אנליזה נומרית – תמצית ונוסחאות

שגיאות

שגיאה מוחלטת: $\Delta x = |x - x^*|$ (= לקחת את הקורס אנליזה נומרית)

שגיאה יחסית: $\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \approx \left|\frac{\Delta x}{x^*}\right|$

נקודה קבועה:

d ספרות דצימליות ➔ שגיאה מוחלטת חסומה ע"י 10^{-d} בקיצוץ, ו - $0.5\cdot 10^{-d}$ בהעגלה.

נקודה צפה:

t ספרות משמעותיות ➔ שגיאה יחסית חסומה ע"י 10^{1-t} בקיצוץ, ו- $0.5\cdot 10^{1-t}$ בהעגלה.

שגיאת קלט ואלגוריתם: $\Delta f = \Delta f_{In} + \Delta f_{Al}$

שגיאת הקלט כתלות במשתנים: $\Delta f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$

שגיאת אלגוריתם: $fl(f) = f\cdot(1 + m\cdot u)$ ➔ $\left|\frac{\Delta f}{f}\right|_{Al} = \left|\frac{fl(f) - f}{f}\right| = m\cdot u$

מספר מצב: $C_p = \frac{\Delta f}{|f|}\Big/\frac{\Delta x}{|x|} = \left|\frac{f'}{f}x\right|$ זאת פונקציה של x. ניתן למצוא חסם ל-C_p בקטע מסוים.

משוואות לא לינאריות

סדר וקבוע התכנסות: אם קיימים $p \ge 1$ ו- $0 < C < \infty$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^p} = C \neq 0$ אז p נקרא סדר ההתכנסות, C נקרא קבוע ההתכנסות. (בהתכנסות ליניארית: $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = K$).

Newton Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftarrow \boxed{\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

עבור שורש מריבוי 1: סדר ההתכנסות הוא **2 לפחות**.

עבור שורש מריבוי גדול מ-1: סדר ההתכנסות הוא **1**.

בזמן ביצוע האיטרציה בודקים את קבוע ההתכנסות ומשם מחלצים את q לפי: $C = 1 - 1/q$

שיטות לשיפור עבור ריבוי q>1:

1) $\varphi(x) = x - q\frac{f(x)}{f'(x)}$:אם ידוע הריבוי

2) $u(x) = f(x)/f'(x)$ ➔ $\varphi_2(x) = x - \frac{u(x)}{u'(x)} = x - \frac{f}{f'}\Big/\frac{f'^2 - ff''}{f'^2} = x - \frac{ff'}{f'^2 - ff''}$

<u>משפטי התכנסות:</u>

בהנתן קטע J ופונקציית איטרציה $\varphi(x)$:

<u>ניסוח א'</u>

אם:

1) ל- $x=\varphi(x)$ קיים שורש α בקטע J
2) לכל x בקטע J מתקיים: $|\varphi'(x)| \le m < 1$
3) $\varphi(x) \in J$

אזי:

הסדרה $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ מתכנסת לשורש α לכל $x_0 \in J$, ו- α הוא שורש פשוט של $x=\varphi(x)$ ויחיד בקטע.

<u>ניסוח ב' (מסקנה מניסוח א')</u>

אם:

1) $J=\{x \mid |x-\alpha|<\rho\}$ כלומר ידוע ש-J סימטרי סביב השורש.
2) ל- $x=\varphi(x)$ קיים שורש α בקטע J.
3) לכל x בקטע J מתקיים: $|\varphi'(x)| \le m < 1$

אזי:

הסדרה $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ מתכנסת לשורש α לכל $x_0 \in J$, ו- α הוא שורש פשוט של $x=\varphi(x)$ ויחיד בקטע.

הרחבת קטע J לקטע סימטרי סביב השורש I:

$I=[2a-b, 2b-a]$ וכעת אם I מקיים את דרישות ניסוח ב', אז יש התכנסות וכו'..

<u>משפט סדר ההתכנסות:</u>

אם:

1) $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ מתכנסת.
2) p-1 נגזרות ראשונות של $\varphi(x)$ מתאפסות בשורש.
3) הנגזרת ה-p אינה מתאפסת.

אזי:

סדר ההתכנסות של השיטה הוא p וקבוע ההתכנסות הוא $c=\dfrac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

הערות:

1) אם אף נגזרת לא מתאפסת אז p=1.
2) אם הנגזרת ה-p שואפת לאינסוף אז סדר ההתכנסות הוא בין p ל-p-1.

<u>דיוק בר השגה:</u> ε_α

אם:

1) השורש α הוא בעל ריבוי q.
2) δ = שגיאה מוחלטת בחישוב פונקציה f בסביבת השורש.
3) $M_q < |f^{(q)}(\xi)|$ הוא חסם **תחתון** לערך מוחלט של נגזרת מס' q.

אזי:

הדיוק בר ההשגה הוא: $\varepsilon_\alpha=\left(\dfrac{\delta\, q!}{M_q}\right)^{\frac{1}{q}}$ 🡨 עבור q=1 $\varepsilon_\alpha=\dfrac{\delta}{M_1}$

לחישוב מספר האיטרציות k עד לדיוק בר ההשגה, פותרים (ע"י מחשבון) את:

$m^k|x_n-\alpha| \le \varepsilon_n$ (m הוא חסם עליון על הנגזרת של $\varphi(x)$).

מרחק מהשורש ε_n

אם:

1) δ היא החסם על השגיאה המוחלטת בחישוב $\varphi(x)$ בנקודה x_{n-1}.

2) מתקיים $|\varphi'(x)| \le m < 1$ בקטע $[x_{n-1}, \alpha]$. *(יש לבחור את m **קטן** ככל שניתן)*

אזי:

המרחק בין x_n לשורש α חסום ע"י: $\boxed{\varepsilon_n = |x_n - \alpha| \le \frac{m}{1-m}|x_n - x_{n-1}| + \frac{1}{1-m}\delta}$

אקסטרפולציית Aitken:

אם:

1) סדר ההתכנסות של השיטה הוא 1.

2) X_n קרוב מספיק לשורש

אזי:

ייתכן שכדאי להשתמש בקירוב: $\alpha \approx \hat{x}_n = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$

האם היה שווה את זה? משווים את $\varphi(x_n) - x_n$ ל- $\varphi(\hat{x}_n) - \hat{x}_n$. אם השני קטן יותר, היה כדאי.

נורמות:

$\|f\|_p = \left(\int_a^b w(x)|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ p=2: נורמה אוקלידית. $p = \infty$: נורמת המקסימום.

אינטרפולציה:

המקרה הכללי:

קירוב עבור הפונקציה f כאשרנתונות n+1 נקודות וגם n+1 פונקציות בסיס (בת"ל כלשהן). הבעיה מצטמצמת למציאת n+1 מקדמים עבור הסכום:

$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(x)$ הקירוב הזה צריך לקיים: $f^*(x_i) = f(x_i)$.

אינטרפולציה פולינומית:

פונקציות הבסיס הן פולינומים והתוצאה היא פולינום ממעלה n. פולינום האינטרפולציה הוא **יחיד**.

שיטת לגראנג':

פולינום האינטרפולציה: $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$ כאשר $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$ הם פולינומי לגראנג'.

תכונות של פולינומי לגראנג': $l_i(x_j) = 0 \ (i \ne j)$, $l_i(x_i) = 1$

שיטת Newton:

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + A_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

נוסחה כללית (ולא שימושית) לחישוב המקדמים:

$$A_i = \frac{y_i - [A_0 + A_1(x_i - x_0) + \ldots + A_{i-1}(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-2})]}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})}$$

בניית המקדמים ע"י הפרשים מחולקים:

A_0 A_1

x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-2},x_{i-1},x_i]$	$f[x_{i-3},x_{i-2}x_{i-1},x_i]$
x_0	$f[x_0]$			A_n
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$

$$f[x_i,x_{i+1},\dots,x_{i+k}]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$$

לכן $x_i=x_j$ מתקבלת נגזרת ב-x_i **מחולקת ב-k!**

השגיאה באינטרפולציה פולינומית:

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$

כאשר $M_{n+1}=\max\left(f^{(n+1)}(\xi)\right)$ ו- $\xi\in\operatorname{int}(x_0,x_1,\dots,x_n,x)$

ייצוג באמצעות הפרשים מחולקים:

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|=\frac{f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)\right|$$

<u>פולינומי צ'בישב:</u>

1) נוסחה רקורסיבית לחישוב: $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\qquad T_0(x)=1;\ T_1(x)=x$

2) שורשי הפולינום: $x_k=\cos\left(\frac{2k+1}{n}\frac{\pi}{2}\right),\ k=0,1,\dots n-1$

3) ערכי האקסטרמום של הפולינום הם: 1 או -1 ← $\left\|T_n(x)\right\|_\infty=1$

4) מקדם האיבר המובוביל הוא: 2^{n-1}

5) עבור המכפלה הפנימית **הרציפה**: $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x_k)g(x_k)\frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}}dx$

$$\left(T_i,T_j\right)=\begin{cases}0 & if\quad i\ne j\\ \frac{\pi}{2} & if\quad i=j\ne 0\\ \pi & if\quad i=j=0\end{cases}$$

6) עבור המכפלה הפנימית **הבדידה**: $(f,g)=\sum_{k=0}^{m}f(x_k)g(x_k)\frac{1}{\sqrt{1-x_k^2}}$

$$\left(T_i,T_j\right)=\begin{cases}0 & if\quad i\ne j\\ \frac{1}{2}(m+1) & if\quad i=j\ne 0\\ m+1 & if\quad i=j=0\end{cases}$$

פולינום **צ'בישב מתוקן**: $\widetilde{T}_n(x)=\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ עבור מתקיים:

$\left\|\widetilde{T}_n(x)\right\|_\infty=2^{1-n}$ וזהו הערך הנמוך ביותר של נורמת האינסוף עבור פולינום מוני בקטע $[-1,1]$

טרנספורמציה לקטע שאינו $[-1,1]$

$$t=\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}x \quad :t\in[a,b]\ ,\ x\in[-1,1]$$

מוצאים את שורשי הפולינום הרצוי x_i כרגיל וממירים אותם ל-t_i באמצעות הטרנספורמציה.

הנורמה המתקבלת היא: $\left\|\prod_{i=0}^{n}(t-t_i)\right\|_\infty = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$.

<u>מינימום ריבועים:</u>

נתון: מכפלה פנימית ופונקציה f (במקרה הבדיד גם נקודות דגימה ובמקרה הרציף גם תחום [a,b]) וכן מספר כלשהו של פונקציות בסיס $\{\varphi_i\}$.

צ"ל קירוב ל-f: $f^*=\sum_{i=0}^{n}c_i\varphi_i$ כך ש- $\left\|f-f^*\right\|_2=\min$

נוסחה כללית:

$$\begin{cases} c_0\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle+c_1\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle+\ldots+c_n\langle\varphi_0,\varphi_n\rangle=\langle\varphi_0,f\rangle \\ c_0\langle\varphi_1,\varphi_0\rangle+c_1\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle+\ldots+c_n\langle\varphi_1,\varphi_n\rangle=\langle\varphi_1,f\rangle \\ \vdots \\ c_0\langle\varphi_n,\varphi_0\rangle+c_1\langle\varphi_n,\varphi_1\rangle+\ldots+c_n\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle=\langle\varphi_n,f\rangle \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle\ldots\langle\varphi_0,\varphi_n\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle\ldots\langle\varphi_1,\varphi_n\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi_n,\varphi_0\rangle\langle\varphi_n,\varphi_1\rangle\ldots\langle\varphi_n,\varphi_n\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle\varphi_0,f\rangle \\ \langle\varphi_1,f\rangle \\ \vdots \\ \langle\varphi_n,f\rangle \end{pmatrix}$$

אם הבסיס אורתוגונלי (כלומר פונקציות הבסיס הן ממשפחה אורתוגונלית ביחס למכפלה הנתונה):

$$c_i=\frac{\langle\varphi_i,f\rangle}{\langle\varphi_i,\varphi_i\rangle}$$ (מקדמי פורייה)

הערה: אינטרפולציה היא מקרה פרטי של מינימום ריבועים, כאשר מספר הפונקציות שווה למספר הנקודות (המכפלה הפנימית בדידה). במקרה זה מקבלים שנורמת השגיאה המינימלית היא 0 ולכן מינימום ריבועים מחזיר אותה תוצא כמו אינטרפולציה.

<u>תכונות של פולינומים אורתוגונליים:</u>

אם $\{P_n\}$ - משפחה אורתוגונלית בקטע $[a,b]$ עם פ' משקל w אז:

1) ל- P_i יש i שורשים שונים בקטע $[a,b]$

2) בין כל שני שורשים של P_i יש שורש אחד של P_{i+1}

3) לכל קטע $I\subset[a,b]$ קיים k כך שלפולינום P_k יש שורשים בקטע I.

כלומר אם לפולינום נתון ממעלה k יש פחות מ-k שורשים שונים בקטע הנתון, הוא לא יכול להיות חלק ממשפחה אורתוגונלית בקטע.

בניית משפחה אורתוגונלית באמצעות נוסחה רקורסיבית:

$P_{n+1}(x)=(x-B_n)P_n(x)-C_nP_{n-1}(x)$ כאשר $B_n=\frac{\langle xP_n,P_n\rangle}{\langle P_n,P_n\rangle},\ C_n=\frac{\langle xP_n,P_{n-1}\rangle}{\langle P_{n-1},P_{n-1}\rangle}$

ובוחרים $P_0=1$ ו- $P_1(x)=(x-B_0)P_0(x)$.

קירובים דיסקרטיים

שיטת השוואת מקדמים היא שקולה לפיתוח פולינום אינטרפולציה והפעלת האופרטור עליו.

סדר הדיוק האסימפטוטי: החזקה הנמוכה ביותר של h בביטוי השגיאה.
סדר הדיוק הפולינומי: סדר הנגזרת הנמוכה ביותר של f בביטוי השגיאה ועוד 1. עבור כל פולינום ממעלה זו ומטה תתקבל שגיאה שווה ל- 0.

h אופטימלי

$R_{Total} = R_T + R_N$ השגיאה הכללית מורכבת משגיאת קיטוע ושגיאה נומרית.

R_N = החסם על השגיאה הנומרית **המוחלטת**, לפי נתוני הדיוק.

R_T = הביטוי שהתקבל עבור השגיאה מפיתוח הקירוב.

גוזרים את R_{Total}, משוים ל- 0 ומחלצים את h. זהו ה-h האופטימלי.

אקסטרפולציית ריצ'ארדסון:

שיטה לשפר את החישוב כאשר R_T מהווה את גורם השגיאה העיקרי. מותר להשתמש רק בערכי h **גדולים** מ-h_{opt}.

אם:

1) A(h) הוא האופרטור המקורב, וידוע ש: $A(h) = A + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h^{\sigma_k}$

2) חושבו ערכי $A(h)$ ו- $A(\omega h)$ עבור $\omega \in (0,1)$

אזי:

$$\bar{A}(h) \equiv \frac{A(\omega h) - \omega^{\sigma_1} A(h)}{1-\omega^{\sigma_1}} = A + \alpha_2 \frac{\omega^{\sigma_2} - \omega^{\sigma_1}}{1-\omega^{\sigma_1}} h^{\sigma_2} + \alpha_3 \frac{\omega^{\sigma_3} - \omega^{\sigma_1}}{1-\omega^{\sigma_1}} h^{\sigma_3} + \ldots$$

וזה קירוב טוב יותר לאופרטור המבוקש A, מפני שהחזקה הראשונה של h גדלה.

באופן שיטתי (שיטת רומברג) מכניסים לטבלה:

אם $F(h) = c_0 + c_1 h^2 + c_2 h^3 + c_3 h^6 + \ldots$, $\omega = 0.5$

i	$h_0\omega^i$	$F_{i,0}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_1}-1} = \Delta/3$	$F_{i,1}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_2}-1} = \Delta/7$
0	h_0	F(h_0)			
1	$h_0\omega^1$	F(h_1)	(F(h_1) - F(h_0))/3	$\leftarrow$ + F(h_1)	
2	$h_0\omega^2$	F(h_2)	(F(h_2) - F(h_1))/3	$\leftarrow$ + F(h_2)	($F_{2,1}$ ñ $F_{1,1}$)/7
3	$h_0\omega^3$	F(h_3)	(F(h_3) - F(h_2))/3	$\leftarrow$ + F(h_3)	($F_{3,1}$ ñ $F_{2,1}$)/7
4	$h_0\omega^4$	F(h_4)	(F(h_4) - F(h_3))/3	$\leftarrow$ + F(h_4)	($F_{4,1}$ ñ $F_{3,1}$)/7

עמודה ראשונה של ריצ'ארדסון

עמודה שניה של ריצ'ארדסון

i) התכנסות העמודות/שורות ככל **שיורדים/הולכים ימינה בטבלה:**

$A - F_{i,k} = O\left[\left(\frac{h_0}{q^i}\right)^{p_{1+k}}\right]$ כאשר $i \to \infty \quad or \quad k \to \infty$

ii) התכנסות על פני האלכסונים (ככל שהולכים ימינה ולמטה)

$A - F_{i,i} = O\left[e^{-\beta i}\right]$ לכל $\beta > 0$

אינטגרציה נומרית

שיטת הטרפז:

מחלקים את התחום ל-n חלקים קטנים וסוכמים את שטחי של כל הטרפזים שנוצרים ע"י חיבור כל שתי נקודות סמוכות בקו ישר (קירוב לפונקציה מסדר ראשון). ערכי הקצוות נספרים פעם אחת והנקודות הפנימיות פעמיים:

$$T=\sum_{i=0}^{n}\tfrac{1}{2}\left(f(x_{i+1})+f(x_i)\right)\left(x_{i+1}-x_i\right)=h\left(\tfrac{1}{2}\left(f(x_0)+f(x_n)\right)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)$$

הקירוב **מדויק** עבור פונקציה מחזורית אם הקטע מכיל בדיוק מחזור שלם.

שיטת Romberg לשימוש יעיל בשיטת הטרפז ובאקסטרפולציית ריצ'ארדסון:

מכיון שתוצאת שיטת הטרפז נותנת קירוב מהצורה: $f(h)=I+a_2h^2+a_4h^4+\ldots+a_{2n}h^{2n}$
מותר להפעיל את אקסטרפולציית ריצ'ארדסון.
לוקחים $\omega=0.5$, כדי שכל שלב חישוב ישתמש בנקודות הקודמות ויוסיף עוד נקודות באמצעי הקטעים, ולא נצטרך לחשב נקודות שונות בכל שלב והחישוב יהיה יעיל מאד.
מתקבלת הטבלה:

i	$h_0\omega^i$	$F_{i,0}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_1}-1}=\Delta/3$	$F_{i,1}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_2}-1}=\Delta/15$	$F_{i,2}$	$\frac{\Delta}{\omega^{-p_2}-1}=\Delta/63$	$F_{i,3}$
0	h_0							
1	h_1							
2	h_2							

נוסחת סימפסון:

קירוב לאינטגרל ע"י חיבור כל שלוש נקודות בפרבולה (במקום שתיים בקו ישר).

$$I=\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}f(x)dx\cong\frac{h}{3}[f_{-1}+4\cdot f_0+f_1]$$

$$R_T=\frac{1}{90}f_0^{(4)}h^5+\cdots$$

סדר ההתכנסות הפולינומי הוא 3 והאסימפטוטי 5.

<u>אינטגרצית Gauss</u>

נציג את הבעיה כאינטגרל של פולינום האינטרפולציה:

$$\int_a^b P_n(x)w(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n}\left(f_j l_j(x)\right)w(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f_j \underbrace{\int_a^b l_j(x)w(x)\,dx}_{A_j} = \sum_{j=0}^{n} f_j A_j$$

כלומר נשאר רק למצוא את המקדמים.
לפי שיטת Gauss נוכל למצוא קירוב המשתמש ב-n+1 נקודות כרגיל, אך נותן סדר התכנסות פולינומי **2n+1**. הקונץ הוא בבחירת נקודות הדגימה.
כל שעלינו לעשות הוא לדאוג שנקודות הדגימה יהיו שורשים של פולינום אורתוגונלי ממעלה n+1 לפי המכפלה הפנימית הנ"ל.

<u>השגיאה באינטגרצית גאוס:</u>

$$\int_a^b f(x)w(x)dx - \int_a^b P_n(x)w(x)dx = \frac{f^{(2n+2)}}{(2n+2)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2 w(x)dx$$

<u>טרנספורמציה לתחום שונה:</u>

אם חישבנו אינטגרל גאוס בתחום [c,d] ורוצים לחשב אינטגרל עם אותה פונקצית משקל בתחום [a,b], משתמשים בטרנספורמציה הלינארית הכללית הבאה:

$$x(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{bd-bc-b+a}{d-c} \qquad t(x) = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bd-bc-b+a}{a-b}$$

$$c \le t \le d \quad \Rightarrow a \le x \le b \qquad a \le x \le b \quad \Rightarrow \quad c \le t \le d$$

$$dt = \frac{b-a}{d-c}dx \qquad dx = \frac{d-c}{b-a}dt$$

ומקבלים: $\int_a^b f(x)w(x)dx = \frac{b-a}{d-c}\int_c^d f\left(x(t)\right)w\left(x(t)\right)dt$

כלים מתמטיים כלליים

החלפת משתנים באינטגרל: צ"ל: $\int_a^b f(t)g(t)dt$. נגדיר משתנה $x(t)$ כך ש- $x'(t)=g(t)$ ואז $dx=x'(t)dt$ ואם נמצא פונקציה $h(x)$ כך ש- $h(x(t))=f(t)$, נקבל $\int_a^b f(t)g(t)dt=\int_{x(a)}^{x(b)} h(x)dx$.

אינטגרציה בחלקים: $\int_a^b u(t)v'(t)dt=u(t)v(t)\Big|_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$

טורי טיילור ידועים:

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots \quad \cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \quad lan(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots \quad (1+x)^p=1+px+\frac{p(p-1)x^2}{2!}+\frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!}$$

$$f(\Delta x)=f(0)+f'(0)\cdot\Delta x+\frac{f''(0)\cdot(\Delta x)^2}{2}+\frac{f'''(0)\cdot(\Delta x)^3}{6}+\frac{f^{(4)}(0)\cdot(\Delta x)^4}{24}+\frac{f^{(5)}(0)\cdot(\Delta x)^5}{5!}+\cdots$$

$$f'(\Delta x)=f'(0)+f''(0)\cdot\Delta x+\frac{f'''(0)\cdot(\Delta x)^2}{2}+\frac{f^{(4)}(0)\cdot(\Delta x)^3}{6}+\frac{f^{(5)}(0)\cdot(\Delta x)^4}{4!}+\cdots$$

$$f''(\Delta x)=f''(0)+f'''(0)\cdot\Delta x+\frac{f^{(4)}(0)\cdot(\Delta x)^2}{2}+\frac{f^{(5)}(0)\cdot(\Delta x)^3}{6}+\frac{f^{(6)}(0)\cdot(\Delta x)^4}{4!}+\cdots$$

<u>משפחות אורתוגונליות ידועות:</u>

<u>צ'בישב:</u>
תחום: [-1,1] פונקצית מ $(1-x^2)^{-1/2}$

פולינומים ראשונים:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= x\\
T_2(x) &= 2x^2-1\\
T_3(x) &= 4x^3-3x\\
T_4(x) &= 8x^4-8x^2+1\\
T_5(x) &= 16x^5-20x^3+5x\\
T_6(x) &= 32x^6-48x^4+18x^2-1.
\end{aligned}$$

<u>צ'בישב מסוג שני:</u>
תחום: [-1,1] פונקצית מ $\sqrt{1-x^2}$

פולינומים ראשונים:

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= 1\\
U_1(x) &= 2x\\
U_2(x) &= 4x^2-1\\
U_3(x) &= 8x^3-4x\\
U_4(x) &= 16x^4-12x^2+1\\
U_5(x) &= 32x^5-32x^3+6x\\
U_6(x) &= 64x^6-80x^4+24x^2-1
\end{aligned}$$

<u>לא ידוע 1:</u>
תחום: [0,∞] פונקצית משקל: e^{-2x}

$$P_2(x)=x^2-2x+\frac{1}{2}$$

<u>לא ידוע 2:</u>
תחום: [-1,1] פונקצית משקל: $1+x^2$

$$P_2(x)=x^2-\frac{2}{5}$$

<u>לג'נדר:</u>
תחום: [-1,1] פונקצית משקל:1

פולינומים ראשונים:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1\\
P_1(x) &= x\\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2-1)\\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3-3x)\\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)\\
P_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)\\
P_6(x) &= \tfrac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5).
\end{aligned}$$

<u>לאגר:</u>
תחום: [0,∞] פונקצית משקל: e^{-x}

$$P_1(x)=x-1 \qquad P_2(x)=x^2-4x+2$$

$$P_3(x)=x^3-9x^2+18x-6$$

<u>לא ידוע 3:</u>
תחום: [-1,1] פונקצית משקל: $\dfrac{1}{\left|\sqrt{x}\right|}$

$$P_1(x)=x \qquad P_3(x)=x^3-\frac{5}{9}$$

$$P_2(x)=x^2-\frac{1}{5}$$

<u>לא ידוע 4:</u>
תחום: [-1,1] פונקצית משקל: $\log(\frac{1}{|x|})$

$$P_3(x)=x^3-\frac{9x}{25}$$