k_B\log\left(g(N,m)\right)\to steerling$

מהקשר $m=\sum_{l=1}^{N} n_l$, $E=\hbar\omega\left(m+\frac{N}{2}\right)$ נקבל $m=\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}$

$$\frac{1}{T}=\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{\partial S}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial E}=\frac{k_B}{\hbar\omega}\ln\frac{N-1+m}{m}=\frac{k_B}{\hbar\omega}\ln\frac{\overbrace{N\cancel{-1}}^{N\gg1}}{\frac{E}{\hbar\omega}-\frac{N}{2}}+1$$

אחרי פיתוח נקבל את הדרוש: $\boxed{E=\frac{\hbar\omega N}{2}\coth\frac{\hbar\omega}{2k_BT}}$

❖ תרגיל 2: מערכת עם 2 רמות אנרגיה E_1,E_2 המאוכלסות ע"י n_1,n_2 חלקיקים בהתאמה $(n_1+n_2=N)$, מצומדת לאמבט חום T. בעקבות מעבר חום יש שינוי באכלוס $n_1\to n_1+1$, $n_2\to n_2-1$.

חשב את השינוי באנטרופיה של המערכת והאמבט. חשב n_1/n_2 בש"מ.

פתרון:

$$\boxed{\Delta S=k_B\left[\ln\frac{N!}{(n_1+1)!(n_2-1)!}-\ln\frac{N!}{n_1!n_2!}\right]=k_B\ln\frac{n_2}{n_1+1}\simeq k_B\ln\frac{n_2}{n_1}}$$

$$\boxed{\frac{1}{T}=\frac{\Delta S}{\Delta E}\Rightarrow\Delta S=\frac{n_{1,f}E_1+n_{2,f}E_2-\left(n_{1,i}E_1+n_{2,i}E_2\right)}{T}=\frac{E_2-E_1}{T}}$$

$$\begin{cases}\Delta E_{sys}=-\Delta E_R\\ T_{sys}=T_R\end{cases}\Rightarrow\Delta S_{sys}=-\Delta S_R\Rightarrow\frac{n_2}{n_1}=\exp\left(\frac{E_1-E_2}{k_BT}\right)$$

❖ תרגיל 3: נתונה מערכת עם 2 רמות אנרגיה $\pm\varepsilon$, אנרגיה E ומספר חלקיקים מובחנים N. מגדירים $s\equiv\frac{1}{2}\left(N_2-N_1\right)$.

א. מצא את $E(s)$

ב. מצא את מספר מיקרו-מצבים $\Omega(s)$

ג. עבור צימוד תרמי של המערכות: $N_A=14,\ s_A=6\,;\,N_B=28,\ s_B=9$.
חשב את s'_A,s'_B (אין מעבר חלקיקים בין המערכות) בש"מ ת"ד, כמות החום שעברה וכיוון זרימת האנרגיה.

ד. בש"מ ת"ד מסירים את המחיצה בין המערכות. מהו שינוי האנטרופיה?

ה. חשב את הסיכוי למצוא את המערכת במצב ג' לאחר החזרת המחיצה.

ו. כיצד תלויה ההסתברות מסעיף ו' בגודל המערכת?

פתרון:

א. עבור s שהוגדר מתקיים: $N_2=\frac{N}{2}-s$; $N_1=\frac{N}{2}+s$ לכן האנרגיה

$$E(s)=N_1\varepsilon+N_2(-\varepsilon)=\left(\frac{N}{2}+s\right)\varepsilon-\left(\frac{N}{2}-s\right)\varepsilon=2s\varepsilon$$

ב. מספר המצבים בבעיה: $\boxed{\Omega(N,s)=\frac{N!}{N_1!N_2!}=\frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+s\right)!\left(\frac{N}{2}-s\right)!}}$

ג. הזרימה $A\to B$: $\Delta E_B=2\varepsilon\Delta s_B=-\Delta E_A$ $\boxed{\frac{s'_A}{N_A}=\frac{s'_B}{N_B}=\frac{s_A+s_B}{N}}$

ד. $\boxed{\Delta S=k_B\ln\frac{\Omega_{eq,no\ wall}}{\Omega_{eq,\ with\ wall}}=k_B\ln\frac{\Omega\left(N_A+N_B,s'_A+s'_B\right)}{\Omega\left(N_A,s'_A\right)\cdot\Omega\left(N_B,s'_B\right)}}$

ה. $P=\frac{\Omega_{eq,\ with\ wall}}{\Omega_{eq,no\ wall}}\simeq 0.355$ ו. ככל שהמערכת גדלה, הסתי' קטנה לאפס.

שיעורי בית 4

❖ תרגיל 1: רוכסן עם N חוליות, כ"א עם אנרגיה ε אם פתוחה ואפס אחרת, אשר יכול להפתח רק מצד אחד. חוליה i תפתח רק אחרי $i-1$.

א. מצא את פונקצית החלוקה.

ב. בגבול $\varepsilon\beta \gg 1$ מצא את המספר הממוצע של חוליות פתוחות.

ג. מצא פונקצית חלוקה לרוכסן שיכול להפתח משני צידיו.

פתרון:

א. $$Z_{Left} = \sum_s e^{-\beta\varepsilon_s} = \sum_{s=0}^{N} e^{-\beta s\varepsilon} = \frac{1-\exp\left[-\left(N+1\right)\beta\varepsilon\right]}{1-\exp\left[-\beta\varepsilon\right]}$$

ב. $$\left\langle s\right\rangle = \frac{\left\langle \varepsilon_{tot}\right\rangle}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \log Z}{\partial\beta} \xrightarrow[\varepsilon\beta\gg1]{} 0$$

ג. $$Z_{Left-Right} = \sum_{s=0}^{N}\sum_{k=0}^{N-s} e^{-\left(k+s\right)\varepsilon\beta} = \sum_{s=0}^{N} e^{-s\varepsilon\beta}\sum_{k=0}^{N-s} e^{-k\varepsilon\beta} =$$
$$= \frac{Z_{Left}-\left(N-1\right)\exp\left[-\left(N+1\right)\beta\varepsilon\right]}{1-\exp\left[-\beta\varepsilon\right]}$$

❖ תרגיל 2: נתונה מער' בינארית, המורכבת מ- N מגנטים, כך ש $N_1\left(N_2\right)$ במצב "up"("down"). מפעילים שדה מגנטי כך שהאנרגיה $E=-2smB$, m - מומנט מגנטי, $s=\frac{1}{2}\left(N_2-N_1\right)$ וכן $N_1+N_2=N$.

א. חשב את טמפ' המערכת.

ב. חשב את פונקצית החלוקה.

ג. משב את האנרגיה הממוצעת $\left\langle E\right\rangle$ והשווה לתוצאות החישוב הנובע מאנטרופיה, היכן הקירוב וכיצד משפיע על המערכת?.

ד. חשבת את שונות האנרגיה $\left\langle\left(\Delta E\right)^2\right\rangle$ ואת $\left\langle\left(\Delta E\right)^2\right\rangle/\left\langle E\right\rangle$.

ה. מה ניתן להסיק על הממוצעים הנ"ל.

פתרון: נסמן $\boxed{mB\equiv\varepsilon}$

א. $$g\left(N,s\right) = 2^N\exp\left(-2s^2/N\right) \Rightarrow S = k_B N\ln 2 - 2s^2 k_B/N$$
$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial U} = \ldots = \frac{2sk_B}{NmB} \Rightarrow k_B T = \beta^{-1} = \frac{NmB}{2s} = \frac{\left(N_1+N_2\right)mB}{N_2-N_1}$$

ב. $$Z_1 = \sum_r e^{-\beta\varepsilon_r} = e^{-\beta\left(-mB\right)} + e^{-\beta\left(mB\right)} = 2\cosh\left(\beta mB\right) = 2\cosh\left(\beta\varepsilon\right)$$

יש כאן N חלקיקים מובחנים לכן $Z_N = 2^N\cosh^N\left(\beta\varepsilon\right)$

ג. $$\left\langle E\right\rangle = -\frac{\partial\log Z_N}{\partial\beta} = \ldots = -NmB\tanh\left(\beta\varepsilon\right) = -NmB\tanh\left(\frac{2s}{N}\right)$$

ועבור הקירוב $N\to\infty$ נקבל כנדרש: $\left\langle E\right\rangle = -mB2s$

ד. $$VarE = -\frac{\partial E}{\partial\beta} = \ldots = \frac{N\varepsilon^2}{\cosh^2\left(\beta\varepsilon\right)} \quad ; \quad \frac{\sqrt{VarE}}{\left\langle E\right\rangle} = \ldots = -\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{\sinh\beta\varepsilon}$$

ה. ככל שהמער' גדלה $N\to\infty$, כך השגיאה היחסית קטנה.

שיעורי בית 4 (המשך)

❖ תרגיל 3: נתונים N אוסילטורים הרמוניים מובחנים, עם תדר תהודה ω ורמות אנרגיה $n=0,1,\ldots$ $\varepsilon_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

א. חשב את פונקצית החלוקה Z.

ב. חשב את האנרגיה הממוצעת של המערכת $\left\langle E\right\rangle$.

ג. חשב את השונות האנרגיה $\left\langle\left(\Delta E\right)^2\right\rangle$ ואת סטיית התקן המנורמלת.

ד. השווה את התוצאות בגבול הטמפ' הנמוכה: $\beta\hbar\omega\gg1$ עם שאלה 2.

פתרון:

א. $$Z_1 = \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)}{1-\exp\left(-\beta\hbar\omega\right)} = \frac{1}{2\sinh\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$
$$Z_N = \left(Z_1\right)^N$$

ב. $$\left\langle E\right\rangle = -\frac{\partial\log Z_N}{\partial\beta} = -\frac{\partial\log Z_1^N}{\partial\beta} = \frac{N\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2}$$

ג. $$\left\langle\left(\Delta E\right)^2\right\rangle = \frac{\partial^2\log Z_N}{\partial\beta^2} = N\frac{\partial^2\log Z_1}{\partial\beta^2} = \frac{N\left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2}{\sinh^2\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$
$$\frac{\left\langle\left(\Delta E\right)^2\right\rangle}{\left\langle E\right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{N}}\frac{1}{\cosh\frac{\beta\hbar\omega}{2}}$$

ד. עבור הגבול $\beta\hbar\omega\gg1$: $$\left\langle E\right\rangle = \frac{N\hbar\omega}{2}\coth\frac{\beta\hbar\omega}{2} \xrightarrow[\coth x\to1]{x\gg1} \frac{N\hbar\omega}{2}$$

עבור הגבול הנ"ל התוצאות מתאימות עבור ההצבה $\varepsilon=\hbar\omega=mB$.

❖ תרגיל 4: ניתן לתאר גוף אלסטי חד-מימדי ע"י N מולקולות המחוברות בקצותיהן ב- 0° או ב- 180°. אורך כל חוליה הוא d והאורך הכללי הוא L חשב את הכוח f שיש להפעיל ע"מ לשמר את האורך הכללי של המערכת.

פתרון:

האנרגיה האגורה בכל חוליה אשר עליה פועל כוח f היא: $\varepsilon_{\pm d}=\mp fd$ לכן אורך ממוצע של כל חוליה הוא:
$$\left\langle l\right\rangle = \frac{de^{-\beta\varepsilon_d}-de^{\beta\varepsilon_{-d}}}{Z} = \frac{de^{\beta fd}-de^{-\beta fd}}{e^{\beta fd}-e^{-\beta fd}} = d\tanh\left(\beta fd\right)$$

ולכן האורך הכללי של המער': $L=N\left\langle l\right\rangle = Nd\tanh\left(\beta fd\right)$

ומכאן הכוח שיש להפעיל ע"מ לשמרו:
$$f = \frac{k_BT}{d}arc\tanh\frac{L}{Nd} = \frac{k_BT}{d}\tanh^{-1}\frac{L}{Nd}$$

שיעורי בית 5

❖ תרגיל 1: נניח משטח סריגי ובו $N \gg 1$ נקודות סריג ו- N אתרים משניים. נניח כי דרושה אנרגיה ε ע"מ להעביר אלקי' אחד (מתוך N) מנקודת סריג לאתר משני וכן כי ישנם כבר $n \gg 1$ אלקי' באתרים משניים. המערכת בשיווי משקל תרמודינמי.

א. חשב את האנטרופיה S.

ב. חשב את $\langle n \rangle$.

פתרון:

א. את המער' ניתן לדמות למער' בעלת 2 רמות אנרגיה עם ניוון N כ"א. אנרגיה אפס עבור נקודות סריג ו- ε עבור אתרים מישניים.

אנו רוצים לאכלס את הרמה העליונה ε עם n חלקיקים (מתוך סה"כ N) ואז לבחור באילו אתרים למקמם. יש כאן 2 בחירות ב"ת של n מתוך N,

לכן מספר המצבים הכולל הוא:
$$\Omega = \binom{N}{n}\binom{N}{n} = \left(\frac{N!}{n!(N-n)!}\right)^2$$

ומכאן האנטרופיה:
$$S = k_B \ln\Omega = \ldots = 2k_B \ln\frac{N^N}{n^n (N-n)^{N-n}}$$

ב. האנרגיה הכללית נתונה ע"י $U = n\varepsilon$ והאנרגיה החופשית היא לכן:
$$F = U - TS = U - 2k_B T\left[N\ln N - \frac{U}{\varepsilon}\ln\frac{U}{\varepsilon} - \left(N - \frac{U}{\varepsilon}\right)\ln\left(N - \frac{U}{\varepsilon}\right)\right]$$

השיווי משרל ת"ד מתקיים $\left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_T = 0$ ולכן אם נציב, נקבל:
$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial U}\right)_T = 1 + \frac{k_B T}{\varepsilon}\left[\log\frac{U}{\varepsilon} - \log\left(N - \frac{U}{\varepsilon}\right)\right]$$
ואחרי פיתוח קצר:
$$\Rightarrow \frac{N - \langle n\rangle}{\langle n\rangle} = \exp\left(\frac{\varepsilon}{2k_B T}\right) \Rightarrow \langle n\rangle = \frac{N}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon}{2k_B T}\right)}$$

❖ תרגיל 2: חשב את קיבול החום בלחץ קבוע של גז אידאלי.

פתרון:
$$\sigma = N\left\{\log\left[\left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{V}{N}\right] + \frac{5}{2}\right\} = N\left\{\log\left[\left(\frac{M}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{\tau^{5/2}}{p}\right] + \frac{5}{2}\right\}$$

ולכן נקבל:
$$\boxed{C_p = \tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\right)_p = \frac{5}{2}N}$$

❖ תרגיל 3: עבור גז אידאלי עם N מולקולות הכלוא בנפח V. חשב את הסיכוי P_n למצוא n מולקולות בתוך נפח קטן $v \ll V$.

פתרון:

נניח כי הגז מפולג אחיד בנפח הגדול, אז הסתברות למציאת חלקיק בנפח v היא: $p = \frac{v}{V} \ll 1$. בשאלה יש N מולקולות לכן מספרן בנפח v - X מפולג בינומית: $X \sim Bin(N,p)$ ומכאן נחשב את ההסתברות:
$$P_n = \binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n} = \binom{N}{n}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-n} \underset{\lambda = Np = N\frac{v}{V}}{=}$$
$$= \frac{1}{n!}\underbrace{\frac{N!}{(N-n)!\,N^n}}_{\longrightarrow 1}\lambda^n\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N}_{\longrightarrow e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{-n}}_{\longrightarrow 1} \xrightarrow[N\gg 1]{} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$$

וכצפוי קיבלנו התפלגות פואסונית.

שיעורי בית 5 (המשך)

❖ תרגיל 4: נתונה מערכת של N חלקיקים עם ספין $\frac{1}{2}$ וללא שדה מגנטי.

חשב את האנטרופיה של המערכת עבור שני המיקרים הבאים:

א. כל חלקיק במערכת משפיע על כל חלקיק אחר. האנרגיה הכללית היא לכן:
$$E = -J\sum_{i<j}\sigma_i\sigma_j = -\frac{J}{2}\left[\sum_{i,j}\sigma_i\sigma_j - \sum_k \sigma_k^2\right],\quad \sigma_i = \pm 1$$ - כיוון הספין.

ב. החלקיקיםמסודרים על מעגל כך שרק השכנים משפיעים אחד על השני.

האנרגיה של המערכת נתונה ע"י: $E = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}$

פתרון:

א. ניתן להפריד כאן את כל המצבים ל-4 קבוצות עפ"י מצבי הספין:

נסמן את מספר החלקיקים בעלי ספין $+1$ ב- N^+.
נסמן את מספר החלקיקים בעלי ספין -1 ב- N^-.

תרומת אנרגיה	מספר זוגות	המצב
$-J$	$N^+(N^+-1)$	$\uparrow\uparrow$
	$N^-(N^--1)$	$\downarrow\downarrow$
$+J$	N^+N^-	$\uparrow\downarrow$
	N^+N^-	$\downarrow\uparrow$

$$E = -J\left(\frac{-2N^+N^- + N^+(N^+-1) + N^-(N^--1)}{2}\right) = \ldots =$$
$$= -\frac{J}{2}\left[\left(N - 2N^+\right)^2 - N\right] \Rightarrow N^+ = \frac{N - \sqrt{N - \frac{2E}{J}}}{2}$$
$$\Omega = \binom{N}{N^+} = \frac{N!}{N^+!\left(N - N^+\right)!} \Rightarrow S(E) = k_B\ln\Omega$$

לכן אם נציב ומבצע חישוב המבוסס על קירוב סטירלינג נקבל:
$$S(E) = k_B\left\{\begin{aligned}&N\ln N - \tfrac{1}{2}\left(N - \sqrt{N - \tfrac{2E}{J}}\right)\ln\left[\tfrac{1}{2}\left(N - \sqrt{N - \tfrac{2E}{J}}\right)\right] + \ldots\\ &-\tfrac{1}{2}\left(N + \sqrt{N - \tfrac{2E}{J}}\right)\ln\left[\tfrac{1}{2}\left(N + \sqrt{N - \tfrac{2E}{J}}\right)\right]\end{aligned}\right\}$$

ב. נסמן n_{inv} - מס' זוגות סמוכים בעלי ספין הפוך: $\uparrow\downarrow$ או $\downarrow\uparrow$ וכן נסמן n_{stay} מספר זוגות סמוכים כאשר הספין נשאר זהה $\uparrow\uparrow$ או $\downarrow\downarrow$, לכן האנרגיה של המערכת היא: $E = -J\left[n_{stay} - n_{inv}\right] = -J\left[N - n_{inv} - n_{inv}\right]$
$$\Rightarrow n_{inv} = \frac{1}{2}\left(\frac{E}{J} + N\right) \quad , \quad \Omega = 2\binom{N}{n_{inv}} = \frac{2N!}{n_{inv}!\left(N - n_{inv}\right)!}$$

לכן אם נציב ומבצע חישוב המבוסס על קירוב סטירלינג נקבל:
$$S(E) = k_B\ln\Omega = k_B\left\{\begin{aligned}&\ln 2 + N\ln N - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{E}{J} + N\right)\ln\left[\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{E}{J} + N\right)\right] + \ldots\\ &-\tfrac{1}{2}\left(N - \tfrac{E}{J}\right)\ln\left[\tfrac{1}{2}\left(N - \tfrac{E}{J}\right)\right]\end{aligned}\right\}$$

שיעורי בית 6

❖ תרגיל 1: חשב את המספר הממוצע של פוטונים N בש"מ ת"ד בטמפ' T ובנפח V. השתמש בתוצאה ע"מ להעריך את מספר הפוטונים ביקום. הנח כי זהו נפח כדורי ברדיוס $10^{26}m$ ובטמפ' $T=3^\circ K$

פתרון:

$$\langle N(V,T)\rangle = \int_0^\infty g_\gamma(\varepsilon) f_\gamma(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{V\varepsilon^2}{\hbar^3c^3\pi^2}\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}\,d\varepsilon =$$

$$= \frac{V}{\hbar^3c^3\pi^2\beta^2}\left(\int_0^\infty \frac{(\beta\varepsilon)^2}{e^{\beta\varepsilon}-1}\,d(\beta\varepsilon)\right)\frac{1}{\beta} = \frac{V(k_BT)^3}{\hbar^3c^3\pi^2}2.4$$

פוטונים ביקום:

$$\langle N\rangle = \frac{2.4}{\pi^2}\left(\frac{k_B}{\hbar c}\right)^3 VT^3 = 0.243\left(\frac{1.38\cdot10^{-23}{}_{[J/K]}}{1.055\cdot10^{-34}{}_{[J\cdot\sec]}3\cdot10^8{}_{[m/\sec]}}\right)VT^3 =$$

$$= 20.22\cdot10^6\cdot\tfrac43\pi^3\left(10^{26}\right)^3\cdot3^3 = 2.28\cdot10^{87}$$

❖ תרגיל 2: האנרגיה הקוונטית של גוף נתונה ע"י $\varepsilon_j = j(j+1)h^2/8\pi^2 I$ הניוון של כל מצב הוא $g_j = 2j+1$.

א. מצא ביטוי כללי עבור פונקצית החלוקה.
ב. בהתחשב בשני גבולות של טמפ' גבוהה ונמוכה חשב את האנרגיה ואת קיבול החום הממוצעים.

פתרון:

א. $$Z=\sum_r e^{-\beta\varepsilon} = \sum_j g_j e^{-\beta\varepsilon_j} = \sum_j (2j+1)e^{-\beta(j^2+j)\frac{h^2}{8\pi^2I}}$$

ואם נציב $\theta = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2\frac{1}{Ik_B}$ נקבל: $Z=\sum_j(2j+1)e^{-(j^2+j)\frac{\theta}{2T}}$

ב. בגבול הטמפ' הגבוהה: $T\gg\theta$ ניתן לקרב את הטור ע"י אינטגרל ולכן:

$$Z_H \cong \int_0^\infty (2j+1)e^{-(j^2+j)\frac{\theta}{2T}}dj = \dots = \frac{2T}{\theta} = \frac{2}{\theta k_B}\frac{1}{\beta} \Rightarrow U_H = k_BT$$

בגבול הטמפ' הנמוכה: $T\ll\theta$ ישנה דעיכה חזקה לכן ניקח 2 איברים ראשונים בלבד ונקבל: $Z_L \cong Z_0+Z_1 = 1+3e^{-\theta/T} = 1+3e^{-\theta k_B\beta}$

$$\Rightarrow U_L = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_L = \dots = \frac{3\theta k_B e^{-\theta/T}}{1+3e^{-\theta/T}}$$

קיבולי החום:

$$C=\frac{\partial U}{\partial T} = \begin{cases} k_B & , \quad T\gg\theta \\ \dfrac{3k_B(\theta/T)^2 e^{-\theta/T}}{\left(1+3e^{-\theta/T}\right)^2} & , \quad T\ll\theta\end{cases}$$

❖ תרגיל 3: בהנחה כי אטמוספירת כדוה"א מורכבת מחנקן בלבד אשר בש"מ ת"ד בטמפ' $300K$. חשב את הגובה מעל פני המים, שם צפיפות קטנה פי 2.

פתרון:

התנאי לש"מ הוא איזון בין הלחץ לכוח הכבידה: $dp = -mg\rho(z)\,dz$

נשתמש בחוק הגזים ואז: $p(z) = \frac{N(z)}{V}\tau = \rho(z)\tau \Rightarrow dp = d\rho\cdot\tau$

נציב, נפתור מד"ר ונקבל: $\rho(z) = \rho_0\exp\left(-\frac{mg}{\tau}z\right) = \rho_0\exp(-z/z_0)$

נדרוש $\rho(z) = \frac{\rho_0}{2} = \rho_0\exp(-z/z_0) \Rightarrow z/z_0 = \ln 2 \Rightarrow z = \frac{\tau\ln2}{mg}$

ועבור אטומי חנקן ונקבל: $z = \frac{1.38\cdot10^{-23}{}_{[J/K]}\cdot300_{[K]}\cdot\ln2}{14\cdot1.66\cdot10^{-27}{}_{[Kg]}\cdot9.8_{[m/\sec^2]}} = 12.6\,km$

שיעורי בית 6 (המשך)

❖ תרגיל 4: נתון מערך כפול של N חלקיקים עם ספין חצי שלם.

$N\{$

↓	↑	↓	↑	↑	↑
↑	↓	↓	↓	↑	↓

המערך נמצא בשדה מגנטי H ובנוסף יש אינטראקציה בין הספינים שאחד מעל לשני, כך שאם מקבילים $(\uparrow\uparrow,\downarrow\downarrow)$ האנרגיה אפס ואם אנטי-מקבילים $(\uparrow\downarrow,\downarrow\uparrow)$ אז אנרגית האינטראקציה היא $\lambda>0$.

א. מצא את האנרגיה הממוצעת של המערכת בטמפרטורה T.
ב. מהן סקלות האנרגיה של מערכת?
ג. חשב את את אנרגית המערכת בטמפ' גבוהה/נמוכה וכן באזור בו $\lambda\gg k_BT\gg\mu H$.
ד. הסבר או צייר כיצד נראית המערכת בכ"א מתחומי סעיף ג'.

פתרון:

א. על כל חלקיק פועל שדה מגנטי המקנה אנרגיה של $\varepsilon=\mu H$ אם הספין בכיוון השדה ו- $\varepsilon=-\mu H$ אחרת. בנוסף לאנרגיה יש תרומה מהאינטראקציה בין החלקיקים שנמצאים אחד מעל לשני ולכן:

$$Z_2 = \sum_r e^{-\beta\varepsilon_r} = e^{-\beta\varepsilon_{\uparrow\uparrow}}+e^{-\beta\varepsilon_{\downarrow\downarrow}}+e^{-\beta\varepsilon_{\uparrow\downarrow}}+e^{-\beta\varepsilon_{\downarrow\uparrow}} =$$

$$= e^{-\beta\mu H}+e^{+\beta\mu H}+e^{-\beta\lambda}+e^{-\beta\lambda} = 2\left(\cosh\beta\mu H + e^{-\beta\lambda}\right)$$

החלקיקים מובחנים לכן: $Z_N = (Z_2)^{N/2} = 2^{N/2}\left(\cosh\beta\mu H+e^{-\beta\lambda}\right)^{N/2}$

הנארגיה הממוצעת $E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_N = \dots = -\frac N2 \frac{\mu H\sinh\beta\mu H - \lambda e^{-\beta\lambda}}{\cosh\beta\mu H+e^{-\beta\lambda}}$

ב. האנרגיה נמדדת ב-3 סקלות: λ , μH , k_BT.

ג. $$E = \begin{cases} \dfrac{N\lambda}{4} & , high\ temp: k_BT\gg\lambda,\mu H \\ -\dfrac{N\mu H}{2} & , low\ temp: k_BT\ll\lambda,\mu H \\ -\dfrac{N}{2}\dfrac{(\mu H)^2}{k_BT}\to0 & , mid\ temp: \mu H\ll k_BT\ll\lambda \end{cases}$$

ד. עבור טמפ' גבוהות ישנו פילוג שווה בין מצבים.

↓	↑	↓	↑
↑	↓	↓	↑

עבור טמפ' נמוכות כל הספינים מקבילים (אין אינטראקציה בין החלקיקים). זוהי הנארגיה הנמוכה ביותר האפשרית.

↑	↑	↑	↑
↑	↑	↑	↑

עבור הקירוב השלישי עדין אין אינטראקציה, והספינים מקבילים ואנטי-מקבילים שווים.

↓	↑	↓	↑
↓	↑	↓	↑

❖ תרגיל 5: גז בטמפ' T פולט קרינה עם אורך גל מרכזי λ_0, אך בגלל תנועת המולקולות ישנו פיזור מאורך הגל המרכזי (זהו אפקט דופלר). מהו הקשר בין עוצמת הקרינה לאורך הגל הנפלט?

פתרון:

ידוע כי הקשר בין אורכי הגל הנקלט בגלאי λ והנפלט ע"י הגז λ_0 הנקבע ע"י אפקט דופלר הוא: $\lambda = \lambda_0\left(1-\frac{v_x}{c}\right) \Rightarrow \left(\frac{v_x}{c}\right)^2 = \frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\lambda_0^2}$

(אורך גל נקלט של חלקיק מתקרב קטן יותר מאשר של חלקיק המתרחק).
עוצמת הקרינה פרופורציונית לצפיפות האנרגיה ולכן:

$$I(\lambda)\propto u_d(\lambda)\propto f_\gamma = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}\propto e^{-\beta\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon=\frac{mv^2}{2}]{}\exp\left(-\beta\frac{mv_x^2}{2}\right)$$

$$\boxed{I(\lambda)\propto\exp\left(-\frac{mc^2}{2}\left(\frac{v_x}{c}\right)^2\frac{1}{k_BT}\right) = \exp\left(-\frac{mc^2(\lambda-\lambda_0)^2}{2\lambda_0^2k_BT}\right)}$$

<u>שיעורי בית 7</u>

❖ <u>תרגיל 1</u>: חשב את האנרגיה החופשית של הלמהולץ F עבור גז פוטונים עם אנרגיה כוללת U הכלוא בנפח V. ע"ב התוצאה חשב את לחץ הגז.

<u>פתרון</u>:

עבור פוטון בנפח V, צפיפות המצבים היא $g(\varepsilon)=\frac{V}{\hbar^3c^3\pi^2}\varepsilon^2\triangleq\alpha\varepsilon^2$.

$$U=\int_0^\infty \varepsilon g(\varepsilon)f_\gamma(\varepsilon)d\varepsilon=\int_0^\infty \alpha\varepsilon^2\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{e^{\beta\varepsilon}-1}d\varepsilon=\frac{\alpha}{\beta^4}\frac{\pi^4}{15}$$

מצד שני $U=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z$ ולכן: $\ln Z=-\int\frac{\pi^4}{15}\frac{\alpha}{\beta^4}d\beta=\frac{\pi^4}{15}\frac{\alpha}{3\beta^3}$.

האנרגיה החופשית:
$$\boxed{F=-\tau\ln Z=-\frac{1}{\beta}\left(\frac{\pi^4}{45}\frac{V}{\hbar^3c^3\pi^2}\frac{1}{\beta^3}\right)\underset{\substack{stefan\\boltzman}}{\equiv}-\frac{U}{3}}$$

ולגבי הלחץ:
$$\boxed{p=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_\tau=\frac{\pi^2}{45\hbar^3c^3\beta^4}=\frac{U}{3V}}$$

❖ <u>תרגיל 2</u>:

א. הראה כי $\left\langle q^2(t)\right\rangle\equiv\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}q_\tau^2(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}S_q(\omega)d\omega$

ב. הוכח את Wiener-Khinchine theorem (או בקיצור משפט פלנשרל)

$$\left\langle q(t),q(t+t')\right\rangle\equiv\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}q_\tau(t)q_\tau(t+t')dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega t'}S_q(\omega)d\omega$$

<u>פתרון</u>: טריויאלי עפ"י סיכום הרצאות בנושא רעש תרמי בנגדים.

❖ <u>תרגיל 3</u>: פתח את הקשר בין טמפ' פני השטח של כוכב מסוים ביחס למרחקו מהשמש. זאת בהתיחס להנחה כי הכוכב הינו גוף שחור בש"מ ת"ד, כלומר פולט את כל הקרינה שהוא קולט מהשמש ובנוסף כי טמפ' הכוכב קבועה ביום ובלילה.

נתון:

$$T_{Sun}=5800K\ ;\ R_{Sun}=6.96\cdot10^8\ ;\ D_{Sun-\odot}=2.28\cdot10^{11}\ ,\ \odot-Planet$$

<u>פתרון</u>:

הספק ליח' שטח - שמש: $J_{out,Sun}=\sigma T_{Sun}^4\ ,\ \sigma=5.67\cdot10^{-8}\left[W/m^2T^4\right]$

הספק הכולל הינו: $P_{out,Sun}=J_{out,Sun}\cdot S_{Sun}=\sigma T_{Sun}^4\,4\pi R_{Sun}^2$

ההספק ליח' שטח הנקלט בכל נק' על פני חתך הכוכב: $J_{in,\odot}=\frac{P_{out,Sun}}{4\pi D_{Sun-\odot}^2}$

היות וקליטה דרך חתך ופליטה דרך המשטח: $J_{in,\odot}\pi R_\odot^2=J_{out,\odot}4\pi R_\odot^2$

$$J_{out,\odot}=\tfrac14J_{in,\odot}=\sigma T_\odot^4\Rightarrow T_\odot^4=\frac{1}{4\sigma}\frac{P_{out,Sun}}{4\pi D_{Sun-\odot}^2}=\frac{T_{Sun}^4R_{Sun}^2}{4D_{Sun-\odot}^2}=2.63\cdot10^9$$

ולכן $T_\odot=226^\circ K$

❖ <u>תרגיל 4</u>: מולקולה אלסטית ארוכה יכולה להיות מוצגת ע"י שרשרת בת N חוליות. מצבה של כל חוליה מאופיין ע"י שני מס' קוונטיים n ו- l, כאשר אורכה של חוליה הוא $l\in\{a,b\}$. $l=b$. כל השרשרת תחת מתח F.

לכן האנרגיה של כל חוליה היא:
$$E_{n,l}=\begin{cases}\hbar\omega_a\left(n+\frac12\right)-Fa\triangleq E_a, & l=a\\ \hbar\omega_b\left(n+\frac12\right)-Fb\triangleq E_b, & l=b\end{cases}$$

חשב את אורכה הממוצע בגבול טמפ' גבוהה. $L=N\langle l\rangle$.

<u>פתרון</u>:

עבור טמפ' גבוהות
$k_BT\gg1\Leftrightarrow\beta\ll1$
ולכן: $\sinh\alpha x\approx\alpha x$
וכן $e^{\alpha x}\approx1+\alpha x$

$$\left\langle l_i\right\rangle=\frac{\sum_s l_se^{-\beta\varepsilon_S}}{\sum_s e^{-\beta\varepsilon_S}}=\frac{\sum_{n=0}^\infty ae^{-\beta E_a}+be^{-\beta E_b}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\beta E_a}+e^{-\beta E_b}}=$$

$$=\frac{a\omega_a+b\omega_b+\beta\left(a^2\omega_bF+b^2\omega_aF\right)}{\omega_a+\omega_b+\beta\left(a\omega_bF+b\omega_aF\right)}\approx\frac{a\omega_a+b\omega_b}{\omega_a+\omega_b}+F\frac{\omega_a\omega_b(a-b)^2}{(\omega_a+\omega_b)^2}\beta$$

<u>שיעורי בית 8</u>

❖ <u>תרגיל 1</u>: נתון מעגל RLC טורי, עם זרם $I(t)$. חשב את הצפיפות הספקטראלית $S_I(\omega)$ של שיווי המשקל. הראה כי עבור $Q=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\gg1$ התוצאה מתאימה למשפט החלוקה השווה ביחס לאנרגיה האגורה בסליל.

<u>פתרון</u>:

משוואת המעגל המתקבלת: $\ddot I(t)+\frac{R}{L}\dot I(t)+\frac{1}{LC}I(t)=\frac1L\dot V(t)\qquad(*)$

$I_\tau(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty I_\tau(\omega)e^{-i\omega t}d\omega$:FT והצבת $\left\langle I^2\right\rangle=\lim_{\tau\to\infty}\frac1\tau\int_{-\infty}^\infty I_\tau^2(t)dt$

נקבל: $\left\langle I^2\right\rangle=...=\lim_{\tau\to\infty}\frac1\tau\int_{-\infty}^\infty I_\tau(\omega)I_\tau(-\omega)d\omega=\lim_{\tau\to\infty}\frac1\tau\int_{-\infty}^\infty\left|I_\tau(\omega)\right|^2d\omega$

נגדיר: $S_I(\omega)\triangleq\lim_{\tau\to\infty}\frac1\tau\left|I_\tau(\omega)\right|^2$ ואז: $\left\langle I^2\right\rangle=\int_{-\infty}^\infty S_I(\omega)d\omega$

ע"י הפעלת FT על $(*)$ וכן $|\bullet|^2$ נקבל: $S_I(\omega)=\frac{\omega^2V^2(\omega)}{L^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+\omega^2R^2}$

נגדיר מקדם איכות $Q=\frac2R\sqrt{\frac LC}=\frac{2L\omega_0}{R}\gg1$ וכן $S_V(\omega)=V^2(\omega)$ ואז:

$$\left\langle I^2\right\rangle=\int_{-\infty}^\infty S_I(\omega)d\omega=...=\frac{S_V(\omega_0)\pi}{2LR}$$

עפ"י משפט ג'ונסון: $\left\langle V^2\right\rangle=\int_{-\infty}^\infty S_V(\omega)d\omega=4Rk_BT\Delta f=4Rk_BT\frac{\Delta\omega}{2\pi}$

$S_V(\omega)$ מקבל ערכים שונים מאפס רק בתחום $\Delta\omega$ לכן $S_V(\omega)=\frac{4Rk_BT}{2\pi}$

$E_L=\left\langle\frac12LI^2\right\rangle=\frac12L\frac{S_V(\omega)\pi}{2LR}=...=\frac{k_BT}{2}$ ולכן מתאים למשפט החלוקה.

❖ <u>תרגיל 2</u>: נתונה מערכת של N מסות m המרוחקות a. בין כל 2 מסות סמוכות יש אינטראקציה כשל קפיץ בעל קבוע $m\omega^2$.

א. מצא את אופני תנודה העצמיים של המסות הקשורות לקפיץ ($N\gg1$).

ב. מצא את C_V עבור טמפ' גבוהה $T\to\infty$ וטמפ' נמוכה $k_BT\ll\hbar\omega$.

<u>פתרון</u>:

א. מש' התנועה: $m\ddot x_n=K\left(x_{n+1}-x_n\right)-K\left(x_n-x_{n-1}\right),\ n\in\left\{-\frac N2,...,\frac N2\right\}$

כאשר x_i הינה הסטייה של אטום i מנק' הש"מ שלו. ננחש פתרון כגל עומד $e^{i(k_nna-\omega_nt)}$ עם ת"ש מחזוריים ולכן: $e^{ik_nNa}=1\Rightarrow k_n=\frac{2\pi}{a}\frac{N}{n}$ אז:

$K=m\omega^2$ נציב. $-m\omega_n^2\cancel{e^{i(k_nna-\omega_nt)}}=-K\left[2-e^{-ik_na}-e^{ik_na}\right]\cancel{e^{i(k_nna-\omega_nt)}}$

ונקבל: $-m\omega_n^2=-m\omega^2\left[2\left(1-\cos k_na\right)\right]\Rightarrow\omega_n=\omega\sqrt{2\left(1-\cos k_na\right)}$

ב. נמצא את האנרגית המערכת. הגל המתפשט בגביש הוא פונון בעל קיטוב אורכי בלבד (דרגת חופש אחת): $g_{phonon}^{1D}(\omega)=\frac12g_{photon}^{1D}(\omega)=\frac{L}{\pi v}=\frac{Na}{\pi v}$

$$E=\int_0^{\omega_{\max}}\hbar\omega g_{phonon}^{1D}(\omega)f(\omega)d\omega=\int_0^{\omega_{\max}}\hbar\omega\frac{Na}{\pi v}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{\beta\to0}E\cong\int_0^{\omega_{\max}}\cancel{\hbar\omega}\frac{Na}{\pi v}\frac{1}{\beta\cancel{\hbar\omega}}d\omega=\frac{Na}{\pi v\beta}\frac{\pi v}{a}\Rightarrow E_{T\to\infty}=Nk_BT$$

דרך ב': $E=\sum_{n=-\frac N2}^{n=\frac N2}\hbar\omega_nf(\omega_n)=\sum_{n=-\frac N2}^{n=\frac N2}\hbar\omega_n\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_n}-1}$

עבור טמפ' נמוכות: $E=\frac{Na}{\pi v\beta}\int_0^\infty\frac{\hbar\omega\beta}{e^{\beta\hbar\omega}-1}d\omega=...=\frac{Na}{\pi v}\frac{(k_BT)^2}{\hbar}\frac{\pi^2}{6}$

בכל מקרה $C_V=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=Nk_B\left(T\to\infty\right)\ ,\ \frac{2Nk_B}{\pi}\frac{k_BT}{\hbar\omega}\left(k_BT\ll\hbar\omega\right)$

שיעורי בית 8 (המשך)

❖ תרגיל 3 : נתון גז אידיאלי עם N מולקולות בעלות מסה M הנמצא בגליל עם רדיוס R ואורך L המסתובב המהירות זוויתית ω סביב צירו. בהזנחת הכבידה חשב את צפיפות החלקיקים כפונקציה של מרחקם מהציר.

פתרון :

דרך א' (יש בעיית סימנים באנרגיה...) :

הצפיפות פרופורציונית להסתברות מציאת החלקיק במיקום מסוים לכן :

$n(r)=n_0e^{-\beta E(r)}$, כאשר האנרגיה : $E_k=\frac{Mv^2}{2}=\frac{M\omega^2r^2}{2}=-E(r)$.

$$Z_1=\sum_r e^{-\beta E(r)}=\int_0^R 2\pi rL\cdot dr\cdot e^{-\beta\frac{M\omega^2r^2}{2}}=-\frac{2\pi L}{\beta M\omega^2}\left(e^{-\beta\frac{M\omega^2r^2}{2}}-1\right)$$

כמו כן $Z_N=\frac{(Z_1)^N}{N!}$ ולכן $F=-\tau\log Z_N=-\tau\left[\log(Z_1)^N-\log N!\right]$

$$n_0=\frac{N}{V}=\frac{\langle p\rangle}{\tau}=-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_\tau=N\frac{\partial}{\partial V}\log\left[\frac{2\pi L}{-\beta M\omega^2}\left(e^{-\beta\frac{M\omega^2}{2}\frac{V}{\pi L}}-1\right)\right]$$

ואחרי פיתוח נקבל כי : $n_0=\frac{N\beta M\omega^2}{2\pi L\left(e^{\beta\frac{M\omega^2}{2}R^2}-1\right)}$

ולכן נסכם נקבל כי הצפיפות כתלות במרחק מהציר היא :

$$\boxed{n(n)=\frac{N\beta M\omega^2}{2\pi L\left[\exp\left(\beta\frac{M\omega^2}{2}R^2\right)-1\right]}\exp\left(\beta\frac{M\omega^2}{2}r^2\right)}$$

דרך ב' :

כמו בדרך א', $E(r)=-\frac{M\omega^2r^2}{2}$ ופונקצית הצפיפות עצמה היא :

$$n(r)=A\exp\left[-\beta U(r)\right]=A\exp\left(\frac{\beta M\omega^2}{2}r^2\right)$$

אך כעת פשוט נרמל את הצפיפות :

$$N=\int_0^R 2\pi rL\cdot dr\cdot n(r)=2\pi LA\int_0^R r\cdot\exp\left(\frac{\beta M\omega^2}{2}r^2\right)dr=$$

$$=\frac{2\pi LA}{\beta M\omega^2}\left[\exp\left(\frac{\beta M\omega^2}{2}R^2\right)-1\right]$$

ובסה"כ נגיע לאותה תשובה :

$$\boxed{n(n)=\frac{N\beta M\omega^2}{2\pi L\left[\exp\left(\frac{\beta M\omega^2}{2}R^2\right)-1\right]}\exp\left(\frac{\beta M\omega^2}{2}r^2\right)}$$

שיעורי בית 9

❖ תרגיל 1 : הוכח כי הפוטנציאל הכימי נתון ע"י : $\mu=-\tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)_{U,V}$

פתרון :

$$\mu=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{\tau,V}=\frac{\partial}{\partial N}(U-\tau\sigma)_{\tau,V}=\cancel{\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{\tau,V}}-\tau\left(\frac{\partial\sigma}{\partial N}\right)_{\tau,V}$$

כאן החלק השמאלי נפל כי אנו דנים בעצם באנרגיה קבועה $U\propto\tau=const$

❖ תרגיל 2 : נתונה מערכת עם 2 מצבים חד-אטומיים עם אנרגית אכלוס שווה. כאשר שניהם לא מאוכלסים האנרגיה אפס וכאשר רק מצב אחד (כלשהו) מאוכלס יש אנרגיה ε . מניחים כי האנרגיה כאשר שניהם מאוכלסים גדולה (אינסופית). המערכת נמצאת בפוטנציאל כימי קבוע μ .

חשב את המספר הממוצע של החלקיקים המאכלסים את המערכת.

פתרון :

$$\mathcal{Z}=\sum_{N=0}^{2}\sum_s\exp\left[(N\mu-\varepsilon_s)\beta\right]=$$

$$=\exp\left[(0\mu-0)\beta\right]+2\exp\left[(1\mu-\varepsilon)\beta\right]+\exp\left[(2\mu-\infty)\beta\right]=$$

$$=1+2\exp\left[(\mu-\tau)\beta\right]\Rightarrow 1+2\lambda e^{-\beta\varepsilon}$$

$$\langle N\rangle=\lambda\frac{\partial\log\mathcal{Z}}{\partial\lambda}=\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\log\left(1+2\lambda e^{-\beta\varepsilon}\right)\right]=...=\frac{2}{2+\exp\left[\beta(\varepsilon-\mu)\right]}$$

❖ תרגיל 3 : נתונה קופסה המכילה גז אידיאלי בלחץ p וטמפרטורה τ .

על קירות הקופסה יש N_0 אתרי ספיחה, כאשר כ"א מהם יכול לספוח לכל היותר מולקולה אחת של הגז. אנרגיה של אתר מאוכלס היא $-\varepsilon$.

חשב את מספר המולקולות הממוצע שמאכלסים האתרים.

פתרון :

הפוטנציאל הכימי של הגז :

$$\mu_{gas}=\tau\log\frac{n_N}{n_Q}=\tau\log\frac{p/\tau}{\left(\frac{M\tau}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}}=\tau\log\frac{p}{\left(\frac{M}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\tau^{5/2}}$$

פונקצית החלוקה המוכללת עבור אתר ספיחה יחיד היא :

$$\mathcal{Z}_1(\mu,\beta)=\sum_{N=0}^{1}\sum_s\exp\left[(N\mu-\varepsilon)\beta\right]=$$

$$=\exp\left[(0\mu-0)\beta\right]+\exp\left[(1\mu-(-\varepsilon))\beta\right]=1+e^{(\varepsilon+\mu)\beta}$$

כל אתרי הספיחה הינם ב"ת ומאובחנים לכן פונקצית החלוקה הכללית :

$$\mathcal{Z}_{N_0}(\mu,\beta)=\mathcal{Z}_1^{N_0}(\mu,\beta)=\left(1+e^{(\varepsilon+\mu)\beta}\right)^{N_0}$$

$$\langle N\rangle=\lambda\frac{\partial\log\mathcal{Z}_{N_0}}{\partial\lambda}=\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\log\left(1+e^{(\varepsilon+\mu)\beta}\right)^{N_0}=\lambda N_0\frac{e^{\varepsilon\beta}}{1+\lambda e^{\varepsilon\beta}}$$

$$\Rightarrow\langle N\rangle=\frac{N_0}{1+\lambda e^{-\varepsilon\beta}\left(\frac{M}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\tau^{5/2}p^{-1}}$$

שיעורי בית 10

❖ תרגיל 1: גוף בעל קיבול חום קבוע C וטמפ' T_a מצומד לאמבט בטמפרטורה T_b. מהו שינוי האנטרופיה הכללי אחרי השגת שיווי משקל?

פתרון:

השינוי באנטרופיה נובע משני גורמים – השינוי באמבט והשינוי בגוף:

$$\Delta\sigma=\Delta\sigma_{bath}+\Delta\sigma_{body}=\frac{\Delta Q}{T_b}+C\int_{T_a}^{T_b}\frac{dT}{T}=\frac{C\left(T_a-T_b\right)}{T_b}+C\log\frac{T_b}{T_a}$$

לכן בסה"כ נקבל כנדרש: $\Delta\sigma=C\left(\frac{T_a}{T_b}-1-\ln\frac{T_a}{T_b}\right)$

כמו כן $\Delta\sigma\cong C\left\{\frac{T_a}{T_b}-1-\left[-1+\frac{T_a}{T_b}-\frac{1}{2}\left(\frac{T_a}{T_b}\right)^2\right]\ln\frac{T_a}{T_b}\right\}\geq 0$

❖ תרגיל 2: שני גופים זהים בעלי קיבול חום C וטמפ' התחלתית T_1,T_2 מחוברים ע"י מנוע הפיך להפקת עבודה עד שהטמפ' שהם מגיעים לטמפ' T_f

א. הראה כי טמפ' סופית זו היא בדיוק $T_f=\sqrt{T_1T_2}$.

ב. הראה כי העבודה שהופקה בתהליך היא: $W_t=C\left(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}\right)^2$

פתרון:

א. נצא משימור האנרגיה, בזמן מזערי: $CdT=dU=dQ+\underbrace{dW}_{0}=\tau d\sigma$

$$C\frac{dT}{T}=k_Bd\sigma\Rightarrow C\ln\frac{T_f}{T_1}=k_B\Delta\sigma_1\ ;\ C\ln\frac{T_f}{T_2}=k_B\Delta\sigma_2\ ;\ \Delta\sigma_1=-\Delta\sigma_2$$

$$\Rightarrow C\ln\frac{T_f}{T_1}=-C\ln\frac{T_f}{T_2}\Rightarrow T_f=\sqrt{T_1T_2}$$

ב. $W=-Q_1-Q_2=-C\left(\int_{T_2}^{T_f}dT_2+\int_{T_1}^{T_f}dT_1\right)=-C\left(2T_f-T_2-T_1\right)=W_t$

❖ תרגיל 3: חשב את נצילות המנוע המתואר ע"י שני תהליכים איזובריים $a\to b$ @ p_1 , $c\to d$ @ p_2 ושני תהליכים אדיאבטיים משלימים.

פתרון:

היות והתהליך הוא איזוברי ואדיאבטי בלבד, החום המועבר מהאמבט למכונה וההיפך נתרם ע"י התהליך האיזוברי בלבד: $Q=p\left(V_1-V_2\right)\frac{C_p}{N}$

$$\Rightarrow Q_{in}=p_1\left(V_b-V_a\right)\frac{C_p}{N}>0\ ;\ Q_{out}=p_2\left(V_d-V_c\right)\frac{C_p}{N}<0$$

$$pV^\gamma=const\Rightarrow\begin{cases}p_1^{1/\gamma}V_a=p_2^{1/\gamma}V_d\\ p_1^{1/\gamma}V_b=p_2^{1/\gamma}V_c\end{cases}\Rightarrow p_1^{1/\gamma}\left(V_a-V_b\right)=p_2^{1/\gamma}\left(V_d-V_c\right)$$

$$\Rightarrow\eta=1+\frac{Q_{out}}{Q_{in}}=1-\frac{\left|Q_{out}\right|}{Q_{in}}=1-\frac{p_2\left(V_d-V_c\right)}{p_1\left(V_b-V_a\right)}=1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}<1$$

❖ תרגיל 4: נתון מקרר הצורך עבודה W למחזור ע"מ להוציא חום Q_l מהאמבט הקר T_l ולהעביר חום $-Q_h$ לאמבט החם T_h. הוגדר $\gamma=Q_l/W$. מצא חסם עליון ל- γ עפ"י החוק השני של תרמודינמיקה.

פתרון:

נצמיד מכונת קרנו המקבלת חום Q_h' מהמאגר החם, מפיקה עבודה $W=-Q_h-Q_l$ (וזו בדיוק העבודה שצורכת המכונה שלנו) ואת השאר $-Q_l'$ מעבירה למאגר הקר. נצילות קרנו ידועה וזו הנצילות המקס' ולכן החסם:

$$\eta_C=\frac{W}{Q_{in}}=\frac{-Q_h-Q_l}{Q_h'}=1-\frac{T_l}{T_h}\xrightarrow{(\ )^{-1}}\frac{T_h}{T_h-T_l}=\frac{Q_h'}{-Q_h-Q_l}$$

$$\frac{T_h}{T_h-T_l}-1=\frac{Q_h'}{-Q_h-Q_l}-1\Rightarrow\frac{T_l}{T_h-T_l}=\frac{Q_h'+Q_h+Q_l}{-Q_h-Q_l}=\frac{-Q_l'}{-Q_h-Q_l}$$

מכונת הקרנו ביטלה למעשה את מקרר כך שכעת עובר חום $Q_l-\left(-Q_l'\right)$ מהמאגר הקר אל המאגר החם ולכן עפ"י Clausius $Q_l-\left(-Q_l'\right)\leq 0$

$$\Rightarrow\frac{T_l}{T_h-T_l}=\frac{-Q_l'}{-Q_h-Q_l}\geq\frac{Q_l}{-Q_h-Q_l}=\frac{Q_l}{W}=\gamma$$

❖ תרגיל 5: נתון גז אידאלי של פרמיונים בטמפ' T.

חשב את ההסתברות $P(n)$ לכך שיהיו n חלקיקים באורביטל נתון.

פתרון:

נחשב פונקציות החלוקה של Gibbs: $\boxed{\mathcal{Z}=\sum_n e^{-\beta\left(\varepsilon_n-\mu n\right)}=1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}$

מספר ממוצע של חלקיקים באורביטל: $\boxed{\left\langle n\right\rangle=f_{FD}=\frac{1}{1+e^{\beta(\varepsilon-\mu)}}}$

ההסתברות: $\boxed{P(n)=\frac{1}{\mathcal{Z}}e^{-\beta\left(\varepsilon_n-\mu n\right)}=\frac{e^{-\beta\left(\varepsilon_n-\mu n\right)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}=\frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)n}}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}}$

ולכן נקבל: $\boxed{P(0)=\frac{1}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}=\frac{1}{\mathcal{Z}}\ \ ;\ \ P(1)=\frac{e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}{1+e^{-\beta(\varepsilon-\mu)}}=\left\langle n\right\rangle}$

❖ תרגיל 6: נתון מל"מ קלאסי (לא מנוון) הראה קשר בין רמות פרמי.

פתרון:

ידוע הקשר: $n_c\exp\left[-\beta\left(\varepsilon_c-\mu_i\right)\right]=n_v\exp\left[-\beta\left(\mu_i-\varepsilon_v\right)\right]=n_i$

$$\Delta n=n_e-n_h=n_c\exp\left[-\beta\left(\varepsilon_c-\mu\right)\right]-n_v\exp\left[-\beta\left(\mu-\varepsilon_v\right)\right]=$$

$$=n_i\exp\left[\beta\left(\mu-\mu_i\right)\right]-n_i\exp\left[-\beta\left(\mu-\mu_i\right)\right]=n_i2\sinh\left[\beta\left(\mu-\mu_i\right)\right]$$

ולכן מקבלים את הקשר הדרוש: $\boxed{\frac{\Delta n}{n_i}=2\sinh\left[\beta\left(\mu-\mu_i\right)\right]}$

❖ תרגיל 7: עבור אלקטרונים עם אנרגיה $\varepsilon\gg mc^2$ (יחסותיים) האנרגיה נתונה ע"י $\varepsilon=pc$. מצא את אנרגית פרמי של הגז וחשב את $E(T=0)$.

פתרון:

מהנתון מסיקים כי האלק' מתנהג כפוטון (שגם לו 2 דרגות חופש) ולכן:

$$N=\int_0^{\varepsilon_F}g_\gamma(\varepsilon)d\varepsilon=\frac{L^3}{\hbar^3c^3\pi^2}\frac{\varepsilon_F{}^3}{3}\ \Rightarrow\ \varepsilon_F=\sqrt[3]{\frac{3N\hbar^3c^3\pi^2}{L^3}}$$

$$\left\langle\varepsilon_{T=0}\right\rangle=\frac{\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon g_\gamma(\varepsilon)d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F}g_\gamma(\varepsilon)d\varepsilon}=\frac{\alpha\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^3d\varepsilon}{\alpha\int_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^2d\varepsilon}=\frac{\varepsilon_F{}^4}{4}\left(\frac{\varepsilon_F{}^3}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{4}\varepsilon_F$$

ולכן נסכם ונקבל כי: $E(T=0)=N\left\langle\varepsilon_{T=0}\right\rangle=\frac{3}{4}N\varepsilon_F$

❖ תרגיל 8: נתון גז תלת-מימדי של בוזונים, עבורו אנרגיה של חלקיקי בודד נתונה ע"י $\varepsilon_n(p)=\frac{p^2}{2m}+\alpha n\ ,\ \alpha>0\ ,\ n=-j,...,j$.

מצא את הטמפ' הקריטית של בוז-אינשטיין עבור $\alpha\to 0$.

פתרון:

$$g(\varepsilon)=\sum_{n=-j}^{j}g_0\left(\varepsilon-n\alpha\right)=\sum_{n=-j}^{j}\underbrace{\frac{L^3m^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}}_{\triangleq\varphi}\sqrt{\varepsilon-n\alpha}$$

$$\xrightarrow[\alpha\to 0]{}\sum_{n=-j}^{j}\varphi\sqrt{\varepsilon}\left(1-\frac{n\alpha}{2\varepsilon}\right)=\varphi\sqrt{\varepsilon}\left(2j+1\right)-\varphi\sqrt{\varepsilon}\frac{\alpha}{2\varepsilon}\sum_{n=-j}^{j}n=$$

$$\Rightarrow g(\varepsilon)=\varphi\sqrt{\varepsilon}\left(2j+1\right)+0=g_0(\varepsilon)\left(2j+1\right)$$

יש כאן הכפלה בפקטור קבוע לכן עבור אותו פיתוח כמו בכיתה נקבל:

$$T_C=\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left(\frac{N}{2.612V}\right)^{2/3}\left(2j+1\right)^{-2/3}$$

❖ תרגיל 9: אלקטרון חופשי במתכת מתנהג כחלקיק של גז פרמי אידיאלי.

א. חשב את המהירות הממוצעת של אלק' במתכת לפי v_F , $\varepsilon_F=\frac{1}{2}mv_F^2$.

ב. בהנחה כי כל אטום תורם אלק' יחיד, מהיא המהירות הממוצעת של אלק' חופשי בטמפ' החדר. נתון $M_{atom[gr/mole]}$, $\rho_{\left[gr/cm^3\right]}$, Z , $N_{A[particles/mole]}$

פתרון:

$$\frac{N}{V}=n_e\cdot N_{A[particles/mole]}\cdot\frac{\rho}{M}\left[\frac{gr/cm^3}{gr/mole}\right]=1\cdot 6.022\cdot 10^{23}\frac{10.49}{107.9}$$

$$\left\langle v\right\rangle=\frac{1}{N}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}g(\varepsilon)f_{FD}(\varepsilon-\mu)d\varepsilon=...=\frac{3}{4}v_F\left[1+\frac{\pi^2}{6}\frac{\tau^2}{\varepsilon_F^2}\right]$$

הסתברות :

- מרחב האפשרויות (המדגם) : $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$
- הסתברות לאירוע : $P(\omega_i)=P_i$
- צפיפות ההסתברות : $P(x)\ge 0 \quad \int P(x)dx=1$
- תוחלת : $\langle x\rangle=\sum_i x_iP_i=\int xP(x)dx$
- תוחלת של פונקציה : $\langle f(x)\rangle=\sum_i f(x_i)P_i=\int f(x)P(x)dx$
- שונות : $var(x)=\sigma_x^2=\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$
- שונות משותפת : $cov(x,y)=\langle x\cdot y\rangle-\langle x\rangle\langle y\rangle$

  השונות המשותפת מתאפסת עבור x,y בלתי תלויים.
- תכונות וזהויות :

$$\langle x\pm a\rangle=\langle x\rangle\pm a \quad ; \quad \langle x\pm y\rangle=\langle x\rangle\pm\langle y\rangle$$

$$var(x\pm y)=var(x)+var(y)\pm 2cov(x\pm y)$$

רוחב הגאוסיאן מאופיין ע"י : $\frac{\sqrt{\mathrm{var}(x)}}{\langle x\rangle}=\frac{\sigma_x}{\langle x\rangle}$

- משפט הגבול המרכזי : אם $X_1,X_2,...,X_N$ ב"ת עם תוחלות (μ_i) ושונויות (σ_i^2) סופיות. נגדיר סכום $S_N=\sum_{i=1}^N X_i$ עם

תוחלת $\langle S_N\rangle=\sum_i\mu_i=N\mu$ ושונות $\mathrm{var}(S_N)=\sum_i\sigma_i^2=N\sigma$

אזי עבור $N\to\infty$ ההתפלגות מתקרבת להתפלגות נורמאלית (גאוסית) :

$$P(S_N)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mathrm{var}(S_N)}}e^{-\frac{\left(S_N-\langle S_N\rangle\right)^2}{2\mathrm{var}(S_N)}}$$

קומבינטוריקה :

- בינום ניוטון : $(a+b)^N=\sum_{n=0}^N\binom{N}{n}a^Nb^{N-n}$

סידורים : סידור N עצמים שונים בשורה : $N!$

בחירות : בחירת k עצמים מתוך N ערכים אפשריים לכל עצם.

	עם חשיבות הסדר	אין חשיבות לסדר
עם חזרות	N^k	$\frac{(N+k-1)!}{k!(N-1)!}$
בלי חזרות	$\frac{N!}{(N-k)!}$	$\frac{N!}{k!(N-k)!}$

נספח גיאומטרי :

- נפח היפר-כדור : $V=\int\limits_{n_1^2+n_2^2+...+n_d^2\le R^2}\prod_{i=1}^d dn_i=\frac{\left(\sqrt{\pi}R\right)^d}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}$

כאשר d - מימד הכדור, $R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+...+x_d^2}$ - רדיוס הכדור.

- זווית מרחבית :

$$d\Omega_{2D}=d\varphi$$

$$d\Omega_{3D}=\sin\theta d\theta d\varphi$$

- זווית ממוצעת :

$$\begin{cases}\langle\cos\theta\rangle\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}=\frac{d\Omega}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi}{4\pi}=\frac{1}{4}$$

נספח מתמטי :

- קבוע בולצמן : $k_B=1.38\cdot 10^{-23}\,[J/K]$
-
- קירובים :

✓ טיילור : $(1\pm\alpha x)^n=1\pm\alpha nx \;;\; (1\pm\alpha)^n=1\pm n\alpha$

$$e^{\alpha x}=1+\alpha x+\frac{(\alpha x)^2}{2} \quad ; \quad e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!} \quad ; \quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}$$

✓ סטרלינג : (עבור $N\gg 1$) : $N!\approx\sqrt{2\pi N}\cdot N^N\exp(-N+\frac{1}{2N}+...)$

$$\Rightarrow \ln(N!)\approx N\ln(N)-N$$

✓ לינאריזציה :

$$\frac{1}{1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3}=1-a_1x+\left(a_1^2-a_2\right)x^2+\left(-a_1^3+2a_1a_2-a_3\right)x^3$$

- פונקצית גאמה : $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$

✓ תכונות של פונקצית הגאמה :

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1 \;;\; \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \;;\; \Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \;;\; \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \quad ; \quad \Gamma(n+1)=n!$$

- אינטגרלים שימושיים :

פונקצית גאמה : $\int_{-\infty}^\infty x^me^{-ax^2}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{a^{\frac{m+1}{2}}}$

$$\int_{-\infty}^\infty x^me^{-ax}dx=\frac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}}$$

$$\int_0^\infty\frac{x^3\cdot dx}{e^x-1}=\frac{\pi^4}{15} \;;\; \int_0^\infty\frac{x^2\cdot dx}{e^x-1}=2.404\approx\frac{\pi^3}{12.9} \;;\; \int_0^\infty\frac{x\cdot dx}{e^x-1}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int\frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}\pm 1}=\mp\tfrac{1}{\beta}\ln\left[1\pm e^{\beta(\mu-\varepsilon)}\right] \;;$$

$$\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2\cdot dx}{4\cosh^2\frac{x}{2}}=\frac{\pi^2}{3} \;;\; \int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{a} \;;$$

אינטגרל על גאוסיאן : $\int_{-\infty}^\infty dx\cdot e^{-\alpha x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

- זהויות דיפרנציאליות :

$$F-\tau\left(\frac{\partial F(\tau)}{\partial\tau}\right)_{V,N}=-\tau^2\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{F(\tau)}{\tau}\right)_{V,N}$$

- סכום סדרה הנדסית סופית : $\sum_{s=m}^n a^s=\frac{1-a^{m+n+1}}{1-a}$
- סכום סדרה הנדסית אינסופית : $\sum_{s=m}^\infty a^s=\frac{a^m}{1-a}$

הבהההבהב