דף נוסחאות – מבוא לתרמודינמיקה ופיסיקה סטטיסטית – 114016 – אביב תשס"ז

מבוא הסתברותי:

N - מספר הניסויים

N_i - מספר הפעמים שהתקבל x_i

P_i - ההסתברות שיצא x_i

$$\lim_{N\to 0}\frac{N_i}{N}=P_i$$

$$\bar{x}=\sum_i x_i P_i \qquad \bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)dx$$

$$\overline{f(x)}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$$

$$\mathrm{var}(x)=\overline{(\Delta x)^2}=\overline{\left(x-\bar{x}\right)^2}=\overline{x^2}-\bar{x}^2$$

סטייה יחסית: $\mathrm{std}(x)=\sqrt{\mathrm{var}(x)} \qquad \delta=\mathrm{std}(x)/\bar{x}$

מספר האפשרויות לקבל n הצלחות מתוך N ניסויים ללא חשיבות לסדר פנימי:

$$C_N^n=\binom{N}{n}=\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

מספר האפשרויות לסדר k כדורים זהים ב- N תאים (או לקבל אנרגיה כוללת k באמצעות N חלקיקים):

$$\frac{(k+N-1)!}{(N-1)!k!}$$

(multiplicity function)

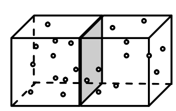
פילוג בינומי – הסיכוי לקבל n הצלחות מתוך N ניסויים:

$$\mathrm{P_N(n)}=\binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}$$

אנטרופיה:

מערכת מבודדת שואפת להגיע למצב של אנטרופיה מכסימלית.

$$S=k\ln W$$



W_1 W_2

$$\Rightarrow W_{Tot}=W_1\cdot W_2$$

תנאי לשיווי משקל: $\frac{dS_1}{dE_1}=\frac{dS_2}{dE_2}$

טמפרטורה: $\frac{1}{T}=\left(\frac{dS}{dE}\right)_{V,N}$

ספירת מצבים:

שיטה קוונטית (מתוך המשוואה הקוונטית לאנרגיה) :

$$\varepsilon(n_1,n_2,...,n_D)\Rightarrow R(\varepsilon)=\sqrt{n_1^{\,2}+..+n_D^{\,2}}$$

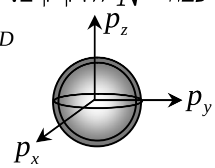
$$M(\varepsilon)=\frac{1}{2^D}V_{sphere}\left[R(\varepsilon)\right]$$

V_{sphere} - נפח כדור D מימדי

שיטה סמי- קלאסית (לתנע מסלולים מותרים – כפולה של h):

עבור N חלקיקים:

$$M(\varepsilon)=\frac{1}{h^{ND}}\cdot V_P(R=\sqrt{2m\varepsilon})\cdot V_{ND}$$



V_{ND} - נפח ND מימדי במרחב המיקום

V_P - נפח כדור ND מימדי במרחב התנע

$$g(\varepsilon)=\frac{dM(\varepsilon)}{d\varepsilon} \qquad V(\varepsilon)=\frac{g(\varepsilon)}{V}$$

$$S_\odot=4\pi R^2 \qquad V_\odot=4\pi R^3/3$$

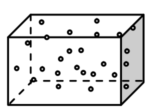
חלקיק בקופסא תלת-מימדית:

$$g(\varepsilon)=2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}$$

- יש להתחשב גם במספר מצבי הספין והקיטוב האפשריים.

פילוג/ צבר קנוני:

מספר חלקיקים קבוע.



T

ההסתברות של חלקיק להיות במצב קוונטי בעל אנרגיה E_i:

$$P_i=\frac{1}{Z}\Omega(E_i)e^{-\beta E_i}$$

$$\beta=\frac{1}{kT}$$

פונקציית חלוקה: (מכילה מידע מיקרוסקופי, וחסרת מימדים).

$$Z=\sum_i\Omega(E_i)e^{-\beta E_i}$$

ניוון

עבור N חלקיקים:

מובחנים: $Z_N=Z_1^{\,N}$ לא מובחנים (גז): $Z_N=\frac{1}{N!}Z_1^{\,N}$

לחץ, אנטרופיה, אנרגיה פנימית וחופשית והקשרים ביניהם:

אנרגיה פנימית:

$$U=\bar{E}=-\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z=kT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z$$

לחץ : $P=Force/Surface$

$$P=-\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

$$P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

משוואת מצב (קשר בין P,V,T):

קיבול חום (כמות החום הדרושה ע"מ להעלות במעלה אחת את T):

$$C_V=\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

מקדם התפשטות:

$$\alpha(T)=\frac{1}{L}\frac{dL}{dT}$$

האנרגיה החופשית של הלמהולץ: (קשר בין U,F,T,S)

$$F=-kT\ln Z$$

$$F=U-ST$$

$$dF=-PdV-SdT \Rightarrow dF\big|_{T=const}=-PdV$$

שינוי אנרגיה בהשפעה תרמית בלבד:

$$\Delta U=T\Delta S \Leftrightarrow \frac{1}{T}=\left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V$$

תהליך מכני טהור, ללא מעבר חום:

$$\Delta U=-P\Delta V \Leftrightarrow P=-\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

בשיווי משקל מתקיים:

$$\Rightarrow \underbrace{dU}_{\delta E}=\underbrace{TdS}_{\delta Q}\underbrace{-PdV}_{\delta W=F\cdot dh}$$

δE שינוי באנרגיית המערכת

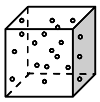
δQ כמות חום שנכנסה למערכת

$\delta W=F\cdot dh$ עבודה מכנית על המערכת, שינוי בנפח

חוקי התרמודינמיקה:

- חוק אפס: אם שתי מערכות בש.מ עם גוף שלישי, הן נמצאות בש.מ ביניהן.
- חוק ראשון: $\delta Q=\delta E+\delta W$ - שימור אנרגיה
- חוק שני: $0\le\Delta S=S_f-S_i$ - במערכת מבודדת תרמית, האנטרופיה יכולה לגדול או לא להשתנות.

גז אידיאלי: $\{3D\}$



T

פילוג בולצמן: $f_{Boltzman}(E)=e^{-\beta(E-\mu)}$

צפיפות קוונטית: $n_Q=\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$

פונקציית חלוקה: $Z_N=\frac{1}{N!}(\underbrace{Vn_Q}_{Z_1})^N$

צפיפות מצבים: $g(\varepsilon)d\varepsilon=2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$

$$F=-NkT\left[\log\left(\frac{n_Q}{n}\right)+1\right] \qquad \mu=kT\log\left(\frac{n}{n_Q}\right)$$

פילוג מקסוול לפי אנרגיה ומהירויות:

$$\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT \Leftarrow P(\varepsilon)=Cg(\varepsilon)e^{-\beta\varepsilon}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}e^{-\beta\varepsilon}$$

משוואת מצב (בשיווי משקל): $PV=NkT$

$$U=\frac{3}{2}PV=\frac{3}{2}NkT \qquad C_V=\frac{3}{2}Nk$$

$$S=kN\left[\ln\left(\frac{n_Q}{n}\right)+\frac{5}{2}\right]=\frac{3}{2}kN\ln\left(\frac{PV^{5/3}}{kN^{5/3}}\right)$$

$$F(v)=4\pi\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}v^2e^{-\frac{\beta mv^2}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$V_{m.p}=\sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad \bar{V}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$PV^{5/3}=const \Leftrightarrow S=const \qquad PV=const \Leftrightarrow S\neq const$$

פלקטואציות (המערכת מצומדת לאמבט חום בטמפ' T):

הסיכוי למצוא את x באינטרוול dx: $P(x)dx=Ce^{-E(x)\beta}$

$C=Z^{-1}$

גז אידיאלי (מפילוג מקסוול):

חלקיק אחד: $\bar{\varepsilon}=\frac{3}{2}kT \quad \overline{\Delta\varepsilon^2}=\frac{3}{2}(kT)^2 \quad \delta=\sqrt{\frac{2}{3}}$

N חלקיקים: $\bar{E}=\frac{3}{2}NkT \quad \overline{\Delta E^2}=\frac{3}{2}N(kT)^2 \quad \delta=\sqrt{\frac{2}{3N}}$

אוסצילטור הרמוני:

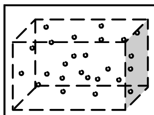
$$P(x)dx=\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\pi kT}}e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} \quad \bar{x}=0 \quad \overline{\Delta x^2}=\sqrt{\frac{kT}{m\omega^2}}$$

מטען על קבל:

$$P(Q)dQ=\frac{e^{-\frac{Q^2}{2CkT}}}{\sqrt{2\pi CkT}} \quad \bar{Q}=0 \quad \overline{\Delta Q^2}=\sqrt{CkT}$$

- כל קואורדינטה ריבועית באנרגיה, מקבלת בממוצע: $\bar{E}=\frac{1}{2}kT$

פילוג גרנד קנוני: מספר החלקיקים לא קבוע. T,μ



ההסתברות שהמערכת נמצאת במיקרו מצב i עם אנרגיה E_i ומספר חלקיקים N:

$$P_{N,i}=Ce^{\beta(\mu N-E_{N,i})}$$

משוואות מוכללות:

$$S(U,V,N)\Rightarrow dS=\frac{1}{T}dU+\frac{P}{T}dV-\frac{\mu}{T}dN$$

$$U(S,V,N)\Rightarrow dU=TdS-PdV+\mu dN$$

$$F(T,V,N)\Rightarrow dU=-SdT-PdV+\mu dN$$

פוטנציאל כימי:

$$\mu=\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V}=\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}=-T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V}$$

פראמגנטיות: N ספינים נמצאים בש.מ עם אמבט T ושדה מגנטי B.

ספין "up" עם אנרגיה $\uparrow -\mu B$

ספין "down" עם אנרגיה $\downarrow \mu B$

כיוון השדה: $\vec{B}\uparrow$

$$\eta=\frac{\mu B}{kT} \qquad N_\uparrow=\frac{Ne^{\eta}}{e^{\eta}+e^{-\eta}} \qquad N_\downarrow=\frac{Ne^{-\eta}}{e^{\eta}+e^{-\eta}}$$

$$\tanh\eta=\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{e^{\eta}+e^{-\eta}} \qquad M=\mu(N_\uparrow-N_\downarrow)=\mu\tanh\eta$$

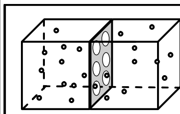
חוק "Curie" בטמפ' גבוהות: $M=N\beta\mu^2B$

סוספטביליות מגנטית: $\chi_0=\lim_{B\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)$

אנרגיה כוללת: $U=-M\cdot B$

פונקציית חלוקה: $Z_1=2\cosh\eta$

פוטנציאל כימי:



$N_1 \rightleftarrows N_2$

תנאי לשיווי משקל: $\frac{dS_1}{dN_1}=\frac{dS_2}{dN_2}$ $\Rightarrow$ פוטנציאל כימי μ: $\left(\frac{dS}{dN}\right)_{V,U}=\frac{\mu}{T}$

- הפוטנציאל הכימי הוא כמות האנרגיה שיש להשקיע ע"מ להוסיף חלקיק מערכת.

גזים קוונטיים: פילוגי $Fermi$ & $Bose-Einstein$

משמעות כל פילוג הוא המספר הממוצע של החלקיקים במצב חד-חלקיקי בעלי אנרגיה E.

פילוג פרמי: עבור פרמיונים בעלי ספין חצי שלם. μ שווה לפחות לאנרגיית פרמי.

$$f_{FD}(E)=\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}$$

פילוג בוזה-איינשטיין: עבור בוזונים בעלי ספין שלם. μ נמוך מכל רמות האנרגיה.

$$f_{BE}(E)=\frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}-1}$$

פילוג בולצמן (הגבול הקלאסי):

$$f_{Boltzman}(E)=e^{-\beta(E-\mu)}$$

תנאי לסטטיסטיקת בולצמן: $e^{-\beta\mu}\gg 1 \Leftarrow \mu$ שלילי ו- $|\mu|\gg kT$

אורך גל-דברולי קטן מאוד ביחס למרחק בין החלקיקים: $\lambda\ll(V/N)^{1/3}$

גז אלקטרונים במתכת $\{3D\}$: פרמיונים בעלי ספין חצי, מסה m ואנרגיה - $E = p^2/2m$

צפיפות: $n = \frac{N}{V}$

פילוג פרמי: $f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1}$

בטמפרטורה $T=0$:

אנרגית פרמי: $\varepsilon_F = \mu_{(T=0)}$ $\quad \varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}n\right)^{2/3}$

צפיפות מצבים: $g(E)dE = 2\cdot 2\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}dE$

$N_{T=0} = \frac{8\pi}{3}V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_F^{\frac{3}{2}} \qquad U_{T=0} = \frac{3}{5}N\varepsilon_F$

מס' חלקיקים כולל: $N = \int g_e(E)f_{FD}(E)dE$

$P_{T=0} = \frac{2}{5}n\varepsilon_F$

אנרגיה כוללת: $U = \int g_e(E)f_e(E)EdE$

קיבול חום בהשוואה לגז קלאסי: $C_V \simeq Nk\left(\underbrace{kT/\varepsilon_F}_{\ll 1}\right) \Rightarrow C_V(metal) \ll C_V(classic)$

חילוץ פוטנציאל כימי ב- $T \neq 0$:

$N_{T\neq 0} = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int\frac{\sqrt{E}dE}{e^{\beta(E-\mu)}+1} \Rightarrow \mu$

- ב - $T \to 0$, E ו- μ מסדר גודל דומה: $e^{\beta(E-\mu)} \approx 1$
- בטמפ' החדר גז אלקטרונים במתכת הוא גז מנוון - $kT \ll \varepsilon_F$

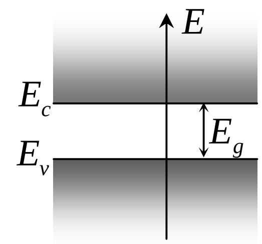
נושאי מטען במל"מ:

$f_e(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)}+1} \qquad f_h(E) = \frac{1}{e^{\beta(\mu-E)}+1} \qquad N_C = 2\left(\frac{2\pi m_C kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \varepsilon = \frac{E-E_C}{kT}$

$g_C(E)dE = 4\pi V\left(\frac{2m_C}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E-E_C}dE \qquad N_V = 2\left(\frac{2\pi m_V kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad \varepsilon_g = \frac{E_g}{kT}$

$g_V(E)dE = 4\pi V\left(\frac{2m_V}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{E_V-E}dE$

$F(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{\varepsilon}d\varepsilon}{e^{\varepsilon-z}+1} \qquad \eta = \frac{\mu-E_C}{kT}$



בגז קלאסי מתקיים: $|\eta| \gg 1,\ |-\varepsilon_g-\eta| \gg 1$

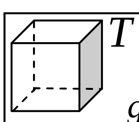
$\mu = \frac{E_C-E_V}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_V}{m_C}\right)$

צפיפויות נשאי המטען: $n = N_C F(\eta)$

$p = N_V F(-\varepsilon_g-\eta)$

תנאי לסטטיסטיקת בולצמן (גז קלאסי): $E_g \gg kT$
למשל סיליקון אינטרינזי במטפ' החדר.

בחומר ניטרלי: $\mu \Leftarrow n = p$



קרינת גוף שחור: גז בוזה של פוטונים חסרי מסה, בעלי קיטוב 2 וספין 1 ואנרגיה - $E = pc = \hbar\omega = h\upsilon$

$g(E) = \frac{VE^2}{\pi^2(\hbar c)^3} \qquad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = 0$

מס' פוטונים בעלי אנרגיה E: $dN_E = dn_E\cdot V = \frac{V}{h^2}\frac{E^2dE}{(\hbar c)^3(e^{\beta E}-1)}$
$\Downarrow$

מס' פוטונים ליח' נפח, בתחום $d\upsilon$ בזווית מרחבית $d\Omega$: $dn_\upsilon(\theta,\varphi) = \frac{dn_\upsilon}{4\pi}\underbrace{\sin\theta d\theta d\varphi}_{d\Omega}$

מס' פוטונים בתדר υ: $E = h\upsilon \Rightarrow \quad dN_\upsilon = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{\upsilon^2d\upsilon}{(e^{\beta h\upsilon}-1)}$

שטף פוטונים: $d\phi_{\theta,\varphi,\upsilon} = dn_\upsilon(\theta,\varphi)\cdot c\cdot\cos\theta$

אנרגיה בתדר υ: $dN_\upsilon\cdot h\upsilon = dU_\upsilon = \frac{8\pi V}{c^3}\frac{h\upsilon^3d\upsilon}{(e^{\beta h\upsilon}-1)} \Rightarrow \upsilon_{\max} = 2.8222(kT/\hbar)$

חוק סטפן-בולצמן (שטף אנרגיה): $\sigma = \frac{\pi^2k^4}{60\hbar^3c^2} \qquad J = \sigma T^4$

אנרגיה כוללת ליחידת נפח: $\alpha = \frac{\pi^2k^4}{15(\hbar c)^3} \qquad \int dU_\upsilon \Rightarrow U = \alpha T^4$

הספק המופץ מגוף עם מעטפת S: $I = S\cdot J \qquad I_{planet} = I_{sun}\frac{\pi R_p^{\ 2}}{4\pi L^2}$

אנרגיה ליחידת אורך גל: $\lambda = c/\upsilon \Rightarrow \quad dU_\lambda = \frac{8\pi V}{\lambda^5}\frac{hcd\lambda}{(e^{\beta hc/\lambda}-1)}$

מקסימום אנרגיה מתקבל ב - $\lambda_{\max}$, לפי חוק "Wien": $\lambda_{\max} = \frac{hc}{4.965k_BT}$

- בש.מ גוף שחור מחזיר את ההספק שהוא מקבל.

עיבוי בוזה-איינשטיין: גז בוזונים לא יחסותיים, בעלי ספין אפס, מסה m ואנרגיה - $E=p^2/2m$

פילוג בוזה-איינשטיין: $f_{BE}(E)=\dfrac{1}{e^{\beta(E-\mu)}-1}$

$\mu(T)\le 0$ שלילי בכל טמפרטורה, קטן עם עליית הטמפ' ומתאפס ב - T_C

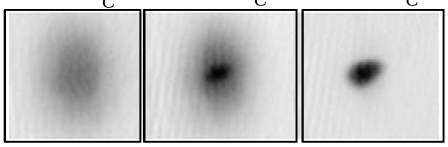
צפיפות מצבים: $g(\varepsilon)=2\pi V\left(\dfrac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}$

ב- $T<T_c$ חלק סופי של החלקיקים יהיו כולם במצב היסוד (מצב עיבוי):

$$T_C=3.31\frac{\hbar^2}{mk}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

חילוץ פוטנציאל כימי:

$$N=\frac{V}{\pi^2\sqrt{2}}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{E}\,dE}{e^{\beta(E-\mu)}-1}\Rightarrow\mu$$



מספר החלקיקים במצב היסוד :

$$N_{E=0}=N\left[1-(T/T_C)^{\frac{3}{2}}\right]$$

שאר החלקיקים:

$$N_{E>0}=N\left(T/T_C\right)^{3/2}$$

- למערכת קוונטית במצב היסוד, האנטרופיה שווה לאפס.

הערות:

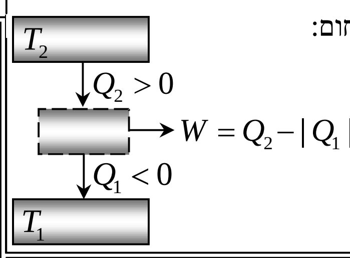
- גז מנוון (ההסתברות לאיכלוס (של רמות מסוימות) גבוהה, משטר קוונטי, אנטרופיה נמוכה): $kT\ll\varepsilon_F$
- גז קלאסי (ההסתברות לאיכלוס (של כל הרמות) נמוכה, משטר קלאסי, אנטרופיה גבוהה): $kT\gg\varepsilon_F$
- **תנאי שיווי משקל:** מע' מבודדת: $S\to\max$ מע' לא מבודדת (אמבט T): $F\to\min$
- במערכת עם חלקיקים ממוקמים, אין משמעות לנפח:

$$\left.\begin{array}{l} V=const\Rightarrow dV=0 \\ dF=-PdV-SdT \end{array}\right\}\Rightarrow S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)$$

- אנטרופיה של מערכת מבודדת (צבר מיקרו קנוני) יכולה להשתנות רק אם מתרחש תהליך לא הפיך.
- תנאי לשיווי משקל כימי עבור מערכת עם כמה סוגי חלקיקים, בטמפ' ונפח קבועים: $F(T,V,N_1,N_2,..,N_n)$

$$\mu_i=\frac{\partial F}{\partial N_i}\qquad \frac{a_i}{a_1}=\frac{\partial N_i}{\partial N_1}\qquad \Rightarrow\sum_i^M a_i\mu_i$$

- אנרגיה של דיפול מגנטי קלאסי: $\varepsilon=-\mu B\cos\theta$
- בגז אידיאלי, כאשר $N\gg1$: $M(\varepsilon)\approx W(\varepsilon)$
- נצילות מכסימלית של מכונת חום:



$$\eta=\frac{W}{Q_2}\le\frac{T_2-T_1}{T_2}$$

אינטגרלים:

$$\int_0^\infty\frac{dx}{ae^{bx}+1}=-\frac{1}{b}\ln\left(1+a^{-1}e^{-bx}\right)$$

$$\int_0^\infty e^{-\beta x}\sqrt{x}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{3/2}}\qquad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$\int\frac{dx}{ae^x-1}=\log(a-e^{-x})\qquad \int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}\qquad \Gamma(n+1)=n\Gamma(n)\qquad \Gamma(0.5)=\sqrt{\pi}$$

גדלים חשובים:

$m_e=9.1\cdot10^{-31}[kg]$ $\hbar=h/2\pi$

$m_p=1.67\cdot10^{-27}[kg]$ $k_B=1.38\cdot10^{-23}\left[J/k^0\right]$

$hc=12400\left[eV\cdot\overset{\circ}{A}\right]=1.98\cdot10^{-25}[J\cdot m]$

קירובים:

$(1+x)^n|_{x\to0}\approx1+nx$

$\ln(1+x)|_{x\to0}\approx x\qquad e^x|_{x\to0}\approx1+x$

$\coth(x)|_{x\to0}\approx a^{-1}+a3^{-1}$

קירוב סטרלינג: $\ln N!=N\ln N-N\quad(N\gg1)$

$N!=\sqrt{2\pi N}(Ne^{-1})^N\quad(N\gg1)$

$N_0!=(N_0-N)!N_0^N\quad(N_0\gg N)$

$\lim_{n\to\infty}(1+n^{-1})^n=e$