אינפי 3' תרגול

מר. ברץ סדי

סמסטר חורף 2004-5

$Id: infi3_tirgul_2.lyx,v 1.21 2005/01/25 12:22:29 itay Exp $

תוכן עניינים

1 מבוא

1.1 הגדרות יסוד

1.1.1 מרחב טופולוגי ומטרי

מרחב טופולוגי (X,τ) נתונה קבוצה X, טופולוגיה τ על X הנה אוסף של תת קבוצות של X המקיים:

1. $\phi, X \in \tau$
2. כל איחוד של אברי τ שייך ל τ
3. כל חיתוך סופי של אברי τ שייך ל τ

הערה הקבוצות ב-τ יקראו קבוצות פתוחות.

מרחב מטרי (x,d) נתונה קב' X, מטריקה d על X הנה פונקציה

$$d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$$

המקיימת:

1. חיוביות:

$$\begin{aligned} \forall x,y \in X; d(x,y) &\geq 0 \\ x=y &\Leftrightarrow d(x,y)=0 \end{aligned}$$

2. סימטריה $\forall x,y \in X; d(x,y) = d(y,x)$
3. אי-שוויון המשולש (אש"ש)

$$\forall x,y,z \in X; d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$$

הגדרות

1. **כדור סביב** $x_0 \in X$ **ברדיוס** $r>0$ הוא קבוצה

$$B_d(x_0,r) = \{x \in X | d(x,x_0) < r\}$$

2. על מרחב מטרי מושרת הטופולוגיה המטרית

הטופולוגיה המטרית תת קבוצה $u \subset X$ פתוחה אם לכל $x \in u$ קיים $r > 0$ כך ש $B_d(x,r) \subset u$

תרגיל עצמי אוסף הקבוצות הנ"ל הוא טופולוגיה (על u - רק אם X פתוחה ניתן להגדיר את הטופולוגיה גם על X)

הוכחה נסמן את הטופולוגיה ב τ

1. שייכות של הקבוצה הריקה וגם $\phi \in X$ מקיים את הטופולוגיה
2. שייכות של איחוד ושייכות של u

$$\begin{aligned}
\forall x \in \ell \subset u; x \sim r_x; B_d(x,r) &\subset u \\
\Rightarrow \cup_{x\in\ell} B_d(x,r) &\subset u \\
\Rightarrow \cup_{x\in\ell} B_d(x,r) &\in \tau \\
\Rightarrow \ell = u \Rightarrow u &\in \tau
\end{aligned}$$

3. שייכות של מספר סופי של איחודים

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} X_i \subset u \\ 1 \le i \le n \end{matrix}; \cap_{i=1}^n X_i = \phi \wedge \cap_{i=1}^n X_i &= \ell \subset u \\
\Rightarrow \cap_{i=1}^n X_i &\in \tau
\end{aligned}$$

2 מרחב נורמי ומרחב ממ"פ

מרחב נורמי $(X, \|.\|)$ נתון מרחב ווקטורי X מעל $\mathbb{C}$, נורמה מעל X היא פונקציה

$$\|.\| : X \mapsto \mathbb{R}$$

המקיימת:

1. חיוביות

$$\begin{aligned}
\forall x \in X; \|x\| &\geq 0 \\
x = 0 &\Leftrightarrow \|x\| = 0
\end{aligned}$$

2. סקלריות $\begin{matrix} \forall x \in X \\ \vee \forall \lambda \in \mathbb{C} \end{matrix}; \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

3. אש"ש

$$\forall x, y \in X; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

הערה

1. ישירות מההגדרה: על מרחב נורמי מושרת המטריקה

$$d(x,y) = \|y - x\|$$

2. מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ) הוא מרחב נורמי אם הנורמה

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

הערה

1. בממ"פ מתקיים שוויון המקבילית

$$\|x+y\| + \|x-y\| = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

2. מעל המרחב האוקלידי (ב $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) מתקיים משפט ה-cos

$$\begin{aligned}
\vec{x} \cdot \vec{y} &= \frac{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \\
(\cos\, Theorem) \Rightarrow &= \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos\alpha \\
\Rightarrow \cos\alpha &= \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}
\end{aligned}$$

כאשר α הזווית בין $\vec{x}$ ל $\vec{y}$ וכך נגדיר זווית בין ווקטורים ב $\mathbb{R}^n$ (גם עבור $n > 3$)[1]

תרגילים

1. חשבו שטח משולש ב $\mathbb{R}^n$ הנוצר ע"י $\vec{x}, \vec{y}$.

פתרון נניח ש $\vec{y}$ הבסיס ואנו מעוניינים בגובה

$$\begin{aligned}
\vec{h} &= \vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|y\|}\frac{\vec{y}}{\|y\|} \\
s &= \frac{1}{2}\|\vec{h}\|\|\vec{y}\| \\
&= \frac{1}{2}\|\vec{y}\|\sqrt{\left(\vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|y\|}\frac{\vec{y}}{\|y\|}\right)\cdot\left(\vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|y\|}\frac{\vec{y}}{\|y\|}\right)} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|\sqrt{\|x\|^2 - 2\frac{(x\cdot y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x\cdot y)^2}{\|y\|^2}} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|\sqrt{\|x\|^2 - \frac{\|x\|^2\|y\|^2\cos^2\alpha}{\|y\|^2}} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|\|x\|\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\
&= \frac{1}{2}\|y\|\|x\|\sin\alpha
\end{aligned}$$

[1]מחלק זה המתרגל מתחיל להשתמש בסימונים שלקוחים מפיזיקה, כאשר $\vec{x}\cdot\vec{y} \triangleq \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$

2. מצאו ווקטור $\vec{v}$ חוצה זווית בין הווקטורים $\vec{y},\vec{x}$ במשולש הנוצר ע"י $\vec{y},\vec{x}$

פתרון הווקטורים $\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|},\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ יוצרים מעוין ולכן באלכסון $\vec{u}=\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}+\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ הוא ווקטור בכיוון חוצה זווית. נותר למצוא את הגודל:

מצד אחד $\vec{v}$ חוצה זווית $\vec{v}=\alpha\vec{u}$

מצד שני ל v יש את הצורה $0\leq t\leq 1; \vec{v}=\vec{x}+t\left(\vec{y}-\vec{x}\right)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \vec{x}+t\left(\vec{y}-\vec{x}\right) &= \alpha\vec{u}\\ &= \alpha\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}+\alpha\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\end{aligned}$$

אם $\vec{y},\vec{x}$ ת"ל אז כל הווקטורים מהצורה $\vec{v}$ הם חוצי זווית

אם $\vec{y},\vec{x}$ בת"ל אז המקדמים שווים

$$\begin{aligned}t &= 1-\frac{\alpha}{\|x\|}=\frac{\alpha}{\|y\|}\\ \|x\|\|y\| &= \left(\|x\|+\|y\|\right)\alpha\\ \alpha &= \frac{\|x\|\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\end{aligned}$$

סה"כ

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \alpha\vec{u}\\ &= \frac{\|x\|\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\left(\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|}+\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}\right)\\ &= \frac{\|x\|\vec{y}+\|y\|\vec{x}}{\|\vec{y}\|+\|\vec{x}\|}\end{aligned}$$

2.1 מכפלה ווקטורית

הגדרה

1. נגדיר ממ"פ כפונקציה $\Pi:S\times S\mapsto X$ (תבנית בי-ליניארית)
2. על $\mathbb{R}^3$ נגדיר $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ כך שעל הבסיס הא"נ הסטנדרטי $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\hat{i}\times\hat{i} &= \hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0\\ \hat{i}\times\hat{j} &= -\hat{j}\times\hat{i}=\hat{k}\\ \hat{j}\times k &= -\hat{k}\times\hat{j}=\hat{i}\\ \hat{k}\times\hat{i} &= -\hat{i}\times\hat{k}=\hat{j}\end{aligned}$$

אזי בהינתן $\vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right),\vec{y}=\left(y_1,y_2,y_3\right)$

$$\begin{aligned}\vec{x}\times\vec{y} &= \left(x_1\hat{i}+x_2\hat{j}+x_3\hat{k}\right)\times\left(x_1\hat{i}+x_2\hat{j}+x_3\hat{k}\right)\\ &= \left(x_1y_2-x_2y_1\right)\hat{i}-\left(x_1y_3-x_3y_1\right)\hat{j}+\left(x_2y_3-x_3y_2\right)\hat{k}\\ &= \begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\hat{k}\\ &= \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

הערה

$$\begin{aligned}\hat{i}\times\left(\hat{i}\times\hat{k}\right) &= \hat{i}\times-\hat{j}=-\hat{k}\\ \left(\hat{i}\times\hat{i}\right)\times\hat{k} &= 0\\ \Rightarrow\hat{i}\times\left(\hat{i}\times\hat{k}\right) &\neq \left(\hat{i}\times\hat{i}\right)\times\hat{k}\end{aligned}$$

הגדרה שקולה גאומטרית

גודל $\|\vec{x}\times\vec{y}\|=\|x\|\|y\|\sin\alpha$ (מתרגיל קודם אנו יודעים שזהו שטח מקבילית של שני הווקטורים)

כיוון יהא $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ אזי $\langle c,a\rangle=\langle c,b\rangle=0$. נראה לגבי אחד מהם

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{a} &= \begin{vmatrix}x_2 & x_3\\ y_2 & y_3\end{vmatrix}x_1-\begin{vmatrix}x_1 & x_3\\ y_1 & y_3\end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}x_3\\ &= \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix}=0\end{aligned}$$

(לכן $\vec{c}$ ניצב למישור הנפרש ע"י a,b ולכן נורמל למישור)

מגמה נשאר להראות מגמה מכיוון כלל יד ימין.

2.2 פרמטריזציה

הגדרות

1. פרמטריזציה של עקום ב $\mathbb{R}^n$ זו פונקציה

$$\gamma:I\in\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^n$$

2. פרמטריזציה של משטח ב $\mathbb{R}^3$ (ניתן להכליל גם ל $\mathbb{R}^n$)

$$S:I_1\times I_2\mapsto\mathbb{R}^3$$

קווי גובה   נתונה פונקציה $f:S\mapsto A$ כאשר

$$\{x\in s|f(x)=c\}$$

עקום שנוצר הוא קו גובה או קו שווה פוטנציאל.

2.3 משוואת הישר

פרמטריזציה של הישר דרך הראשית $t\in\mathbb{R};t\vec{a}$
כל ישר במרחב הוא מהצורה $t\vec{\ell}+\vec{c}$ או בהצגה אחרת

$$\gamma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^3;\gamma(t)=(t\ell_1+c_1,t\ell_2+c_2,t\ell_3+c_3)$$

אזי לכל נקודה (x,y,z) על הישר קיים $t_0\in\mathbb{R}$ כך ש

$$\begin{aligned}x-t_0\ell_1&=c_1\\y-t_0\ell_2&=c_2\\z-t_0\ell_3&=c_3\end{aligned}$$

אם $\ell_i\neq0$; $\genfrac{}{}{0pt}{}{\forall i}{1\le i\le3}$ אז

$$\begin{aligned}\frac{x-c_1}{\ell_1}&=t_0\\\frac{y-c_2}{\ell_2}&=t_0\\\frac{z-c_3}{\ell_3}&=t_0\end{aligned}$$

וכך אנו מקבלים את משוואת הישר במרחב

$$\frac{x-c_1}{\ell_1}=\frac{y-c_2}{\ell_2}=\frac{z-c_3}{\ell_3}$$

2.4 משוואת המישור

נגדיר נורמל $\vec{n}$
אז המישור בראשית $\vec{x}\cdot\vec{n}=0$
מישור לא דרך הראשית: נתונה נקודה $p=(a,b,c)$ על המישור, וכן נורמל $\vec{n}=(\alpha,\beta,\gamma)$ אזי

$$\begin{aligned}(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}&=0\\\vec{x}\cdot\vec{n}-\vec{p}\cdot\vec{n}&=0\\\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)&=0\\\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta&=0\end{aligned}$$

לכל כל מישור הוא משטח בגובה 0 של $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0$

תרגיל עצמי נתון ש $\vec{n}$ נורמל למישור ו-$\vec{p}$ נקודה במישור. מצאו פרמטריזציה למישור

פתרון אם ננרמל את הנורמל $\hat{n}=\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ ונבצע תהליך ג"ש אם הבסיס הסטנדרטי נמצא $\{\hat{n},a,b\}$ בסיס א"נ של המרחב כאשר a,b ניצבים לנורמל ולכן מקבילים למישור.
אילו המישור עובר דרך הראשית אז ת"מ הנפרש ע"י $\{a,b\}$ הוא המישור ולכל נקודה במישור (x,y,z) קיימים $s,t\in\mathbb{R}$ כך ש $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$.
עבור כל מישור $U\subset\mathbb{R}^3$ כך ש $\vec{n}$ נורמל ו $\vec{p}$ נקודה במישור

$$\begin{array}{l}\exists\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3\\\vec{a}\cdot\vec{n}=\vec{b}\cdot\vec{n}=0\\\vec{a}\neq\alpha\vec{b}\end{array};\forall\vec{x}\in u;\exists s,t\in\mathbb{R};\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{p}$$

שהרי אז

$$\begin{aligned}(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}&=\left(s\vec{a}+t\vec{b}+\vec{p}-\vec{p}\right)\cdot\vec{n}\\&=s\vec{a}\cdot\vec{n}+t\vec{b}\cdot\vec{n}=0\end{aligned}$$

תרגיל חשבו את נפח המקבילון הנוצר ע"י הווקטורים $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

פתרון שטח הבסיס (כפי שכבר ראינו) $\|u\times v\|$
גובה המקבילון $h=w\frac{u\times v}{\|u\times v\|}$. לכן נפח המקבילון

$$\begin{aligned}|w\cdot(u\times v)|&=\left|\begin{vmatrix}u_2&u_3\\v_2&v_3\end{vmatrix}w_1-\begin{vmatrix}u_1&u_3\\v_1&v_3\end{vmatrix}w_2+\begin{vmatrix}u_1&u_2\\v_1&v_2\end{vmatrix}w_3\right|\\&=\left|\begin{vmatrix}w_1&w_2&w_3\\u_1&u_2&u_3\\v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}\right|\end{aligned}$$

הגדרה בהינתן $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=[u,v,w]$ נקרא המכפלה המעורבת ומסמנים (u,v,w)

הערה שלושה ווקטורים באותו מישור אם"ם $u\cdot(v\times w)=0$ (ונקראים קופלנרים)

תרגיל[2] בהינתן a,b,c שאינם קופלנרים הוכיחו שקיים ווקטור x כך ש

$$a\cdot x=1,b\cdot x=0,c\cdot y=0$$

פתרון משני המשוואות השניות נובע כי $x=\alpha\left(b\times c\right)$ מהשלישית נובע $\alpha a\cdot$ לכן $\left(b\times c\right)=1$

$$\alpha = \frac{1}{[a,b,c]}$$
$$\Rightarrow x = \frac{b\times c}{[a,b,c]}$$

הערה כמו בתרגיל אם יש

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

אזי ניתן לפתור

$$x_1 = \frac{\alpha b\times c}{[a,b,c]}$$

וכו'

תרגיל נתונים שני ישרים. אחד עובר דרך A_1 במקביל ל-$\vec{\ell_1}$. השני עובר דרך A_2 ומקביל ל $\vec{\ell_2}$. $A_1\neq A_2$. מתי הישרים מקבילים, מצטלבים,נחתכים?

פתרון

1. מצטלבים $\Leftrightarrow$ אינם באותו מישור $\vec{\ell_1},\vec{\ell_2},A_1,A_2\Leftrightarrow$ אינם באותו מישור $\left[\vec{\ell_1},\vec{\ell_2},A_1\vec{-}A_2\right]\neq 0\Leftrightarrow$
2. נחתכים או מקבילים $\left[\vec{\ell_1},\vec{\ell_2},A_1\vec{-}A_2\right]=0$
מחתכים $\vec{\ell_1}\cdot\vec{\ell_2}\neq 0$
מקבילים $\vec{\ell_1}\cdot\vec{\ell_2}=0$

תרגיל

1. מרחק נק' למישור
2. מרחק נק' לישר
3. מרחק ישרים מצטלבים

פתרון

1. נתון מישור $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$. נבחר m נקודה כלשהי במישור. ואז נטיל את הווקטור המתקבל על הנורמל יחידה כלומר

$$d\left(p_0\right) = \frac{\vec{p_0m}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

2. נתון ישר

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$

ונקודה P. בוחרים 2 נקודות על הישר

$$m_1 = \left(x_0,y_0,z_0\right)$$
$$m_2 = \left(x_0+\alpha,y_0+\beta,z_0+\gamma\right)$$

אזי קיבלנו משולש וידוע

$$h = \frac{\frac{1}{2}}{base}=\frac{\frac{1}{2}\left|\overline{m_1p}\times\overline{m_2p}\right|}{\|\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\|}$$

3. נבחר שני נקודות על שני הישרים ונצא ווקטור שמחבר בניהם. הטל על הנורמה לשניהם הוא המרחק. נבחר לדוגמה את הנורמל ע"י $\vec{\ell_1}\times\vec{\ell_2}$ סה"כ

$$\left|A_1\vec{A}_2\cdot\frac{\vec{\ell_1}\times\vec{\ell_2}}{\|\vec{\ell_1}\times\vec{\ell_2}\|}\right| = \left|\frac{\left[A_1\vec{A}_2,\vec{\ell_1},\vec{\ell_2}\right]}{\|\vec{\ell_1}\times\vec{\ell_2}\|}\right|$$

תרגיל מצאו משטחי רמה של הפונקציות הבאות

1. $f_1\left(x\right)=\|x\times a\|$ כאשר a ווקטור קבוע
2. $f_2\left(x\right)=\frac{1}{\|x\|}\|x\times a\|$
3. $f_3=|a\cdot\left(b\times x\right)|$ a,b קבוע

פתרון

1. $f_1\left(x\right)=\|x\|\|a\|\left|sin\alpha\right|$
כאשר $c<0$ אין פתרון
כאשר $c=0$ זה הישר $t\vec{a}$
כאשר $c>0$ זה גליל אם ציר סימטריה $\vec{a}$ ברדיוס $\frac{c}{\|a\|}$.
2. $f_2\left(x\right)=\frac{1}{\|x\|}\|x\|\|a\|\left|\sin\alpha\right|=c$
כאשר $c<0$ אין פתרון
כאשר $c=0$ הישר $t\vec{a}$ פרט ל 0
כאשר $0<c<\|a\|$ אנו מקבלים $\left|\sin\alpha\right|=\frac{c}{\|a\|}$, חרוט אין סופי לשני כיוונים עם ציר סימטריה $\vec{a}$ ואם פתיחה $\left|\sin\alpha\right|=\frac{c}{\|a\|}$
כאשר $c=\|a\|$ מישור
כאשר $c>\|a\|\Rightarrow\phi$
3. $f_3=|a\cdot\left(b\times x\right)|=|x\cdot\left(b\times a\right)|=c$
כאשר $c<0$ אין פתרון
כאשר $c=0$ מישור $b\times a=0$
כאשר $c>0$ מישורים $a\cdot\left(a\times b\right)=\pm c$

הגדרה גבול במרחב מטרי סדרה $\{x_n\}$ מתכנסת ל-x אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N_0 כך ש $n > N_0$ אז

$$x_n \in B_d(x_0,\varepsilon)$$

נקודת הצטברות x_0 נקודת הצטברות של הקבוצה A אם בכל כדור $B_b(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ יש נקודה $x_0 \neq y \in A$

תרגיל באופן שקול אם בכל כדור $B_d(x_0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ יש אין-סוף נקודות ב-A, או באופן שקול אם בכל סביבה פתוחה u של x_0 יש אין-סוף נקודות של A.

הסגור של A זו הקבוצה שתסומן ב $\overline{A}$ וזהו האיחוד של A אם אוסף נקודות ההצטברות שלה.

תרגיל להראות שקילות להגדרה בהרצאה

הגדרה קבוצה A היא סגורה אם $A = \overline{A}$

טענה A בסגורה אם"ם A^c פתוחה.

הוכחה

1. נניח ש A בסגורה אז A מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה. תהי $x_0 \in A^c$. צ"ל שקיים $r > 0$ כך ש $B(x_0,r) \subset A^c$. מכיוון ש $x_0 \in A^c$ אזי בהכרח $x_0 \notin A$, ולכן אינה נקודת הצטברות. לכן קיים $r > 0$ כך ש $B(x_0,r) \cap A = \phi$ לכן $B(x_0,r) \subset A^c$
2. נתון A^c פתוחה אזי תהי x_0 נקודת הצטברות של A. אם קיים $r > 0$ כך ש $\phi = A \cap B(x_0,r)$. סתירה. כלומר A מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

מסקנה קבוצות סגורות מקיימות את הטענות

1. X,ϕ סגורות
2. כל חיתוך של סגורות הוא סגור
3. כל איחוד סופי של סגורות, סגור.

טענה $\overline{A}$ זהו חיתוך כל הקבוצות הסגורות המכילות את A.

הוכחה

טענת עזר נראה ש x_0 נקודת הצטברות של A אם"ם x_0 נקודת הצטברות של $\overline{A}$

1. כיוון ראשון $A \subset \overline{A}$ נובע ישירות מההגדרה שאם x_0 נק' הצטברות של A, אז גם של $\overline{A}$
2. נניח ש x_0 נק' הצטברות של $\overline{A}$ צ"ל שבהינתן $B(x_0,r)$, קיים $B(x_0,r) \ni y \neq x_0$. ניקח את $B\left(x_0,\frac{r}{2}\right)$, יש בו $z \in \overline{A}$ כך ש $x_0 \neq z$. אם $x \in A$ סיימנו. אחרת אז בהכרח z נק' הצטברות של A. אז בכדור $B(z,d(x_0,z))$ יש נקודה $A \ni y \neq x_0$ כאשר

$$\begin{aligned} d(x_0,y) &\le d(x_0,z)+d(y_0,z) \\ &< d(x_0,z)+d(x_0,z) < \frac{r}{2}+\frac{r}{2} \end{aligned}$$

אנו מקבלים

$$\overline{\overline{A}} = \overline{A} \cup R = A \cup R = \overline{A}$$

נותר להוכיח שהחיתוך מכיל את $\overline{A}$ אם B סגורה ומכילה את A, אז B מכילה את נק' ההצטברות של A ולכן מכילה את $\overline{A}$

תרגיל הראו שקיימים קבועים $c_1,c_2 > 0$ כך שלכל $x,y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$c_1 d_1(x,y) \le \quad d_\infty(x,y) \quad \le c_2 d_1(x,y)$$

(מטריקות הנ"ל יקראו שקולות)

פתרון מספיק להראות שלכל $x \in \mathbb{R}^n$ קיימות $c_1,c_2 > 0$

$$c_1\|x\|_1 \le \quad \|x\|_\infty \quad \le c_2\|x\|_1$$

אזי

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &\le n\max_i |x_i| = n\|x\|_\infty \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{1}{n} \\ \|x\|_\infty &= \max_i |x_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

תרגיל בהינתן נורמה $\|.\|$ כלשהי על $\mathbb{R}^n$ נגדיר פונקציה $\|.\|^*$ על $\mathbb{R}^n$ ע"י:

$$\forall y \in \mathbb{R}^n; \|y\|^* = \sup\{yx | \|x\| = 1\}$$

הוכיחו ש $\|\|^*$ היא נורמה על $\mathbb{R}^n$

מסקנה בהינתן נורמה כלשהי על $\mathbb{R}^n$ אז $\forall x, y \in \mathbb{R}^n; x \cdot y \leq \|x\| \|y\|^*$

טענה כל הנורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות.

הוכחה נסמן $e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ נסמן גם

$$\begin{aligned} 0 &< c = \max \|e_i\| \\ 0 &< c^* = \max \|e_i\|^* \end{aligned}$$

נתונה נורמה $\|.\|$

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = \max_{i \leq i \leq n} |x \cdot e_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|x\| \|e_i\|^* = c^* \|x\| \end{aligned}$$

עבור נורמה $\|x\|$ אזי

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|e_i\| \\ &\leq \max \|e_i\| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ &= c\|x\|_1 \end{aligned}$$

לכן קיבלנו

$$\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_\infty \leq c^*\|x\| \leq cc^*\|x\|_1$$

נשים לב כי לא כל המטריקות על $\mathbb{R}^n$ שקולות. לדוגמה

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

ונניח ש $\tilde{d}$ מושרית ע"י איזושהי מטריקה $\|.\|$ אז לכל קבוע $c > 0$

$$\begin{aligned} x \neq y; cd(x,y) &= c \\ d(\lambda x, \lambda y) &= c \end{aligned}$$

הגדרה בהינתן[3] שני קבוצות A, B המרחק ביניהם מוגדר להיות

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

טענה ב $\mathbb{R}^n$ בהינתן קבוצה קומפקטית A וקבוצה סגורה B אז

$$A \cap B = \phi \quad \Rightarrow \quad d(A,B) > 0$$

הוכחה נניח בשלילה ש $d(A,B) = 0$ אז קיימות סדרות

$$\{a_n\} \subset A, \{b_n\} \subset B; d(a_n, b_n) \to 0$$

A קומפקטית $\Leftarrow$ ל- $\{a_n\}$ יש תת סדרה מתכנסת $a_n \to a \in A$ ובנוסף

$$d(a_{n_k}, b_{n_k}) \to 0$$

$$d(a, b_{n_k}) \leq d(a, a_{nk}) + d(a_{n_k}, b_{n_k})$$

גורר a נקודת הצטברות של B אבל B סגורה $\Leftarrow$ $a \in B$ בסתירה.

דוגמה נגדית נוותר על B סגורה למשל $B = (0,1), A = [1,2] \Rightarrow d(A,B) = 0$. אם נוותר על קומפקטיות של A

$$A = (y, 0), B = \left(\frac{1}{x}, x\right)$$

אזי $d(A,B) = 0$

תרגיל בית נניח A קומפקטית אזי להוכיח שהקוטר מתקבל

$$diam(A) = \sup\{d(a,b) | a, b \in A\}$$

הגדרה תהי $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f רציפה ב $p_0 \in G$ אם לכל סדרה $\{p_k\} \subset G$, $p_k \to p_0$ מתקיים

$$d_{\mathbb{R}^m}(f(p_k), f(p_0)) \to 0$$

טענה התנאים הבאים שקולים

1. f רציפה ב x_0

[3] תרגול ב 2.11.2004

2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\epsilon) > 0$ כך שלכל x מתקיים $d_{\mathbb{R}^n}(x, x_0) < \delta$

$$d_{\mathbb{R}^m}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

3. לכל סביבה V של $f(x_0)$ קיימת סביבה U של x_0 כך ש $f(U) \subset V$

הגדרה f רציפה על התחום $G \subset \mathbb{R}^n$ אם f רציפה בכל נק' ב-G

טענה f רציפה ב G אם"ם מקור של כל קבוצה פתוחה זו קבוצה פתוחה ב G.

הוכחה

1. נתון f רציפה ב G תהי $V \subset G$ צ"ל $f^{-1}(V)$ פתוחה. תהא $x_0 \in f(V)$ צ"ל שיש כדור

$$B(x_0, r) \subset V$$

אכן $f(x_0) \in V$ וזו פתוחה ולכן קיימת U פתוחה ב G כך ש $x_0 \in U$ וגם $f(U) \subset V$. מכיוון ש U פתוחה אז קיים כדור כנ"ל כך ש $x_0 \in$ $B(x_0, r) \subset U$.

2. נתון שמקור של פתוחה זו פתוחה נתון $x_0 \in G$ f רציפה ב-x_0. יהיה $\varepsilon > 0$ אז $B(f(x_0), \varepsilon)$ קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}^m$ ולכן $f^{-1}(B(f(x_0), r))$ קבוצה פתוחה ב-G, ולכן קיים $\delta > 0$, כך ש

$$f^{-1}(B(f(x_0, \varepsilon))) \supset B(x_0, \delta)$$

$$\Rightarrow f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

2. נאמר ש-f היא ליפשיץ על X אם קיים קבוע L, כך ש

$$d_y(f(p), f(q)) \leq Ld_x(p, q)$$

תרגילים

1. אם f ליפשיץ אז f רציפה במ"ש
2. אם f רציפה במ"ש אז f רציפה.

משפט תהא f פונקציה רציפה ממרחב מטרי קומפקטי X ולמרחב מטרי Y אז f רציפה במ"ש על X.

הוכחה יהי $\varepsilon > 0$, מכיוון ש-f רציפה על X אז לכל $p \in X$ קיים $r_p > 0$ כך שלכל $q \in x$ אם המרחק $d_x(p, q) < r_p$ אז $d_r(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת, לכל p נתאים כדור $B_x\left(p, \frac{r_p}{2}\right)$ אז אוסף הכדורים הנ"ל מהווה כיסוי של X. ולכן יש לו תת-כיסוי סופי

$$B_x\left(p_1, \frac{r_{p_1}}{2}\right), ..., B_x\left(p_m, \frac{r_{p_m}}{2}\right)$$

נסמן

$$0 < \delta = \min\left\{\frac{r_{p_1}}{2}, ..., \frac{r_{p_m}}{2}\right\}$$

יהיו $p, q \in X$ כך ש $d_x(p, q) < \delta$. קיים איזשהו $1 \leq i \leq p_i$ m כך ש $p \in B_x\left(p_i, \frac{r_{p_i}}{2}\right)$ כלומר $d_x(p, p_i) < \frac{r_{p_i}}{2}$ בנוסף

$$d_x(q, p_i) \leq d_x(p, q) + d_x(p, p_i) < \frac{r_{p_i}}{2} + \frac{r_{p_i}}{2} = r_{p_i}$$

ולכן $d_y(f(q), f(p_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $d_y(f(p), f(p_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן

$$d_y(f(p), f(p_i)) \leq d_y(f(p), f(q)) + d_y(f(q), f(p_i)) \leq \varepsilon$$

הגדרות תהי f ממרחב מטרי X למרחב מטרי Y.

1. נאמר ש f רציפה במ"ש על X אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $p, q \in X$

$$d_x(p, q) < \delta \Rightarrow d_y(f(p), f(q))$$

תרגיל יהי (X, d) מרחב מטרי

1. נתונה קבוצה $E \subset X$ הוכיחו ש $d(x, E)$ פונקציה רציפה (במשתנה x)
2. נתונות קבוצות סגורות וזרות A, B הוכיחו ש $f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$ פונקציה רציפה

3. הוכיחו שכל שני קבוצות סגורות וזרות במרחב מטרי ניתן להפריד ע"י קבוצות פתוחות.

פתרון

1. יהיו $x_1, x_2 \in X$ אזי לכל $y \in E$

$$d(x_2, E) \leq d(x_2, y) \leq d(x_2, x_1) + d(x_1, y)$$

ניקח אינפימום על כל $y \in E$ ונקבל

$$\begin{aligned} d(x_2, E) &\leq d(x_2, x_1) + d(x_1, E) \\ d(x_2, E) - d(x_1, E) &\leq d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

באותו אופן יש לנו

$$\begin{aligned} d(x_1, E) - d(x_2, E) &\leq d(x_2, x_1) \\ \Rightarrow |d(x_1, E) - d(x_2, E)| &\leq d(x_2, x_1) \end{aligned}$$

קיבלנו פונקציה ליפשיץ לכן רציפה

2. $d(x, A) + d(x, B)$ רציפה כסכום של רציפות לשים לב כי או $x \notin A$ או $x \notin B$ ו $\{x\}$ זו קבוצה קומפקטית. ולכן $d(x, A) > 0$ או $d(x, B) > 0$ סה"כ f רציפה

3. נשים לב כי f בסעיף הקודם הוא $f : X \to [0,1]$ וגם $f|_A = 0, f|_B = 1$ הקבוצות $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ו $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ פתוחות ב $[0,1]$ומכיוון ש f רציפה אז $f\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ וגם $f\left[0, \frac{1}{2}\right)$ פתוחות ב-X וזרות. וגם $B \subset f\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ וגם $A \subset f\left[0, \frac{1}{2}\right)$

הגדרות

1. נאמר ש X מרחב קשיר אם לא ניתן לכתוב את X ע"י $X = A \cup B$ כאשר A, B פתוחות זרות ולא ריקות.
2. נאמר ש X מרחב קשיר מסילתי אם לכל $p, q \in X$ קיימת פונקציה רציפה $\gamma : [0,1] \mapsto X$ כך ש $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$.

עובדות

1. X קשיר מסילתי גורר X קשיר.
2. קשיר אינו בהכרח קשיר מסילתי

דוגמה $\overline{\left\{x, \sin\frac{1}{x}\right\}}$ הוא הגרף איחוד אם $x = 0, -1 < y < 1$. אזי הדבר קשיר אך לא קשיר מסילתית.

3. על הישר זה אותו דבר

משפט

1. תמונה של מרחב קשיר ע"י פונקציה רציפה היא קשירה
2. האם תמונה של קשיר מסילתית ע"י רציפה היא קשירה מסילתית. (כן הרכבת פונקציה רציפה על רציפה היא רציפה)

הוכחה (1) נתונה U קשירה ו f רציפה נניח בשלילה ש $f(U)$ אינה קשירה אז קיימות A, B פתוחות זרות ולא ריקות כך ש $f(U) \subset A \cup B$, אז $F^{-1}(A), f^{-1}(B)$ פתוחות זרות ולא ריקות וגם

$$U = F^{-1}(A) \cup F^{-1}(B)$$

בסתירה להנחה.

הגדרה $f : X \to Y$ רציפה חח"ע ועל אם F^{-1} רציפה תיקרא הומאומורפיזם ו-X ו-Y במקרה זה יקראו הומאומורפים

דוגמה $f : X \to Y$ רציפה חח"ע ועל אם F^{-1} לא רציפה

$$Y = [0,2], X = [0,1) \cup [2,3]$$

אז $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1) \\ x-1 & x \in [2,3] \end{cases}$ אזי

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} y & y \in [0,1) \\ y+1 & y \in [1,2] \end{cases}$$

תרגיל

1. האם $\mathbb{R}^n$ הומאו' ל $\mathbb{R}$ עבור $n \geq 2$?
2. האם $\mathbb{R}^n$ הומאו לכדור היחידה הסגור שלו?
3. האם $\mathbb{R}^n$ הומאו לכדור היחידה הסגור שלו?
4. האם הכדור הפתוח והסגור הומאו?

הוכחה

1. לא. נניח $n \geq 2; f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ רציפה. ניקח $p, q \in \mathbb{R}^2, p \neq q$ אם $q \neq p$. נניח בה"כ $f(q) < f(p)$ אזי ניתן לבנות שני מסילות זרות חוץ מבקצוות. אזי יש נקודה c_1 במסילה הראשונה ו c_2 במסילה השנייה. אז ע"פ עה"ב $f(\gamma_1(x)), f(\gamma_2(x))$.

2. כן. $f:\mathbb{R}^n \mapsto B$ $f=\frac{x}{1+\|x\|}$ רציפה. $\frac{x}{1+\|x\|}=\frac{y}{1+\|y\|}$ כלומר ת"ל. וגם

$$\begin{aligned}\frac{\|x\|}{1+\|x\|} &= \frac{\|y\|}{1+\|y\|}\\ \|x\| &= \|y\|\end{aligned}$$

לכן חח"ע. על $f^{-1}=\frac{y}{1-\|y\|}$

3. לא. תמונה של קבוצה קומפקטית לא קומפקטית.
4. לא, לפי 3

2.5 חלק פרקטי[4]

הגדרה פונ' $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$, תקרא הומוגנית מסדר $n\in\mathbb{N}$, אם לכל $t>0$ מתקיים

$$f(tx) = t^n f(x)$$

תרגיל

1. הוכיחו כי פונ' הומוגנית מסדר 0, רציפה בראשית אם"ם היא קבועה
2. הוכיחו כי אם $f:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}$ הומוגנית מסדר $n>0$, ורציפה על מעגל היחידה אז $\lim_{x\to0}f(x)=0$

פתרון

1. נתונה f הומוגנית 0, נניח בשלילה שאינה קבוע אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}^n$ כך ש $f(a)\neq f(b)$ נסתכל על הקרניים $t>0;ta,tb$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}f(ta) &= f(a)\\ \lim_{t\to0}f(tb) &= f(b)\neq\lim_{t\to0}f(ta)\end{aligned}$$

2. f רציפה על מעגל היחידה (קומפקטית) ולכן קיים M כך ש

$$\forall x,\|x\|=1;|f(x)| \leq M$$

$$\begin{aligned}(\|x\|\neq0)\Rightarrow|f(x)| &= \left|f\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right)\right|\\ &= \|x\|^n|f(x)|\\ &\leq \|x\|^nM\xrightarrow[x\to0]{}0\end{aligned}$$

מסקנה אם f,g הומוגניות מאותו סדר n ו $h=\frac{f}{g}$ אינה קבוע אז h אינה רציפה בראשית.

דוגמאות

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ אינה רציפה ב 0 כי אינה קבוע.
או ניתן להציב ישירות קרניים.
2. $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ (נציב $y=t,x=s^2$ ונקבל $\frac{s^2t^2}{s^4+t^4}$)

הערה בד"כ צריך לעשות החלפת משתנים הם חח"ע.

3. קואורדינטות כדוריות

$$\begin{aligned}x &= r\sin\varphi\cos\theta\\ y &= r\sin\varphi\sin\theta\\ z &= r\cos\varphi\end{aligned}$$

נגדיר $f:\{x,y,z|x>0\}\cup\{0\}\mapsto\mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \begin{cases}\frac{y}{x}\left(x^2+z^2\right)^{\frac{1}{4}} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

על כל קרן $t(z,b,c)$ $a>0,t>0$

$$f = \frac{b}{a}\left(a^2+c^2\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}\xrightarrow{t\to0}0$$

עבור המסלול $(t,\sqrt{t},t)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}2^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}=2^{\frac{1}{4}}$$

הערה כדי לבדוק בוודאות בקואורדינטות פולריות יש צורך במ"ש.

תרגיל האם קיים

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\ln(1+xy)}{x^4+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\ln(1+xy)xy}{(x^4+y^2)xy}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}\frac{\ln(1+xy)}{xy}\end{aligned}$$

אזי כאשר $\frac{\ln(1+xy)}{xy}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}1$ וכך $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ מתנהג כמו

תרגיל נק אי הרציפות של

$$f(x,y) = \begin{cases}x & y=0\\ 0 & y\neq0\end{cases}$$

[4] תרגול 3.11.2004

פתרון

1. אם $y_0 \neq 0$ אז יש כדור סביב (x_0,y_0) כך שעבור כל נקודה (x,y) בכדור מתקיים $y \neq 0$. ולכן $f \equiv 0$ על הכדור ולכן רציפה על (x_0,y_0)
2. אם $y_0 = 0$ אז

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} f(x,0) &= x_0 \\ \lim_{x\to y_0} f(0,y) &= 0 \end{aligned}$$

והגבולות שווים רק אם $x_0 = 0$. עבור $(x_n,y_n) \to 0$

$$0 \le \quad |f(x_n,y_n)| \quad \le |x_n| \to 0$$

וע"פ למה "סנדוויץ'" סיימנו.

תרגיל

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4|y|^k}{x^8+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

עבור אילו ערכי k f רציפה ב-$(0,0)$

פתרון עבור אי השוויון $xy \le \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$,

$$\frac{x^4|y|}{x^8+y^2} \le \frac{1}{2}\frac{x^8+y^2}{x^8+y^2}$$

1. עבור $k>1$ חסומה כפול שואפת לאפס גורר רציפה.
2. עבור $k=1$ אם בהצבה $y=ax^4$ נקבל ערכים שונים וזה גורר אי-רציפות.
3. עבור $k<1$ עבור אותם מסלול בכפל ב $|y|^{-n}$ נקבל אי-רציפות.

הערות על תרגולים קודמים

1. $\|y\|^* = \sup_{\|x\|=1} y \cdot x$ [5]

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \\ &\le \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\| \\ &\le \max_{1\le 1\le n} \|e_i\| \, \|x\|_1 \\ &\le c \|x\|_1 \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} \|y\|^* &= \sup_{\|x\|=1} y\cdot x = \sup_x y \cdot \frac{x}{\|x\|} \\ &\le \sup_x \|y\|_2 \frac{\|x\|_2}{\|x\|} \\ &= \sup_{\|x\|_2=1} \|y\|_2 \frac{1}{\|x\|} \le c\|y\|_2 \end{aligned}$$

2. $\|x\|$ רציפה על $\{x | \, \|x\|_1 = 1\}$, ולכן מקום-פקטיות מקבלת מינימום $c_2>0$. אז לכל $x \in X$ מתקבל $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\| \ge c_2$ אז $c_2\|x\|_1 \le \|x\|$
3. נתונה A קשירה מסילתית ולא קשירה (בשלילה!) $A = B \cup C$ קבוצות פתוחות זרות ולא ריקות. לוקחים $p \in B, q \in C$ ומחברים עם מסילה רציפה $\gamma : [0,1] \to A$ $\gamma(0)=p, \gamma(1)=q$

$$o \in \gamma^{-1}(B), 1 \in \gamma^{-1}(C)$$

וגם

$$[0,1] \in \gamma^{-1}(B) \quad \cup \quad \gamma^{-1}(A)$$

סתירה לקשירות של $[0,1]$.

הערה קשירות מסילתית זהו יחס שקילות.

1. x x ע"י המסילה הקבועה $\gamma : [0,1]\to U$ $\forall t; \gamma(t) = x$
2. x y קיימת $\gamma : [0,1]$ רציפה $\gamma(0)=x, \gamma(1)=y$
המסילה $\overline{\gamma} : [0,1]$ מוגדרת ע"י $\overline{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ רציפה וגם $\gamma(0)=y, \gamma(1)=x$
3. x y, y z יש $\gamma_1[0,1], \gamma_2[0,1]$ רציפות כך ש

$$\gamma_1(0)=x; \gamma_1(1)=y, \gamma_2(0)=y; \gamma_2(1)=z$$

נייצר

$$\gamma_3 = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

רציפה ו-$\gamma_3(0)=x; \gamma_3(1)=z$

הערה כל ישר המחבר בין שתי נקודות x_0, y_0 במרחב נורמי ניתן להציג כמסילה רציפה.

$$t\in[0,1]; \gamma(t) = x_0 + t(y_0-x_0) = tx_0 + (1-t)y_0$$

[5] תרגול ב-9.11.2004

נבדוק רציפות

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_2)-\gamma(t_1)\| &= \|t_2x_2+(1-t_2)\,y_2-t_1x_1-(1-t_1)\,y_1\| \\ &= \|(t_2-t_1)\,x_0-(t_1-t_2)\,y_0\| \\ &= |t_1-t_2|\,\|x_0-y_0\| \\ &\le |t_1-t_2|\,[\|x_0\|+\|y_0\|] \end{aligned}$$

הערה מסלול ישר בין x ל y אז הישר מוכל כולו בתוך הכדור $y\in B(x,r)$

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (tx+(1-t)\,y) \\ \forall t\in[0,1]\,,d(x,y) &= \|tx+(1-t)\,y-x\| \\ &= |1-t|\,\|y-x\|<r \end{aligned}$$

טענה במרחב נורמי (בפרט ב-$\mathbb{R}^n$) כל קבוצה קשירה ופתוחה היא קשירה מסילתית.

הוכחה נתונה U פתוחה וקשירה (במרחב נורמי) צ"ל קשירה מסילתית.
ניקח $x_0\in U$ נגדיר את V להיות אוסף כל הנקודות ב-U שקשורות מסילתית ל x_0. נראה ש-V פתוחה וגם סגורה.
אכן, יהי $y\in V$. מכיוון ש-U פתוחה יש כדור $B(y,r)\subset U$ וראינו שכל הנקודות ב-$B(y,r)$ קשירות מסילתית ל-y ולכן קשירות מסילתית ל-x_0 לכן V פתוחה. נראה ש V סגורה. נראה ש $U\backslash V$ פתוחה. וכן יהי $y\in U\backslash V$. U פתוחה ולכן קיים $B(y,r)\subset U$ ומשקילות נובע שכל הנקודות בכדור הנ"ל אינן קשירות מסילתית ל x_0.
כעת נשים לב שבמרחב קשיר הקבוצות היחידות שהן פתוחות וסגורות זה המרחב כולו והקבוצה ריקה. מכיוון ש $x_0\in V$ זה גורר $V\neq\phi$ לכן $U=V$ ומשקילות, סיימנו.

3 דיפרנציאביליות

הגדרה נאמר ש $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ גזירה בנקודה p_0 בכיוון v אם קיים הגבול

$$\lim_{t\to0}\frac{f(p_0+tv)-f(p_0)}{t}$$

במקרה זה הגבול הוא הנגזרת הכיוונית של f ב-p_0 בכיוון v. והגבול יסומן ע"י

$$\frac{\partial f}{\partial v}|_{p_0} = \frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$$

הנגזרות החלקיות של f ב-p_0 הן הנגזרות של f בכיווני הצירים. כלומר $\frac{\partial f}{\partial e_i}(p_0)$

הגדרה כאשר $\frac{\partial t}{\partial e_i}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות (בהתאם למה שנתון) נאמר כי $f\in c^1(,,,)$

טענה אם הנגזרות החלקיות של f קיימות ב-$B_\infty(p_0,r)$, אז לכל $p\in B_\infty(p_0,r)$ קיימות n נקודות

$$q_1,..,q_n \in \overline{B_\infty}(p_0,d_\infty(p_0,p))$$

כך ש

$$\begin{aligned} f(p)-f(0) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(q_i)\,(p_1-p_{oi}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(q_i)\,\Delta p_i \end{aligned}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} f(p_0)-f(p) &= [f(p_0)-(f(p_0+\Delta p_1x_1))] \\ &= +[f(p_0+\Delta p_1x_1)-f(p_0+\Delta p_1x_1+\Delta p_2x_2)] \\ &\quad +\left[f\left(p_0+\sum_{i=1}^{n}\Delta p_ix_i\right)-f(p)\right] \end{aligned}$$

נסתכל על סוגריים בודדים

$$f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta p_ix_i\right)-f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k}\Delta p_ix_i\right)$$

נגדיר $g:[0,\Delta p_k]$ ע"י

$$g(t) = f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta p_ix_i+tx_k\right)$$

כלומר

$$g(0) = f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta p_ix_i+tx_k\right)$$

וגם

$$g(1) = f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k}\Delta p_ix_i\right)$$

נמצא $g'(t_0)$

$$g'(t_0) = \lim_{h\to\infty} \frac{f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta p_i x_i+(t_0+h)\,x_k\right)-f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\dots\right.}{h}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta p_i x_i+t_0 x_k\right)$$

נפעיל את משפט לגרנז' על g בקטע $[0,\Delta p_k]$ ונקבל שקיים $t_0\in[0,p_k]$ כך ש

$$g(\Delta p_k)-g(0) = g'(t_0)\,\Delta p_k$$
$$\Rightarrow f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k}\Delta p_i x_i\right)-f\left(p_0+\sum_{i=1}^{k-1}\Delta p_i x_i\right) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(q_k)\,\Delta p_k$$

נסכום על כל הסוגריים ונקבל מש"ל.

הגדרה $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ גזירה (דיפרנציאבילית) מנקודה פנימית $p_0\in\Omega$ אם קיימת טרנסופורמציה ליניארית $Df|_{p_0}$ ופונקציה $\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ המקיימת $\lim_{h\to}\varepsilon(0)=0$ כך ש

$$f(p_0+h) = f(p_0)+Df|_{p_0}(h)+\varepsilon(h)\cdot\|h\|$$

או

$$\|f(p_0+h)-f(p_0)-Df|_{x_0}(h)\| = O(\|h\|)$$

או

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left[f(p_0+h)-f(p_0)-Df|_{x_0}(h)\right] = 0$$

משפט אם $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ גזירה בנק' פנימית p_0 אז

1. f רציפה ב-p_0
2. הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_0)$ קיימות
3. $Df|_{p_0}$ נקבע באופן יחיד והמטריצה המייצגת שלה נתונה ע"י

$$[Df|_{p_0}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}|_{p_0}\right] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{m\times n}|_{p_0}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla f_1 \\ \\ \nabla f_m\end{pmatrix}$$

כאשר ∇f הנגזרות החלקיות של $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ יקראו גרדיאנט

הוכחה

1. $f(p)=f(p_0)+Df|_{p_0}(p-p_0)+\varepsilon(p-p_0)\cdot\|p-p_0\|$ נשאיף $p\to p_0$ ונקבל
2. עבור $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ נניח שקיימים $D_1f|_{p_0},D_2f|_{p_0}$ המקיימים את הגדרת הגזירות ב-p_0. אז לכל h

$$\|(D_2f|_{p_0}-D_1f|_{p_0})(h)\| = \|f(p_0+h)-f(p_0)-D_1f|_{p_0}(h)-(f(p_0+h)-f(p_0)-D_2f|_{p_0}(h))\|$$
$$\le \|f(p_0+h)-f(p_0)-D_1f|_{p_0}\|+\|f(p_0+h)-f(p_0)-D_2f|_{p_0}\|$$
$$\Rightarrow \|(D_2f|_{p_0}-D_1f|_{p_0})(h)\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

מכאן נובע כי לכל n

$$\frac{\|(D_2f|_{p_0}-D_1f|_{p_0})(th)\|}{\|th\|} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

נותר לזהות את $Df|_{p_0}$.
נניח ש f ממשית אז מההגדרה

$$\frac{Df|_{p_0}(te_i)}{t}+\frac{\varepsilon(te_i)\|te_i\|}{t} = \frac{f(p_0+te_i)-f(p_0)}{t}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{Df|_{p_0}(te_i)}{t}+\frac{\varepsilon(te_i)\|te_i\|}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(p_0+te_i)-f(p_0)}{t}$$
$$Df|_{p_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$$
$$\Rightarrow \nabla f|_{p_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)|_{p_0}$$

3. הכללה[6] עבור $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ סידור וקטור כללי $n\in\mathbb{R}^n$

$$Df|_{p_0}(h)+\frac{\varepsilon(th)\|th\|}{t} = \frac{f(p_0+th)-f(p_0)}{t}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{f_1(p_0+th)-f_1(p_0)}{2}\\ \frac{f_2(p_0+th)-f_2(p_0)}{2}\\ \vdots \\ \frac{f_m(p_0+th)-f_m(p_0)}{2}\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{t\to 0} \begin{pmatrix}\nabla f_1(p_0)(h)\\ \nabla f_2(p_0)(h)\\ \vdots\\ \nabla f_m(p_0)(h)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\nabla f_1(p_0)\\ \nabla f_2(p_0)\\ \vdots\\ \nabla f_m(p_0)\end{pmatrix} h$$

[6] תרגול ב 10.11.2004

הגדרה אם הנגזרת $Df|_{p_0}$ רציפה כפונקציה של $p_0\in\Omega$ אז נאמר ש-f גזירה ברציפות ב-Ω.

משפט אם ל-f נגזרות חלקיות רציפות בסביבה של p_0, אז f גזירה ב-p_0. (אנו יודעים גם מי זו הנגזרת)

הוכחה

1. נניח ש f ממשית ($f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$). הסביבה הנתונה מוכל בכדור $B_\infty(p_0,r)$, ולכן

$$\forall h; \|h\|_\infty < r$$

מתקיים

$$f(p_0+h)-f(p_0) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(q_i)\,h_i$$

וגם

$$\forall i, q_i \in B_\infty\left(p_0,\|h\|_\infty\right)$$

אזי

$$\frac{1}{\|h\|}\left|f(p_0+h)-f(p_0)-\nabla f|_{p_0}(h)\right| = \left\|\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(q_1),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(q_n)\right)-\nabla f|_{p_0}\right]\frac{h}{\|h\|}\right\| \quad (1)$$

נשים לב כי $\left\|\frac{h}{\|h\|}\right\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 1$ וגם $d(q_i,q_0)\xrightarrow[\|h\|]{} 0$ בגלל שכל הנקודות במרחק הכדור שהגדרנו ובגלל הרציפות הביטוי

$$(1)\Rightarrow\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(q_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0)\right)-\nabla f|_{p_0}\right\|\left\|\frac{h}{\|h\|}\right\| \to 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(q_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0)\right)-\nabla f|_{p_0} = 0$$

2. עבור $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ אזי

$$\frac{1}{\|h\|}\left\|f(p_0+h)-f(p_0)-J|_{p_0}(h)\right\|$$

$$= \left\|\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q_1),\dots,\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(q_n)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(q_1),\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(q_n)\end{pmatrix}-J|_{p_0}\right]\frac{h}{\|h\|}\right\|$$

מאותו שיקול כמו בסעיף הקודם אנו מקבלים

$$\left\|\left[\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q_1),\dots,\frac{\partial f_1}{\partial x_n}(q_n)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(q_1),\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_n}(q_n)\end{pmatrix}-J|_{p_0}\right]\right\| \xrightarrow[\|h\|]{}$$

הערה למעשה יש לנו משפט חזק יותר שאומר ש-f ב-c^1 בקבוצה פתוחה Ω אם"ם f גזירה שם ברציפות.

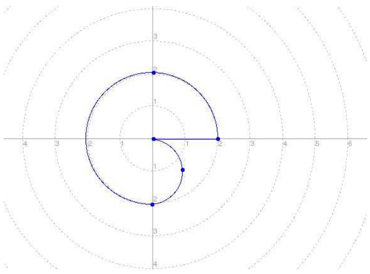
הערה יכול להיות מצב שבו יש אופרטור ליניארי A כך שלכל h מתקיים

$$\|f(p_0+th)-f(p_0)-A(th)\| = O(|t|)$$

דוגמאות

1. בנקודה $\vec{O}$ בדוגמה (איור 1)

איור 1: איור פונקציה לא גזירה



2. $f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^4y}{x^6+y^3} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$

במקרה זה $A=0$ ו $p_0=(0,0)$, אכן, לכל וקטור

$$0 \neq (x_0,y_0)$$

מתקיים

$$\frac{1}{t}\left[f(tx_0,ty_0)-f(0,0)-A(tx_0,ty_0)\right] = \frac{1}{t}\frac{t^5x_0^5y_0}{t^3\left[t^3x_0^6+y_0^3\right]}$$

נשים לב שאם $y_0=0$ הביטוי שווה 0. ואם $0\neq y_0$. אז הביטוי שואף ל 0 כאשר t שואף ל 0. אבל f לא רציפה

ב-$(0,0)$, כי אם בוחרים מסלולים $y=ax^2$

$$\Rightarrow \frac{ax^6}{x^6+a^3x^6} = \frac{a}{1+a^3}$$

תרגיל הראו ש $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\mapsto\mathbb{R}^n$ $f(x)=\frac{x}{\|x\|}$ גזירה בכל נקודה בתחום ההגדרה שלה. ומצאו את $Df|_{p_0}$

פתרון נפתור שתי דרכים

.1

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}(x_1,...,x_n) \\ \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{x_i}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right] &= \left[\frac{\delta_{ij}}{\sum_{k=1}^n x_k^2} - \frac{x_ix_j}{\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] \\ &= \frac{1}{\|x\|}I_{n\times n} - \frac{1}{\|x\|^3}[x_ix_j] \\ \left(\frac{1}{\|x\|}I_{n\times n} - \frac{1}{\|x\|^3}[x_ix_j]\right)(h) &= \frac{h}{\|x\|} - \frac{x\cdot h}{\|x\|^3}x \end{aligned}$$

ולכן הנגזרות החלקיות רציפות בתחום ההגדרה ולכן דיפר-נציאבילית.

.2 אם f גזירה ב x אז לכל h

$$\frac{1}{t}\left(f(x+th)-f(x)\right) = \frac{1}{t}\left(Df|_x(th)+O(|th|)\right)$$

ומכוון ש $\frac{O\|th\|}{t}\xrightarrow[t\to]{}0$ אז

$$Df|_x(h) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} &= \frac{\frac{x+th}{\|x+th\|}-\frac{x}{\|x\|}}{t} \\ &= \frac{1}{t}\left[\frac{(x+th)\|x\|-x\|x+th\|}{\|x+th\|\|x\|}\right] \\ &= \frac{1}{t}\left[x\frac{\|x\|-\|x+th\|}{\|x+th\|\|x\|}+h\frac{\|x\|}{\|x+th\|\|x\|}\right] \\ &= \frac{\|x\|-\|x+th\|}{t}\frac{x}{\|x+th\|\|x\|}+\frac{h\|x\|}{\|x+th\|\|x\|} \\ &\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{x}{\|x\|^2}?+\frac{h}{\|x\|} \end{aligned}$$

? - מה הנגזרת של $\|\,\|$, $\|\,\|$ – או למצוא $\frac{\|x\|-\|x+th\|}{t}\xrightarrow[t\to 0]{}\frac{\partial\|x\|}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \|x\|-\|x+th\| &= \frac{\|x\|^2-\|x+th\|^2}{\|x\|+\|x+th\|} \\ &= \frac{\|x\|^2-(x+th)(x+th)}{\|x\|+\|x+th\|} \\ &= \frac{-t^2\|h\|^2-2tx\cdot h}{\|x\|+\|x+th\|} \\ \Rightarrow \frac{\|x\|-\|x+th\|}{t} &= \frac{-t\|h\|^2-2x\cdot h}{\|x\|+\|x+th\|} \\ &\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{x\cdot h}{\|x\|} \end{aligned}$$

נשאר להראות ש f גזירה.

נראה רק עבור הנורמה. נראה כי $\|x+h\|-\|x\|-\frac{x\cdot h}{\|x\|}=O(h)$

$$\begin{aligned} \|x+h\|-\|x\|-\frac{x\cdot h}{\|x\|} &= \frac{\|x+h\|^2-\|x\|^2}{\|x\|+\|x+h\|}-\frac{x\cdot h}{\|x\|} \\ &= \frac{2x\cdot h+\|x\|^2}{\|x\|+\|x+h\|}-\frac{x\cdot h}{\|x\|} \end{aligned}$$

נראה כי המונה הוא $O(h)$

$$\frac{2\|x\|x\cdot h+\|x\|\|h\|^2-\|x\|x\cdot h-\|x+h\|x\cdot h}{\|h\|}$$

$$\frac{(\|x\|-\|x+h\|)x\cdot h}{\|h\|}-\|x\|\|h\| \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$$

משמעות גאומטרית (לא פורמלי) הדיפרנציאל הוא השינוי בכל אחד מהכיוונים אם כופלים $\frac{\partial f}{\partial v}|_{p_0}$ ב-v. (אף אחד לא מבטיח לנו ש v מנורמל) אזי

$$\frac{\partial f}{\partial v}|_{p_0}\cdot\hat{v} = \nabla f|_{p_0}\cdot\hat{v}$$

אזי השיפוע הכי גדול הוא בכיוון $\nabla f|_{p_0}\cdot\hat{v}\le\|\nabla f|_{p_0}\|$

הערה הגרדיאנט הוא מעל $\mathbb{R}^n$ כלומר הוא במ-קור ולא בתמונה.

טענה הנגזרת של אופרטור ליניארי הוא האופרטור הליניארי בעצמו.

הערה דיפ'[7] למסלולים ע"י $\gamma = \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \vdots \\ \gamma_n(t)\end{pmatrix};\dot{\gamma}(t) = d\gamma|_t =$

[7] תרגול ב 16.11.2004

כלומר קיבלנו משיק. $\begin{pmatrix}\gamma_1^{'}(t)\\ \vdots\\ \gamma_n^{'}(t)\end{pmatrix}$ (וקטור מהירות γ)

יעקוביין

דוגמה נעביר $(r,\theta,\varphi) \rightarrow (r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta)$

עזי היעקוביין

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{vmatrix} \\
&= \cos\varphi\left[-r^2\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right] - r\sin\varphi\left[r\,s\right. \\
&= -r^2\sin\varphi
\end{aligned}
$$

תרגילים

תרגיל יהיו F,G,H העתקות מטריציות $F,G,H:\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^{n\times n}$ לדוגמה

$$
m=2;(x,y) \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,n} \\ \\ f,n & f_{n,n}\end{pmatrix}
$$

נתון ש F,G גזירות ו $H(x) = F(x)G(x)$ חשבו את DH

פתרון

$$
\begin{aligned}
H(x) &= \left[F(x)+DF(h)+O(\|h\|)\right]\left[G(x)+DG(h)+O(\|h\|)\right] \\
&= F(x)G(x)+F(x)\cdot DG|_x(h)+DF|_x(h)\cdot G \\
&\quad +DF|_x(h)\,DG|_x(h)+o(\|h\|)\left[G(x)+DG|_x(h)\right] \\
&\quad +\left[F(x)+DF|_x(h)\right]
\end{aligned}
$$

כאשר

$$
\begin{aligned}
\frac{\|DF|_x(h)\,DG|_x(h)\|}{\|h\|} &\le \frac{\|DF|_x(h)\|\,\|DG|_x(h)\|}{\|h\|} \\
&\le \frac{\|DF|_x(h)\|_{HS}\,\|DG|_x(h)\|_{HS}\,\|h\|^2}{\|h\|} \rightarrow 0
\end{aligned}
$$

כאשר גם $G(x)+DG|_x(h)$ חסום ע"י נורמה וגם $F(x)+DF|_x(h)$ לכן סה"כ

$$
H(x) = F(x)G(x)+F(x)\cdot DG|_x(h)+G\cdot DF|_x(h)+o(\|h\|)
$$

סה"כ

$$
DH|_x = F(x)\cdot DG|_x(h)+G\cdot DF|_x(h)
$$

הערה התכנסות במ"ש הכיוון הוא השקילות של רציפות ב $(0,0,0)$ אם"ם לפונקציה $v(x,y,z)$ קיים

$$
u(r,\theta,\varphi) = v(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)
$$

$$
\lim_{r\rightarrow 0}\sup_{\theta,\varphi}\left\{u(r,\theta,\varphi)-v(0,0,0)\right\} = 0
$$

תרגיל עבור אילו ערכי K

$$
f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^4|y|^k}{x^8+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}
$$

1. רציפה ב- $(0,0)$
2. קיימות נ"ח ב- $(0,0)$
3. גזירה ב-$(0,0)$
4. $f\in c^{'}(0,0)$ (נ"ח רציפות ב-$(0,0)$)

פתרון

1. ראינו עבור $1<k$
2. קיימות ושוות ל-0 לכל ערכי k

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\rightarrow 0}\frac{f((0,0)+(t,0))-f(0,0)}{t} = 0
$$

3. דיפרנציאבלית אם"ם קיים

$$
\lim_{(\Delta x,\Delta y)\rightarrow 0}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}|_{(0,0)}\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}|_{(0,0)}\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0
$$

סה"כ

$$
\frac{x^4|y|^k}{x^8+y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3|y|^k}{x^8+y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}
$$

כאשר $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ חסום ע"י 1. נעריך בערך מוחלט

$$
\begin{aligned}
0 \le \frac{|x^3||y|^k}{x^8+y^2} &=_{u=x^4} \frac{|u|^{\frac{3}{4}}|y|^k}{u^2+y^2} \\
&= \frac{r^{\frac{3}{4}+k}\left(|\cos\theta|^{3/4}+|\sin\theta|^k\right)}{r^2}
\end{aligned}
$$

נדרוש

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}+k &> 2 \\
k &> \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

עבור $k=\frac{5}{4}$ נבחר מסלולים $y=ax^4$ אם נציב בכל הפונקציה

$$\frac{a^{\frac{4}{5}}x^4x^5}{x^8\left(1+a^2\right)}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2x^8}} = \pm\frac{a^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1+a^2}}$$

4. נחשב נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4\left|y\right|^k}{x^8+y^2}\right) = \frac{4x^3\left|y\right|^k\left(x^8+y^2\right)-8x^{''}\left|y\right|^k}{\left(x^8+y^2\right)^2}$$

$$= \frac{4x^3\left|y\right|^k}{\left(x^8+y^2\right)}-\frac{8x^{11}\left|y\right|^k}{\left(x^8+y^2\right)^2}$$

כדי ש $\frac{4x^3|y|^k}{(x^8+y^2)}\to 0$ צריך $k>\frac{5}{4}$
וגם

$$\frac{8x^{''}\left|y\right|^k}{\left(x^8+y^2\right)^2} =_{x^4=u} \frac{8\left(u\right)^{11/4}\left|y\right|^k}{\left(u^2+y^2\right)^2}=8\frac{r^{\frac{11}{4}+k}\left(\ldots\right)}{r^4}$$

סה"כ $k>\frac{5}{4}$
עבור

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4\left|y\right|^k}{x^8+y^2}\right) = \frac{sign\left(y\right)kx^4\left|y\right|^{k-1}}{x^8+y^2}-\frac{2x^4y\left|y\right|^k}{\left(x^8+y^2\right)^2}$$

צריך לדרוש $1<k-1\Rightarrow k>2$
וגם

$$\frac{x^4y\left|y\right|^k}{\left(x^8+y^2\right)^2}=\frac{x^4y\left|y\right|^{k+1}}{\left(x^8+y^2\right)^2}=\frac{2u\left|y\right|^{k+1}}{\left(u^2+y^2\right)^2}=\frac{r^{k+2}\left(\ldots\right)}{r^4}$$

3.1 כלל השרשרת

בהינתן העתקות T,S ובהינתן התנאים המתאימים מתקיים

$$d\left(S\circ T\right) = ds|_{T(p)}\cdot dT|_p$$

דוגמאות

1. יהיו $f:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\mapsto\mathbb{R}^n;g:\mathbb{R}^n\setminus\{0,0\}\mapsto\mathbb{R}$ כאשר

$$f\left(x\right) = \frac{x}{\|x\|}$$
$$g\left(y\right) = \|y\|$$

חשבו את $d\left(g\circ f\right)$ בכל הנקודות בתחום של f. אנו מצפים לתוצאה $d\left(g\circ f\right)=0$.

$df|_x\left(u\right)$ לכל $u\in D\left(f\right)$ הוא

$$df|_x\left(u\right) = \frac{1}{\|x\|}u-\frac{x\cdot u}{\|x\|^3}x$$
$$dg|_y\left(v\right) = \nabla g|_y v=\frac{y\cdot v}{\|y\|}$$

אצלנו $y=\frac{x}{\|x\|}$

$$dg|_{\frac{x}{\|x\|}}\left(df|_x\left(u\right)\right) = \frac{\frac{x}{\|x\|}}{\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\|}\cdot\left(\frac{1}{\|x\|}u-\frac{x\cdot u}{\|x\|^3}x\right)$$
$$= \frac{x\cdot u}{\|x\|^2}-\frac{x\cdot x}{\|x\|}\frac{x\cdot u}{\|x\|^3}=0$$

2. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\gamma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^n$. γ,f מקימות את תנאי המשפט, אז $y=$ אזי $f\circ\gamma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$

$$g^{'}\left(t\right) = df|_{\gamma(t)}d\gamma|_t=\nabla f|_{\gamma(t)}\dot{\gamma}\left(t\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{\gamma(t)}\gamma_i^{'}\left(t\right)$$

אזי הנגזרת המכוונת

$$\left(\gamma\left(t\right)=p_0+t\hat{v}\right)\Rightarrow\lim_{t\to0}\frac{f\left(p_0+t\hat{v}\right)-f\left(p_0\right)}{t} = f\left(p_0+t\hat{v}\right)^{'}|_0$$
$$= d\left(f\cdot\gamma\right)|_{t=0}$$
$$= \nabla f|_{\gamma(0)=p_0}\dot{\gamma}\left(0\right)$$
$$= \nabla f|_{\gamma(0)=p_0}\cdot\hat{v}\le\|\nabla f|_{p_0}\|$$

תרגיל נתון $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$;$n>1$ $f\left(x\right)=\|x\|^2$ לכל $x_0\in\mathbb{R}^n$ מצאו עקום $\gamma\neq const$ המקיים

$$\nabla f|_{\gamma(t)}\cdot\gamma\left(t\right) = 0$$

לכל t בתחום של γ.

הערה אם נבחר $\gamma\left(t\right)\subset\{x|f\left(x\right)=f\left(x_0\right)\}$ אזי $f\left(\gamma\left(t\right)\right)=const$.

פתרון משטחים שווי גובה של f הן הספרות $S_{\|x_0\|}^{n-1}=\{x|\,\|x\|=\|x_0\|\}$ נותר למצוא עקום מעל $\gamma\left(t\right)\in S_{\|x_0\|}^{n-1}$

$$\gamma\left(t\right) = \left(\|(x_{0_1},x_{0_2},0,0,..)\|\cos\theta,\|(x_{0_1},x_{0_2},0,0,..)\|\sin\theta,x_{0_3},x_{0_4},\ldots\right)$$

$$
\begin{aligned}
\nabla f|_x &= 2x \\
&\Rightarrow df|_{\gamma(t)} = 2\gamma(t) \\
\dot{\gamma}(t) &= \left(\|(x_{0_1},x_{0_2},0,0,..)\|\sin t, \|(x_{0_1},x_{0_2},0,0,..)\|\cos t,0,0,...\right)
\end{aligned}
$$

משפט (איילר) נתונה[8] $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ אז f הומוגנית מסדר $k>0$ אם"ם

$$\forall x\in\mathbb{R}^n;\nabla f|_x\cdot x = kf(x)$$

נגדיר בהינתן x $F:\mathbb{R}_+\mapsto\mathbb{R}$ וגם

$$F(t) = F(tx_1,tx_2\dots tx_n)=f(tx), u_i=tx_i; u=tx$$

$$F^{'}(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}\frac{du_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}x_i$$

ועבור $t=1$ נקבל

$$F^{'}(1) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}x_i=\nabla f|_x x_i$$

הוכחה

1. מצד אחד: נניח שנתון ש-f הומוגנית מסדר $k>0$ אז

$$
\begin{aligned}
F(t) &= f(tx)=t^k f(x) \\
\Rightarrow F^{'}(t) &= kt^{k-1}f(x) \\
\Rightarrow F^{'}(x) &= \nabla f|_x\cdot x=kf(x)
\end{aligned}
$$

2. מצד שני: נניח שנתון ש $\forall u\in\mathbb{R};\nabla f|_u\cdot u = kf(u)$

$$
\begin{aligned}
F^{'}(t) &= \nabla f|_u\cdot x=\frac{1}{t}\nabla f|_u\cdot u \\
&= \frac{1}{t}kf(u)=\frac{1}{t}kf(tx) \\
&= \frac{1}{t}kF(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{F^{'}(t)}{F(t)} &= \frac{k}{t} \\
\Rightarrow \ln F(t) &= k\ln ct \\
\Rightarrow F(t) &= \left(e^{lnct}\right)^k \\
&= c^k t^k \\
F(1) &= c^k = f(x) \\
\Rightarrow f(tx)=F(t) &= t^k f(x)
\end{aligned}
$$

■

3.2 משפטי רציפות

משפט אם היעקוביאן של $T:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ השייכת ל $C^1(D)$, עבור D פתוח, אינו מתאפס שם אז T חח"ע מקומית ב- D.

משפט תהי $T:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$ ב-$C^1(D)$ עבור D פתוח ו-$J_T\neq 0$ ב-D אז $T(D)$ קבוצה פתוחה. ומכאן T לוקחת קבוצות פתוחות ב D לקבוצות פתוחות.

משפט אם T כנ"ל ב-$C^1(D)$, D פתוחה, עם $J_T\neq 0$ ב- D ונניח גם ש- T חח"ע על כל D כך שקיימת $T^{-1}:T(D)\mapsto D$, אז T^{-1} היא ב- $C^1(T(D))$ וגם מתקיים

$$d\left(T^{-1}\right)|_{T(p)} = \left(dT|_P\right)^{-1}$$

תרגיל חשבו את J_T מה ניתן לומר על ההתנהגות המקומית של T.

1. $\begin{cases}u=e^x\cos y\\ v=e^x\sin y\end{cases}$ נחשב מטריצת יעקובי

$$
\begin{aligned}
dT &= \begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x\sin y \\ e^x\sin y & e^x\cos y\end{pmatrix} \\
\Rightarrow J_T &= e^{2x}
\end{aligned}
$$

ולכן J_T לא מתאפס על כל $\mathbb{R}^2$. T לא חח"ע ערכית גלובלית. בנקודות $(x,y),(x,y+2\pi)$ נקבל אותם ערכים

2. $u=x^2, v=\frac{y}{x}$ אזי

$$
\begin{aligned}
dT &= \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{pmatrix} \\
\Rightarrow J_t &= 2
\end{aligned}
$$

[8] תרגול ב 17.11.2004

נשים לב כי הטרנספורמציה ההפוכה

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{u} \\ y &= \sqrt{u}v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dT^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 \\ \frac{v}{2\sqrt{u}} & \sqrt{u} \end{pmatrix} \\ J_t^{-1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. $u = x^2 + 2xy + y^2, v = 2x + 2y$

$$\begin{aligned} DT &= \begin{pmatrix} 2x+2y & 2x+2y \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow J_T &\equiv 0 \end{aligned}$$

תלות פונקציונלית:
נשים לב כי $v^2 = 4(x+y)^2 = u$
ניקח $p_0 = (x_0, y_0)$ וגם

$$\begin{aligned} u_0 &= (x_0 + y_0)^2 \\ v_0 &= 2(x_0 + y_0) \\ x_0 + y_0 &= \sqrt{u_0} = \frac{v_0}{2} \end{aligned}$$

לכן נבחר $(x_0, y_0) + t(1, -1)$ כך שכל הישר הזה מועתק לנקודה.

תרגיל נתונה $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ דיפ'. מגדירים $v(r, \theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$ בטאו את $u_x^2 + u_y^2$ ע"י θ, r, v

פתרון מכלל השרשרת

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \end{aligned}$$

כלומר צריך למצוא את $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$

1. נסתכל על הפונקציות ההפוכות

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\frac{y}{x} \end{aligned}$$

(θ עד כדי π)

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \\ r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta \\ \theta_x &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r} \\ \theta_y &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r} \end{aligned}$$

נציב

$$\begin{aligned} u_x^2 + u_y^2 &= \left(v_r\cos\theta - v_\theta\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 + \left(v_r\sin\theta + v_\theta\frac{\cos\theta}{r}\right)^2 \\ &= v_r^2 + \frac{v_\theta^2}{r} \end{aligned}$$

2. דרך שניה זה למצוא את המטריצה

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}$$

אז

$$\begin{aligned} DT &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ \Rightarrow DT^{-1} &= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

דוגמה

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

נגזרת ב-0 תהיה $x' + \lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{1}{t} - 0}{t} =$ 1 הנגזרת בנקודות שונות מ 0 היא

$$f(x) = 1 + 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

גרדיאנט דיון לא פורמלי על משמעות הגרדיאנט של פונקציה מאונך למשטחים שווי גובה.

טענה (ללא הוכחה בינתיים) נתונה פונקציה $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ אם קיים משטח שבו $f = const$ סביב p_0. אז $\nabla f|_{p_0}$ הוא נורמל למישור המשיק למשטח ב-p_0.

טענה עבור $f : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ אזי הגרף $x_{k+1} = f(x_1, ..., x_k)$.

אז הנורמל לגרף של f מעל p_0, כלומר ב $(p_0, f(p_0))$ הוא

$$(\nabla f|_{p_1}, -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1\right)$$

רעיון (ע"פ משפט הפונקציות הסתומות)

הוכחה המישור שמגביל לגרף $x_{n+1} = f(p_0) + \nabla f|_{p_0} \cdot (x - x_0)$ אז הנורמל למישור

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_{0i}) - (x_{k+1} - f(p_0)) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, .., \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1\right) \cdot (x - x_0) \end{aligned}$$

קיבלנו משוואת מישור שהגרדאינט ניצב לו.

תרגיל נתונה אליפסה ב $\mathbb{R}^n$

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{\alpha_n^2} = 1$$

מצאו נקודה על האליפסואיד כך שה-מישור המשיק למשטח בנקודה חותך את הצירים במרחקים שווים מהראשית.

פתרון נחפש נקודה כזו בתחום בו כל x_i אי-שלילי. עבור $n = 2,3$ נורמל למישור כנ"ל חייב להגביל לווקטורים $(1,1), (1,1,1)$.
לכל $i \neq j$ ce_i הנורמל חייב להיות מאונך לווקטור כלומר לווקטורים $(e_i - e_j)$ $(e_i - e_j)$ אזי $(1,1,1\ldots1)$ מאונך למישור הנ"ל. הנורמל בנקודה כללית

$$x_1, ..., x_n$$

על האליפסה הוא $\frac{2x_1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{2x_n}{\alpha_n}$ ומצד שני $c(1,1,..,1)$ אז הנקודה

$$x_1 = \frac{c\alpha_1^2}{2}, .., x_n = \frac{c\alpha_n^2}{2}$$

נציב באליפסה

$$c^2\left(\frac{\alpha_1^2}{4} + ... + \frac{\alpha_n^2}{4}\right) \Rightarrow c = \frac{2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}}$$

אזי

$$x = \frac{1}{\|\alpha\|}\left(\alpha_1^2, ..., \alpha_n^2\right)$$

תרגיל (כללי)

1. נתונה $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ גזירה בסב-יבה של $(0,0)$ ומקבלת ערך קבוע על $y^2 = (x - x^2)^2$ הוכיחו

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

פתרון $y_1 = x - x^2, y_2 = -x + x^2$ שני הפרבולות מצטלבות ב-0. שני עקומים $\gamma_1(t) = (t, t - t^2), \gamma_2(t) = (t, -t + t^2)$ אזי

$$\begin{aligned} g_i(t) &= f(\gamma(t)) \\ \Rightarrow 0 &= g_1'(0) = \nabla f|_{\gamma_1(0)} = \nabla f|_{(0,0)} \cdot (1,1) \\ - &= g_2'(0) = \nabla f|_{\gamma_2(0)} = \nabla f|_{(0,0)} \cdot (1,-1) \end{aligned}$$

2. נתונה $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ ב- C^1 בסב-יבה של $(0,0)$ ומקבלת ערך קבוע על $(x - y)^2 = x^4$ הוכיחו ש

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

שני עקומים

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, t - t^2) \\ \gamma_2(t) &= (t, t + t^2) \\ \dot{\gamma_1}(0) &= (1,1) \\ \dot{\gamma} &= (1,1) \end{aligned}$$

$$\nabla f|_{(0,0)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

נבחר סדרה x_n ונקודות תואמות על העקומים $y_{1,n} \in \gamma_2, y_{2,n} \in \gamma_n$ וסביבות נגדיר $g_n(t) = f((x_n, y_n) + t(0,1))$ g מקבלת ערכים זהים ב $t = 0$ וגם $t = y_{2n} - y_{1n}$. g היא c^1. אזי לכל x_n יש $y_{1,n} \leq z_n \leq y_{2,n}$ כך ש $f_y(z_n) = 0$ לכן מהרציפות

$$\nabla f|_{(0,0)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

תרגיל תהי[9] $T : \overline{B_n} \mapsto \mathbb{R}^n$ העתקה C^1 עם $J_T \neq 0$ בתחום. מקיימת $\|Tx - x\| \leq \frac{1}{3}$ הוכיחו כי $0 \in T(\overline{B_n})$ או הראו כי למשוואה $Tx = 0$ יש פתרון.

[9]תרגול 23.11.2004

פתרון נסתכל על $\|Tx\|$ מספיק להוכיח שהפונקציה הזאת מתאפסת. אזי $\|Tx\|$ לפחות רציפה. מכיוון שזאת פונקציה רציפה על תחום קומפקטי, היא מקבלת מינימום m. נשים לב כי על s^1_{n-1}, $\|Tx\| \ge \frac{2}{3}$ כי עבור $\forall x \in s^1_{n-1}$ אם $Tx \in B_n\left(0, \frac{2}{3}\right)$ אז

$$\|Tx - x\| \quad \ge \quad |\|Tx\| - \|x\|| > \left|1 - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

בסתירה.
לעומת זאת

$$\|T(0)\| = \|T(0) - 0\| \quad \le \quad \frac{1}{3}$$

לכן m מתקבל ב B^1_n.
נניח בשלילה $m > 0$ כלומר יש $y \in B^1_n$ כך ש

$$\|T(y)\| \quad = \quad m > 0$$

קיים כדור $B(y,r) \subset B^1_n$ ולכן התמונה שלו היא קבוצה פתוחה המכיל את $T(y)$ (משפט ההעתקות הפתוחות) ובפרט איזשהו כדור $B(Ty,\rho)$, $\rho < \|Ty\|$ כלומר יש מקור לנקודה

$$\exists z \in B(y,r) ; Tz = \left(1 - \frac{\rho}{2\|Ty\|}\right) Ty$$

וגם

$$\begin{aligned} \|Tz\| &= \left\| \left(1 - \frac{\rho}{2\|Ty\|}\right) Ty \right\| \\ &= \left(1 - \frac{\rho}{2\|Ty\|}\right) \|Ty\| \\ &= \|Ty\| - \frac{\rho}{2} < m \end{aligned}$$

בסתירה להנחה.

4 משפט הפונקציות הסתומות

סימונים

1. $F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, נסמן $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. המשוואה הבאה

$$F(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_m) \quad = \quad const \in \mathbb{R}^m$$

תהי $p_0 = \left(x^0_1 \ldots x^0_n, y^0_1 \ldots y^0_n\right)$. נאמר שיש חילוץ של $y_1 \ldots y_n$ כפונקציה של $x_1 \ldots x_n$ בסביבה של p_0, אם קיימת סביבה של $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ופונקציות

$$y_1 = \varphi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots y_m = \varphi_m(x_1 \ldots x_n)$$

כך שבסביבה זו

$$F(x_1 \ldots x_n, \varphi_1(x_1 \ldots x_n) \ldots \varphi_m(x_1 \ldots x_n)) \quad = \quad const$$

(הפונקציות $\varphi_1 \ldots \varphi_m$ מוגדרות בסביבה מתאימה של x_0)

2. סימון

$$\begin{aligned} u &= (u_1 \ldots u_m) \\ x &= (x_1 \ldots x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \frac{\partial(u_1 \ldots u_m)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x$$

למשל בעיגול $x^2 + y^2 = 1$ אז ניתן לחלץ את y לפי x בסביבה קטנה מספיק.

משפט (חלקי) תהי $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ פונקציה ב- $C^1(D)$, D פתוח, תהי $p_0 = \left(x^0_1 \ldots x^0_n\right)$ ב-D, כך ש

$$F(p) \quad = \quad 0$$

ונניח ש $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$. אז קיים חילוץ $\varphi \in C^1$ בסביבה של $\left(x^0_1 \ldots x^0_n\right)$ כל שבסביבה זו

$$F(x_1 \ldots x_n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x_1 \ldots x_{n-1}) = x_n$$

וכך ש

$$\varphi\left(x^0_1 \ldots x^0_{n-1}\right) \quad = \quad x^0_n$$

דוגמה נתונה $xy - x \ln y + e^{xz} = 1$

1. האם משטח זה מהווה גרף של פונ' $y = \varphi(x,z)$ בסביבה של $(0,1,1)$

פתרון בדיקה!
הפונ' הוא c^1 בסביבה של הנקודה

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1,1) \quad = \quad x - \frac{z}{y}|_{(0,1,1)} = -1 \neq 0$$

התשובה היא כן.

2. האם המשטח מהווה גרף של $z(x,y)$ בסביבה כנ"ל?

$$\frac{\partial F}{\partial z}|_{(0,1,1)} = -\ln y - xe^{xz}|_{(0,1,1)} = 0$$

לכן המשפט לא נותן מידע

3. חזרו א',ב' כאשר דורשים חילוץ c^1

(א) כן, תנאי המשפט מתקיימים

(ב) נניח שקיים $z(x,y)$ ב- c^1 כנ"ל. אז

$$g(x,y) = xy - z(x,y)\ln y + e^{xz(x,y)} = 1$$

$g \in C^1$ בסביבה המתאימה. וכן

$$0 = g_y(x,y) = x - z_y lny - \frac{z}{y} + xz_y|_{(0,1,1)} = -1$$

וזאת סתירה.

טענה אם קיים חילוץ $\varphi \in C^1$ של x_n מתוך $F(x_1 \ldots x_n) = c$ בסביבה של $p_0 = (x_1^0 \ldots x_n^0)$ אז

$$F(x_1 \ldots x_{n-1}, \varphi(x_1 \ldots x_{n-1})) = c$$

בסביבה זאת ולכן בתנאי המשפט ($\frac{\partial f}{\partial x_i} \neq 0$) בסביבה הנ"ל ($F \circ \varphi \in C^1$)

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

מסקנות

1. אם מתקיימים תנאי המשפט ורוצים את הנגזרת החלקית ה-i, $i < n$ אז

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

באזשהי סביבה מתאימה של נקודות החילוץ ב- $\frac{\partial F}{\partial x_n} \neq 0$

2. מהמסקנה הראשונה. ניתן להסיג נגזרות גבוהות של החילוץ ע"י גזירה. האגף הימני של (3) במידה שידוע ש $\varphi, \frac{\partial F}{\partial x_i}, \frac{\partial F}{\partial x_n}$ גזירות בהתאם. בנתונים אלה ניתן לנסות ולגזור ולחלץ נגזרת גבוהה של φ מתוך המשוואה הסתומה ע"י גזירה סתומה כפי שעשינו בדוגמה.

3. אם תנאי המשפט, מתקיימים פרט לעובדה ש $\frac{\partial F}{\partial x_n}|_{p_0} = 0$, אז אם קיים חילוץ גזיר ראינו ש

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$$

מתאים בסביבה המתאימה, ולכן $\forall i; \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ ב-p_0.

תרגיל $2\cos xyz - x^3 - y^3 = 0$

1. האם יש חילוץ c^1 $x(y,z)$ בסביבת $(1,1,0)$?

פתרון $2 - 1 - 1 = 0$ מקיימת את משוואה. F היא C^1 וגם

$$F_x = -2yz\sin xyz - 3x^2|_{(1,10)} = -3 \neq 0$$

2. האם יש חילוץ $y(x,y)$ ב- c^1 כנ"ל, אם כן חשבו את $y_x(1,0)$ וגם $y_{xx}(1,0) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(1,0)$

פתרון

$$F_y = -2xz\sin xyz - 2y \Rightarrow F_y(1,1,0) = -2 \neq 0$$

לכן יש חילוץ C^1.

$$y_x(1,1,0) = -\frac{F_x}{F_y}(1,1,0) = -\frac{-3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

בסביבה המתאימה

$$y_x = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{u}{v}$$

כאשר

$$\begin{aligned} u &= 2y(x,z)z\sin xzy(x,z) + 3x^2 \\ v &= 2xz\sin xzy(x,z) + 2y(x,y) \end{aligned}$$

u,v הן c_1 בסביבה הנ"ל, מכיוון (בין היתר) ש $y \in C^1$ שם. ולכן קימת y_{xx} בנקודה. וגם

$$\begin{aligned} y_{xx}|_{(1,1,0)} &= -\frac{u_x v - v_x u}{u^2} \\ u(1,0) &= 3 \\ u_x(1,0) &= 2y_x z\sin xzy + 2y(\ldots)\cos\ldots + 6x^3 \\ v(1,0) &= 2 \\ v_x(1,0) &= \ldots + 2y_x(1,0) = -3 \\ y_{xx}|_{(1,1,0)} &= -\frac{12+9}{4} = -\frac{21}{4} \end{aligned}$$

3. האם המשוואה מגדירה $z(x,y)$ גזירה בסביבה של $(1,1,0)$

$$F_z = -2xy\sin xyz - 2z \Rightarrow F_z(1,1,0) = 0$$

אבל אז $F_y = 0, F_x = 0$ והם לא 0 ולכן אין חילוץ גזיר.

תרגיל מצאו תנאים על $F(x,y) \in C^1$ בסביבה של $(0,0)$ המקיימת $F(0,0) = 0$ כך שהיה חילוץ של y כפונקציה של x בסביבה של נקודה זאת מהמשוואה

$$F(F(x,y),y) = 0$$

פתרון

$$G(x,y) = F(F(x,y),y) = 0$$

הנק' $(0,0)$ מקיימת את משוואה ו- $g \in C^1$

$$\begin{aligned} G_y &= F_x(F(x,y),y)F_y(x,y) + F_y(F(x,y),y) \\ \Rightarrow G_y(0,0) &= F_x(0,0)F_y(0,0) + F_y(0,0) = \\ &= (F_x(0,0)+1)F_y(0,0) \neq 0 \end{aligned}$$

ולכן נדרוש $\nabla F(0,0) \neq (-1,0)$

משפט (הפונקציות הסתומות המוכלל - גרסה חלקית ללא דיון בסביבות)[10] תהי $T : D \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$, $T \in C^1(D)$, D פתוחה

$$T(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) \end{cases}$$

תהי $\overline{P} = (\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n},\overline{y_1},\ldots,\overline{y_n})$ ב-D כל ש $T(\overline{p}) = 0 \in \mathbb{R}^m$ (כלומר יש סביבה לכל $1 \le i \le m$) אם

$$det\frac{\partial(F_1,\ldots,F_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}|_{\overline{p}} \neq 0$$

אז יש סביבה $D^1 \subset \mathbb{R}^n$ של $\overline{p'} = (\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$, ו-$s : D' \mapsto \mathbb{R}^m$

$$s = \begin{cases} f_1(x_1,\ldots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,\ldots,x_n) \end{cases}$$

כך ש

$$\forall x \in D', T(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = 0 \iff s(x_1,\ldots,x_n) = (y_1,$$

דוגמה

$$\begin{aligned} F(x,y,z,u,v) &= x^2+y^2+z^2+u^2+v^2-50 = 0 \\ G(x,y,z,u,v) &= x^2-y^2+z^2-u^2+v^2 = 0 \end{aligned}$$

$$p_1 = (0,-5,0,0,5), p_2 = (-3,0,0,5,4)$$

1. חלץ u,v במונחי (x,y,z) בסביבות של p_1,p_2

פתרון נבדוק

$$\begin{aligned} 5^2+5^2-50 &= 0 \\ 9^2-25+4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det\frac{\partial(F,g)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ -2u & 2v \end{vmatrix} = 8uv \\ \Rightarrow det|_{p_1} &= 0, det|_{p_2} = 160 \end{aligned}$$

כלומר המשפט מבטיח חילוץ ב-p_2 בלבד. כלומר יש $u = f(x,y,z)$, $v = g(x,y,z)$

$$f(-3,0,0) = 5, g(-3,0,0) = 4$$

ב-c^1 בסביבה של $(-3,0,0)$ המקיימות את הדרוש.

2. מה זה u_x במקרה זה?

פתרון

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2+u^2+v^2-50 &= 0 \\ x^2-y^2+z^2-u^2+v^2 &= 0 \end{aligned}$$

נגזור לפי x

$$\begin{aligned} 2x+2ff_x+2gg_x &= 0 \\ 2x-2ff_x+2gg_x &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ -2u & 2v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_x \\ g_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ -2x \end{pmatrix}$$

לפי כלל קרמר

$$f_x = \frac{\det\begin{pmatrix} -2x & 2v \\ -2x & 2v \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ -2u & 2v \end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{aligned} g_x|_{(-3,0,0)} &= \frac{\det\begin{pmatrix} 2u & -2x \\ -2u & -2x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 2u & 2v \\ -2u & 2v \end{pmatrix}}|_{(-3,0,0,5,4)} = -\frac{8ux}{8uv}|_{(-3,0,0,5,4)} \\ &= \frac{x}{v}|_{(-3,0,0,5,4)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

[10] תרגול ב 24.11.2004

הערה באופן כללי בהתקיים תנאי המשפט מה שמחליף את

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial x_n}}$$

בנקודות החילוץ זו הנוסחה

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} = -\frac{det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_j} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}}{det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}}$$

או אם נכניס את הסימון

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial\left(F_1\ldots F_m\right)}{\partial\left(y_1\ldots y_m\right)}$$

אז בסביבה של $\overline{p},\overline{x}$

$$\mathbb{R}^{m\times n}\ni D_y = -\left(F_y\right)^{-1}\left(F_x\right)$$

תרגיל נתונה המערכת

$$\begin{aligned} xy^2+xzu+yv^2 &= 3\\ u^3yz+2xv-u^2v^2 &= 2\end{aligned}$$

1. הראו שהמערכת מגדירה u,v כפונקציות של (x,y,z) בסביבת $x=y=z=u=v=1$
2. נסמן ב

$$f(x,y,z) = \left(u(x,y,z),v(x,y,z)\right)$$

את ההעתקה המוגדרת בצורה סתומה ע"י מערכת המשוואות בסביבה של הנקודה הנתונה. מצאו את $dF(1,1,1)$

פתרון

1. עושים בדיקה ומוצאים שהנקודה מקיימת את המשוואות. נגדיר

$$G(s,t) = \begin{cases} G_1 = xy^2+xzu+yv^2-3 & =0\\ G_2 = u^3yz+2xv-u^2v^2-2 & =0\end{cases}$$

ונסמן $t=(x,y,z)\,,s=(u,v)$ רוצים s כפונקציה של t. נבדוק

$$\begin{aligned} G_s &= \begin{pmatrix} G_{1u} & G_{1v}\\ G_{2u} & G_{1v}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} xz & 2yv\\ 3u^2yz-2uv^2 & 2x-2u^2v\end{pmatrix}\\ \Rightarrow det\frac{\partial G}{\partial s}|_{(1,1,1,1,1)} &= \begin{vmatrix} 1 & -2\\ 1 & \end{vmatrix} = -2\neq 0\end{aligned}$$

ויש חילוץ מהמשפט.

2. נחשב

$$\begin{aligned} DF|_{(1,1,1)} &= \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{pmatrix} = D_s(t)\\ &= -G_s^{-1}G_t|_{(1,1,1,1,1)}\\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y^2+zu & 2xy+v^2 & xu\\ 2v & u^3z & u^3y\end{pmatrix}|_{(1,1,1,1,1)}\\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

תרגיל נגדיר תת-קבוצה $D = \left\{(a,b,c,d,e)\,|ax^4+bx^3+cx^2+dx+e;\exists x_i\in\mathbb{R}\right\}$ כלומר לכל נקודה שיש לה שורש ממשי.

1. הראו ש- $p = (1,2,-4,3,-2)$ נקודה פנימית של D
2. תנו נקודה ב-D שאינה פנימית.

פתרון

1. $x^4+2x^3-4x^2+3x-2$ אז $x=1$ פתרון, לפולינום הזה יש שורש ולכן $p\in D$. נגדיר

$$F:\mathbb{R}^6 \mapsto \mathbb{R}$$

ע"י

$$F(a,b,c,d,e,x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

אם נמצא חילוץ $x=f(a,b,c,d,e)$ בסביבה של p כך שבסביבה זו $F\equiv 0$, אז זו הסביבה המבוקשת של p.

$$\begin{aligned} F_x|_{(p,1)} &= 4ax^3+36x^2+2cx+d|_{(p,1)}\\ &= 4+6-8+3=5\neq 0\end{aligned}$$

מכיוון ש $F\in C^1\left(\mathbb{R}^6\right)$ כל תנאי המשפט מתקיימים ולכן יש החילוץ המבוקש והסביבה המבוקשת.

2. לפולינום x^2 יש שורש ולכן $(0,0,1,0,0) \in D$ עבור לכל n $x^2+\frac{1}{n}$ אין לו שורש ולכן הווקטורים $(0,0,1,0,\frac{1}{n})$

דיון לא פורמלי על משטחים

הגדרה (חלקית)[11] נאמר שקבוצה S נקראת משטח k ממדי חלק ממחלקה $c^{'}$ ב-$\mathbb{R}^n$ אם לכל $x \in S$, קיימת סביבה U, כך שהקבוצה $S \cap U$ ניתנת לרישום כגרף של העתקה מ-k משתנים ל $n-k$ המשתנים הנותרים (כאשר ההעתקה היא c^1)

$$\begin{aligned} G:\mathbb{R}^k &\mapsto \mathbb{R}^{n-k} \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto (y_{n-k+1},\dots,y_n) \end{aligned}$$

$$graph_G = \{(x_1,x_2,\dots,x_k,G(x_1,\dots,x_k))\}$$

משפט הפונקציות הסתומות מותן לנו כלי מספיק לזיהוי משטחים:
נניח שיש לנו $\phi \neq S \subset \mathbb{R}^n$ הנתונה ע"י מערכת של m משוואות

$$f = \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_k) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_k) \end{cases}$$

כאשר $F:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ היא c^1.
אז ממשפט הפונקציות הסתומות, נובע שאם לכל x

$$rank\left(Df|_x\right) = m$$

אז s משטח חלק c^1 מממד $n-m$

הסבר $rank\left(Df|_{x_0}\right) = m$ גורר קיים מינור $m \times m$ שאינו מתאפס. נניח בה"כ שהמינור מורכב מ-m העמודות האחרונות

$$\Rightarrow \frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(x_{n-m+1},\dots,x_n)}|_{x_0} \neq 0$$

ולכן המשפט נותן חילוץ c^1 בסביבה של x_0 ע"י $G:\mathbb{R}^{n-m} \mapsto \mathbb{R}^m$ המתאימה

$$G = \begin{cases} x_{n-m+1} = g_{n-m+1}(x_1,\dots,x_{n-m}) \\ \vdots \\ x_n = g_n(x_1,\dots,x_{n-m}) \end{cases}$$

כך ש

$$0 = F(x_1,\dots,x_{n-m},G(x_1,\dots,x_{n-m}))$$

[11] תרגול ב 30.11.2004

דוגמאות

1. האם המערכת מגדירה עקום c^1 בסביבת $(1,1,1)$

$$\begin{aligned} F &= \begin{cases} xy+yz+xz &= 3 \\ x^3+y^2+z^2 &= 3 \end{cases} \\ Df &= \begin{pmatrix} y+z & x+z & x+y \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix} \\ Df|_{(1,1,1)} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ rank\left(Df|_{(1,1,1)}\right) &= 2 \end{aligned}$$

כלומר F מגדירה עקום.

2. מקרה שבו תנאי הדרגה לא מתקיים.
$s = \{(x,y)\,|x^2-y^2=0\}$ ב-$(0,0)$
$DF|_{(0,0)} = (0,0)$

3. ראינו בפונקציות סתומות שתנאי הדרגה מספקי אך לא הכרחי

$$S = \{(x,y)\,|\,(x^3-y^3)=0\}$$

אז $Df|_{(0,0)} = (0,0)$ אבל כאן מתקבל עקום c^1 $y=x$

הגדרה (מרחב משיק) נאמר שגרף של פונ' $g(x)$ הוא משיק מסדר n לגרף של $f(x)$ בנק' x_0 אם

$$f(x)-g(x) = o\left(\|x-x_0\|^n\right)$$

הערה ראינו שעבור פונקציה $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ גזירה ב-x_0 הגרף של הפונ'

$$x_{n+1} = f(x_0)+Df|_{x_0}(x-x_0)$$

הוא משיק מסדר ראשון לגרף של $f(x)$ ב-x_0.
במקרה זה הגרף של f הוא משטח $\mathbb{R}^{n+1}$ בסביבה של $(x_0,f(x_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ והמישור המשיק לגרף בנקודה זו הוא כל ה- $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ המקיימים:

$$\begin{aligned} 0 &= -(x_{n+1}-f(x_0))+\nabla f|_{x,0}(x-x_0) \\ &= (f_{x_1}(x_0),f_{x_2}(x_0),\dots,f_{x_n}(x_0))\begin{pmatrix} x_1-x_0 \\ x_2-x_{0_2} \\ \vdots \\ x_n-x_{0_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומכאן הסקנו ש $(\nabla f(x_0),-1)$ הוא נורמל לגרף (משטח) בנק' (x_0,y_0)

מסקנה בתנאי משפט הפונקציות הסתומות. אם נניח ש $f(x_1,\dots,x_n)$ נתונה בצורה הסתומה ע"י

$$(x_{n+1}=f)\ \ F(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}) = 0 \quad (4)$$

בסביבה של $(x_0,f(x_0)) = \overline{x}\in\mathbb{R}^{n+1}$ אז

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}|_{x_0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}}|_{(x_0,f(x_0))}$$

ולכן המישור המשיק ב-$(x_0,f(x_0))$ למשטח S הנותן ע"י (4) הוא כל ה-$x\in\mathbb{R}^{n+1}$ כך ש

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\frac{\partial F_{x_1}}{\partial x_{n+1}}(x_0),\dots,-\frac{\partial F_{x_n}}{\partial x_{n+1}}(x_0),-1\right)\cdot(x-\overline{x_0}) \\ &= \left(\frac{\partial F_{x_1}}{\partial x_{n+1}}(x_0),\dots,\frac{\partial F_{x_n}}{\partial x_{n+1}}(x_0),\frac{\partial F_{x_{n+1}}}{\partial x_{n+1}}(x_0)\right)\cdot(x-\overline{x_0}) \\ &= \nabla F(x_0)\cdot(x-\overline{x_0}) \end{aligned}$$

זה נכון לכל חילוץ ולכן למשטח שמוגדר ע"י F, ∇F הנורמל.

מסקנה אם חוזרים על אותם הטיעונים אז בהנתן

$$f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m; f=\begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}$$

ראינו שהגרף של הפונקציה

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = g(x_1,\dots,x_n) = f(x_0)+Df|_{x_0}(x-x_0)$$

הוא משיק מסדר ראשון לגרף של f ב-$(x_0,f(x_0))$

- אם $f = \begin{pmatrix} f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}$ נתונה בצורה הסתומה, ע"י

$$F = \begin{cases} F_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) \\ \vdots \\ F_m(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)\end{cases} \quad (5)$$

בסביבה של

$$(x_0,\dots,x_{0,n},y_0,\dots,y_{0m}) = (x_0,y_0) = \tilde{x_0}$$

אז המרחב המשיק ל-S הנתונה ע"י (5) הוא אוסף כל ה-

$$(x_1,\dots,x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m}$$

המקיימים

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1}\\ \vdots\\ x_{n+m}\end{pmatrix} = f(x_0)+Df|_{x_o}(x-x_0)$$

אם נתרגם את $df|_{x_0}$ ע"י $-\left(F_y^{-1}\right)\cdot(F_x)|_{(x_0,y_0)}$

$$\Rightarrow 0 = -\begin{pmatrix} x_{n+1}-y_{01}\\ \\ x_{n+m}-y_{01}\end{pmatrix} - -\left(F_y^{-1}\right)\cdot(F_x)|_{\tilde{x_0}}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow 0 = F_y|_{\tilde{x_0}}\begin{pmatrix} x_{n+1}-y_{01}\\ \\ x_{n+m}-y_{01}\end{pmatrix} + F_x|_{\tilde{x}}(x-x_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\tilde{x_0})(x_1-x_0)+\dots+\frac{\partial F_1}{x_n}(\tilde{x_0})(x_n-x_{0n})+\frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x_0})(x_{n+1}-x_{0n+1})+\dots \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\tilde{x_0})(x_1-x_0)+\dots+\frac{\partial F_m}{x_n}(\tilde{x_0})(x_n-x_{0m})+\frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}(\tilde{x_0})(x_{n+1}-x_{0n+1})+\dots\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = \begin{pmatrix} \nabla F_1(\tilde{x_0})\\ \vdots\\ \nabla F_m(\tilde{x_0})\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-x_{0_1}\\ \vdots\\ x_{n+m}-x_{0_{n+m}}\end{pmatrix}$$

זו משוואת המרחב המשיק ל-S ב-$(\tilde{x_0})$ מכיבן של- $Df|_{\tilde{x_0}}$ דרגה m (המינור $F_y|_{\tilde{x_0}}$ שונה מ-0) אז מקבלים מרחב משיק מממד n. ומסמנים אותו ב-T ($Tangent-plane$) ומרחב ניצב מממד m, ומסמנים אותו ב- $N_{\tilde{x_0}}$ הנפרש ע"י הווקטורים

$$\nabla F_1(\tilde{x_0}),\dots,\nabla F_m(\tilde{x_0})$$

כך ש- $N_{\tilde{x_0}}$ ו-$T_{\tilde{x_0}}$ משלימים א"ג ל-$\mathbb{R}^{n+m}$

(כל משוואה $0=\nabla F_i|_{\tilde{x_0}}(x-\tilde{x_0})$ נותנת על מישור ב-$\mathbb{R}^{n+m}$, וחיתוך של m כאלה נותן מרחב מממד n.

הערות

1. ראינו שבהנתן $\gamma:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^{n+m}$ המקיימת $F(\gamma(t))=0$ אז

$$\begin{pmatrix} \nabla F_1\\ \vdots\\ \nabla F_m\end{pmatrix}\cdot\gamma = \vec{O}$$

כלומר לכל γ כנ"ל חלק. $\dot{\gamma}$ משיק ל-T. ניתן להראות בתנאי הפונ' הסתומות שאוסף כל ה-γ הנ"ל הוא בדיוק T. כלומר אוסף המהירויות המחושבות ב-t_0 כך ש $\gamma(t_0)=\tilde{x_0}$ פורש (למעשה שווה ל-) $T_{\tilde{x_0}}$

2. כאשר תנאי המשפט אינם מתקיימים, אוסף המהירויות הנ"ל אינו בהכרח תת מרחב.

תרגיל

1. עבור אליפסואיד $\frac{x_1^2}{\alpha_1^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{\alpha_n^2}=1$ ב-$\mathbb{R}^n$ מצאנו נקודה, כך שהמישור המשיק בה חותך את הצירים המרחקים שווים מהראשית
2. הוכיחו שלכל בחירה של פרמטרים $a,b\neq 0$. המשטחים $x^2+y^2+z^2=2ax$ ו
$$x^2+y^2+z^2 = 2by$$
מאונכים אחד לשני.

פתרון נשים לב כי

$$\begin{aligned}(x-a)^2+y^2+z^2 &= a^2\\ x^2+(y-b)^2+z^2 &= b^2\end{aligned}$$

אז עבור נקודה $\vec{O}$ נקודת חיתוך. נתונה

$$\begin{aligned}F &= x^2+y^2+z^2-2ax=0\\ G &= x^2+y^2+z^2-2by=0\end{aligned}$$

ונניח ש $\varphi_0=(x_0,y_0,z_0)$ מקיימת את F,G אז הנורמלים למישורים המשיקים הם $G,F\in p_0$

$$\begin{aligned}\nabla F|_{p_0} &= (2(x_0-a),2y_0,2z_0)\\ \nabla G|_{p_0} &= (2x_0,2(y_0-b),2z_0)\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\nabla f|_{p_0}\cdot\nabla G|_{p_0} &= 4x_0^2-4ax_0+2y_0+2z_0\\ &\quad +4x_0^2-4ay_0+2y_0+2z_0=0\end{aligned}$$

תרגיל בוכיחו שהמערכת $\begin{cases}x^2-y^2+z^2 &=1\\ xy+xz &=2\end{cases}$ מגדיר עקום c^1 בסביבת $(1,1,1)$ שמשיק בנק' זו למשטח

$$H:0 = xyz-x^2-6y+6$$

$$\nabla H|_{(1,1,1)} = (yz-2x,xz-6,xy)=(-1,-5,-1)$$

$$Df|_{(1,1,1)}\begin{pmatrix}\nabla F_1\\ \nabla F_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & -2y & 2z\\ y+z & x & x\end{pmatrix}|_{(1,1,1)}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

לכן $r(Df|_{1,1,1})=2$ ולכן $F\in c^1$ מגדירה עקום c^1 בסביבת $(1,1,1)$. המהירות של העקום בנק-$(1,1,1)$ ניצבת ל-$\nabla F_1,\nabla F_2$, בנקודה ולכן

$$V\|(-2,2,2)\times(2,1,1) = (-4,2,6)$$

ואכן

$$(-4,2,6)\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ 1\end{pmatrix} = 4-10+6=0$$

נשים לב כי

$$det\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}=det\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-4\neq 0$$

יש חילוצים $z=z(x),y=y(x)$ בנק'

$$\begin{aligned}\Rightarrow V &= \left(1,y'(1),z'(1)\right)\\ 0 &= \frac{d}{dx}F_1(x,y(x),z(x))|_{(1,1,1)}\\ &= 2-2y'(1)+2z'(1)\\ 0 &= \frac{d}{dx}F_2(x,y(x),z(x))|_{(1,1,1)}\\ &= 2+y'(1)+z'(1)\\ \Rightarrow y'(1) &= -\frac{1}{2}\\ z'(1) &= -\frac{3}{2}\\ \Rightarrow\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ 1\end{pmatrix} &= -1+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

תרגיל אפינו את כל הפונ' $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ המקיימות

$$\begin{aligned}\|f(y)-f(x)\| &\leq k\|y-x\|^2\\ k &\geq 0\end{aligned}$$

תרגיל (הכללה[12] של משפט רול תהי Ω חסומה ופתוחה ב-$\mathbb{R}^n$, $f:\overline{\Omega}\mapsto\mathbb{R}$ רציפה ובעלת נגזרות רציפות ב-Ω, ובעלת נגזרות

[12] הרצאה ב 14.12.2004

חלקיות ב-Ω. אם f קבוע על שפת Ω, אז קיימת נקודה $p_0 \in \Omega$ כל ש

$$\nabla f|_{p_0} = 0$$

פתרון מקייבן ש Ω חסומה אז $\overline{\Omega}$ קומפקטית. ולכן f מקבלת שם

$$m = \min_{x \in \overline{\Omega}} f(x)$$
$$M = \max_{x \in \overline{\Omega}} f(x)$$

1. אם $m = M \Rightarrow f = const \Rightarrow \forall p \in \Omega; \nabla f|_p = 0$
2. אם $n \neq m$ אחד מהם מתקבל בנקודה שלהם ובנקודה זו $\nabla f|_{p_0} = 0$

כופלי לגרנז'

הגדרה תהי $G : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $m < n$ פונ' c^1 בקבוצה הפתוחה D. תהי $E \subset D$ קבוצה סגורה כך ש $G|_E \equiv 0$. נאמר ש-$p^* \in E$, היא נקודת קצה של E, אם בכל סביבה של p^* (או בכל כדור $(B_n(p^*, r)$ יש נקודה, $p \notin E$ כך ש- $G(p) = 0$.

משפט תהי D פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$, $G : D \mapsto \mathbb{R}^m$, $m < n$, העתקה $C^1(D)$. תהי $f : D \mapsto \mathbb{R}$ ב-$C^1(D)$, ותהי $E \subset D$ סגורה כך ש $G|_E \equiv 0$, ונניח ש-$p^* \in E$ היא נק' אקסטרמום של f (מינ'/מקס) אז

1. או ש-p^* נק' קיצון של E
2. או שההעתקה $T : D \mapsto \mathbb{R}^{m+1}$ המוגדרת ע"י $T(p) = (G(p), f(p))$ בעלת נגזרת עם דרגה $r < m+1$ ב-p^*

(כלומר $\nabla f|_{p^*}$ תלוי ליניארית ב-$\nabla g_1|_{p_*}, \ldots, \nabla g_m|_{p_*}$ או $\nabla f|_{p_*}$ שייך למרחב הניצב למשטח (אם מוגדר) ע"י $G(x) = 0$ ב-p_*)

דוגמה נתונה $f \neq 0$, $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ליניארית, מצאו מקס' ומינימום של f על $\overline{B_n}(0,1)$

פתרון

בלי כופלי לגרנז' f ליניארית ושונה מ-0, אז בכרח קיים $0 \neq V \in \mathbb{R}^n$ כך ש

$$f(x) = V \cdot X$$

לכל x. אז

$$\|x\| \leq 1; -\|V\| \leq V \cdot X \leq \|V\|$$

והמקס' והמינ' ותקבלו בנקודה $x = \pm \frac{V}{\|V\|}$

אם כופלי לגרנז' השפה של הכדור

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 1 = 0$$

מחפשים $\nabla f|_x = 0$ עבור $x \in B_n(0,1)$ עבור $\nabla f = V \neq 0$ כלומר אין נקודות חשודות בתוך הכדור. על השפה

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$
$$= 2\lambda x$$
$$x = \frac{V}{2\lambda}$$

ואם מציבים באילוץ

$$x = \pm \frac{V}{\|V\|}$$

הערות

1. כדי שהמשפט יתן מידע על בעיה כדאי להקפיד על $rank(g) = m$ לפני שרושמים $\nabla f = \sum \lambda_i \nabla g_i$
2. כאשר חוקרים את d נח יותר לחקור את d^2 ומותר כי

דוגמה מצאו נקודה קרובה ביותר על $g(x,y) = (x-y)^2 = 0$ לנקודה $(-1,1)$ כאשר $-1 \leq x \leq 2$

נסיון לפיתרון הבעיה היא למצוא מינימום מקסימום של

$$d^2((x,y),(-1,1)) = f = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

תחת $g = 0$

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$
$$\begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2(x-y) \\ -2(x-y) \end{pmatrix}$$

אז

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow x = -1, y = 1$$

כלומר אין נקודות חשודות על האילוץ. נציב קצוות אז

$$\begin{aligned} x_1 = 2, y_1 = 2; f(x_1, y_1) &= 10 \\ x_2 = -1, y_2 = -1; f(x_2, y_2) &= 4 \end{aligned}$$

וכל זה אינו נכון כי $f(0,0) = 2$.

אבל לדוגמה האילוץ $g = x - y = 0$ אז $\nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ אזי

$$\begin{pmatrix} 2(x+1) \\ 2(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow (0,0)$$

תרגיל נתונה אליפסה ב-$\mathbb{R}^3$ ע"י

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z) &= 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ g_2(x,y,z) &= x + y + z = 0 \end{aligned}$$

מצאו על האליפסה נקודות קרובות ורחוקות ביותר מציר y.

פתרון נחקור את המרחק בריבוע מציר y

$$f(x,y,z) = x^2 + z^2$$

תחת $g_1 = g_2 = 0$

$$Dg = \begin{pmatrix} 4x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

המינורים

$$\begin{vmatrix} 2y & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y, \begin{vmatrix} 4x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4x$$

מתאפסים יחד נק ב-$(0,0)$ שלא מקיים g_1 כלומר דרגה מלאה לאילוץ. ולכן נדרוש

$$\begin{aligned} \nabla f &= a\nabla g_1 + b\nabla g_2 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4ax + b \\ 2ay + b \\ b \end{pmatrix} \\ \Rightarrow -2x + 4xa + b &= 0 \\ 2ya + b &= 0 \\ -2z + b &= 0 \end{aligned}$$

כלומר $(1,a,b)$ פיתרון של

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2x & 4x & 1 \\ 0 & 2y & 1 \\ -2z & 0 & 1 \end{pmatrix} x &= 0 \\ \Rightarrow det \begin{pmatrix} -2x & 4x & 1 \\ 0 & 2y & 1 \\ -2z & 0 & 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow xy + z(2x - y) &= 0 \end{aligned}$$

נוסיף את משוואות האילוץ ונקבל פיתרון. כלומר את הנקודות

$$\begin{aligned} p &= \left(1, \sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\right), q = \left(1, -\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}\right) \\ r &= \left(-1, \sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right), s = \left(-1, -\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

תרגול ב 28.12.2004

הערה $\langle H_{x_0} v, v \rangle$ הנגזרת השניה של f.

5 חשבון אינטגרלי

הערה $f(x,y,z)$ נתון תחום בו $\varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y)$ אז

$$\iint_{V_{xy}} dxdy \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\, dz\right]$$

ניתן לחישוב.

תרגיל

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} &= I \\ V &= \{(x,y,z) \,|\, 0 \le x, y, z, x+y+z \le 1\} \end{aligned}$$

לכל x, y קבועים $0 \le z \le 1 - x - y$. אחרי אינטגרציה נקבל

$$\iint_{V_{x,y}} dxdy \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right] = I$$

לכל x קבוע $0 \le y \le 1 - x$. סה"כ

$$\begin{aligned} I &= \iint_{V_{x,y}} dxdy \left[\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\right] \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{V_{x,y}} dxdy \left(\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right)_0^{1-x-y} \\ &= \frac{1}{2} \iint_{V_{x,y}} dxdy \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right) dy \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int dx\left(-\frac{1}{1+x+y}-\frac{1}{4}y\right)_0^{1-x}\\
&= \frac{1}{2}\int dx\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)+\frac{1}{1+x}\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left(-\frac{3}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{1+x}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{8}+\ln(1+x)\right)_0^1\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{8}+\ln(2)\right)
\end{aligned}
$$

תרגיל חשבו את נפח הגוף החסום בין הפר-בולואידים

$$z=x^2+y^2, 2z=12-x^2-y^2$$

פתרון עקום חיתוך הוא

$$
\begin{aligned}
3z &= 12\\
z &= 4\\
\Rightarrow x^2+y^2 &= 4
\end{aligned}
$$

ולכן נגדיר $V_{x,y}=(x^2+y^2\leq 4)$ לכל x,y קבועים

$$x^2+y^2\leq z\leq\frac{12-x^2-y^2}{2}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \iint dxdy\int_{x^2+y^2}^{\frac{12-x^2-y^2}{2}}dz\\
&= \int_{-2}^{2}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(6-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)dy\\
&= 4\int_0^2 dx\left(6y-\frac{3}{2}x^2y-\frac{y^3}{2}\right)_0^{\sqrt{4-x^2}}\\
&= 4\int_0^2 y\left(6-\frac{3}{2}x^2-\frac{y^2}{2}\right)_0^{\sqrt{4-x^2}}dx\\
&= 4\int_0^2\sqrt{4-x^2}\left(4-x^2\right)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_0^2\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx\\
(x=2\sin t)\Rightarrow &= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt\\
&= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt\\
&= 2^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt-2^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 tdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\right)dt-2^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt\\
&= 2^4\pi-2^2\pi\\
&= 12\pi
\end{aligned}
$$

דרך שונה אם ציר סיבוב (או קואורדינטות גליליות)

תרגיל (לא קשור) אם יש N מסות m_i בנקודות ברחב $\vec{r_i}$ אז מרכז המסה של המערכת הוא

$$\vec{R_{CM}}=\frac{\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{N}m_i}$$

$$X_{cm}=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}$$

ואם נתונה התפלגות מסה $\rho(x,y,z)$ מסה ליחידת נפח. אז

$$X_{cm}=\frac{\iiint_V x\rho(x,y,z)}{\iiint_V\rho(x,y,z)}dv$$

דוגמה מהו $\vec{R}_{cm}$ עבור V מהשאלה הראשונה.

$$V=\{(x,y,z)\,|0\leq x,y,z,x+y+z\leq 1\}$$

כאשר $\rho = const$

$$\begin{aligned}
\iiint_V dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y-x} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(1-y-x\right) \\
&= \int_0^1 dx \left(1-x-\frac{\left(1-x\right)^2}{2} - x\left(1-x\right)\right) = \frac{1}{6} \\
\iiint_V xdxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-y-x} xdz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dyx\left(1-y-x\right) \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(y-y^2-xy\right) dy \\
&= \int_0^1 dx \left(\frac{y^2\left(1-x\right)}{2} - \frac{y^3}{3}\right)_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 dx \left(1-x\right)^2 \left(\frac{5x}{6} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

תרגיל חשבו את האינטגרל

$$I = \iiint_V x^2 dxdydz$$

$$V = \left\{0 \le z \le 2, y \ge 0, \frac{1}{3}x \le z \le \frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y^2 \le z \le 2y^2\right\}$$

יש לנו

$$\begin{aligned}
2z &\le x \le 3z \\
\sqrt{\frac{z}{2}} &\le y \le \sqrt{2z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_V x^2 dxdydz \\
&= \int_0^2 dz \int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{2z}} dy \int_{2z}^{3z} x^2 dx \\
\ldots &= \frac{608}{27}
\end{aligned}$$

תרגיל נתונה $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (נניח שרציפה) הביאו את האינטגרל

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f\left(z\right) dz$$

לאינטגרל על משתנה יחיד.

פתרון

$$\begin{aligned}
0 &\le z \le x+y \\
0 &\le y \le 1-x \\
0 &\le x \le 1
\end{aligned}$$

עבור z קבוע. $z \le x+y \le 1$ נרצה לקבל אינטגרל

$$I = \iiint_{dV} dzdxdy$$

נחלק לשני חלקים. עבור z, y קבועים אם $z \le y$ אז

$$0 \le x \le 1-y$$

אם $z < y$ אז

$$z-y \le x \le 1-y$$

סה"כ

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f\left(z\right) dz \left(\int_0^z \left(\int_{z-y}^{1-y} dx\right) dy + \int_z^1 \left(\int_0^{1-y} dx\right) dy\right) \\
&= \int_0^1 f\left(z\right) dz \left(\int_0^z \left(1-z\right) dy + \int_z^1 \left(1-y\right) dy\right) \\
&= \int_0^1 f\left(z\right) dz \left(-z^2 + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

תרגיל כמה חרוטים V המקבילים (ציר הסימטריה מקביל) לציר z ישנם המקיימים

$$\begin{aligned}
\iiint_V zdxdydz &= c \\
\iiint_V zdxdydz &= b \\
\iiint_V zdxdydz &= a
\end{aligned}$$

שנפחם V_0? תנו לפחות אחד.

פתרון יש אין-סוף (תמיד ניתן לייצר חרוט כך שהמרכז מסה שלו והנפח שלו V_0.

תרגיל חשבו[13] את הנפח החסום ע"י $z \le 0$

$$\begin{aligned}
z + x^2 + y^2 + 2x + 1 &= 0 \\
x^2 + 2x + y^2 &= 0
\end{aligned}$$

[13] הרצאה ב 4.1.2005

פתרון

$$z = -(x+1)^2 - y^2$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

נחליף לקואורדינטות גליליות

$$x+1 = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$
$$|J| = r$$

התחום

$$0 \le r \le 1$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$-r^2 \le z \le 0$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 r\int_{-r^2}^0 dzdr\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 r^3dr\right]d\theta$$
$$= 2\pi\frac{r^4}{4} = \frac{\pi}{2}$$

תרגיל חשבו

$$I = \iiint \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

כאשר v חסום ע"י $x=1, x=0, x^2=y^2+z^2$

פתרון נחשב את שטח בסיס הקונוס.

$$(z=r\sin\theta, y=r\cos\theta) \Rightarrow s(x) = \int_0^1 dx\iint\frac{xdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$= \int_0^1 dx\iint\frac{xdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$= \int_0^1 xdx\iint\frac{rd\theta dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$
$$= 2\pi\int_0^1 xdx\int_0^x\frac{rdr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$
$$= 2\pi\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+r^2}\right)_{r=0}^x dx$$
$$= 2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{2}-x^2dx$$
$$= \frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)$$

תרגיל חשבו

$$\iiint_V\left(x^2-y^2\right)dxdydz$$

$$v = \left\{1-x\le y\le x, 1-x\le y\le 2-x, 1-x^2+y^2\le z\le y^2-x^2+2x\right\}$$

$$= \iint_D\left(x^2-y^2\right)dxdy\int_{1-x^2-y^2}^{y^2-x^2+2x}dz = \iint_D\left(x^2-y^2\right)(2x-1)\,xdy$$

נמצא את D:

$$D = \{-1\le y-x\le 0, 1\le y+x\le 2\}$$

נציב $v=y+x, u=y-x$

$$\left|J^{-1}\right| = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

סה"כ

$$I = \iint_{\substack{1\le v\le 2\\ -1\le u\le 0}}\frac{1}{2}uvdudv$$

תרגיל חשבו את הנפח של התחום

$$v = \left\{x^2+y^2+z^2\le 2az, x^2+y^2\le 3z^2\right\}$$

פתרון

$$x = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$x = r\cos\varphi$$
$$J = r^2\sin\varphi$$

$$V = \left\{r\le 2a\cos\varphi, r^2\sin^2\varphi\le 3r^2\cos^2\varphi \Rightarrow \tan^2\varphi\le 3\Rightarrow 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\iiint_v r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\sin\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^2dr$$
$$= \frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}8\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi$$
$$= \frac{16}{3}\pi a^3\frac{1}{4}\left(-\cos^4\varphi\right)|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

הערות תנאים הכרחיים ומספיקים שתחום הוא עיגול יחידה

1. קמורה
2. קומפקטית
3. מכילה את 0
4. סימטרית

תרגיל כאשר הקבוצה קמורה זה נקרה אסטר-ואיד. חשבו את הנפח.

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}} = 1$$

פתרון

$$\begin{aligned} u^3 &= x \\ v^3 &= y \\ w^3 &= z \end{aligned}$$

$$J = \left|\begin{array}{ccc} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{array}\right| = 27u^2v^2z^2$$

אז

$$\begin{aligned} \iiint_V dxdydz &= \iiint_{u^2+v^2+w^2} 27u^2v^2z^2 \\ u &= r\sin\varphi\cos\theta \\ v &= r\sin\varphi\sin\theta \\ w &= r\cos\varphi \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} &= 27\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 r^8\sin^5\varphi\cos^2\theta\sin^2\theta\cos^2\varphi d \\ &= 27\int_0^{\pi}\sin^5\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^8 dr \\ &= 3\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\varphi\right)^2\cos^2\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta d\theta \\ (\cos\varphi = t)\Rightarrow &= 3\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^2 t^2 dt\int_0^{2\pi}\frac{1}{8}\left(1-\cos 4\theta\right)d\theta \\ &= \frac{3\pi}{4}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^2 t^2 dt \\ &= \frac{4\pi}{35} \end{aligned}$$

תרגיל חשבו את הנפחים

$$\begin{aligned} V_1 &= |x+y|+|y+z|+|x+z| \le a \\ V_2 &= (2x+y+z)^2+(x+2y+z)^2+(x+y+2z)^2 \le 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \left|\frac{\partial\left(x+y,y+z,x+z\right)}{\partial\left(x,y,z\right)}\right|\frac{a^3}{6}8 \\ &= 2\frac{a^3}{6}8 \\ V_2 &= \left|\frac{\partial\left(2x+y+z,x+2y+z,x+y+2z\right)}{\partial\left(x,y,z\right)}\right|\frac{a^3}{6}8 \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

תרגיל נתונים V_1,V_2. V_1 חסום ע"י

$$0\le z, x+y+z\le 1, x^2+y^2\le\frac{1}{4}$$

V_2 חסום ע"י

$$0\le z, z\le 1+x^3, x^2+y^2\le\frac{1}{4}$$

למי מהם נפח גדול יותר.

פתרון שניהם שווים. שטח בסיס $\frac{\pi}{4}$ גורר נפח שווה ל-$\frac{\pi}{4}$.

תרגיל מהו[14] הנפח של הגוף החסום ע"י $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3 = gxyz$ נעבור לקואורדינטות כדוריות

$$\begin{aligned} r^6 &= 9r^3\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \\ r^3 &= 9\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi \end{aligned}$$

זה קורה עבור $xyz>0$ כלומר עבור 4 שמיניות המרחב. וסמטרי לכל אחד מהרבעים הנ"ל לכן מספיק לחשב לאחד מהרבעים הנ"ל $x,y,z>0$ ולכפול ב-4. לכן $0\le\theta,\varphi\le\frac{\pi}{2}$ ואז

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^{(9\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi)^{\frac{1}{3}}} r^2 dr \\ &= \frac{9}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta\sin\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\sin\varphi\sin\varphi\cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{9}{3}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{4}\sin^4\varphi\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{9}{3}\left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}\sin^4\varphi\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

[14] תירגול 5.1.2005

תרגיל

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\iint_{x,y\geq 0} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-r^2}rdrd\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdr\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)|_0^\infty\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\frac{\pi}{4}\left(e^{-r^2}\right)|_\infty^0\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

תרגיל בית להכיח שהשטח $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$

$$x + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq h$$

הוא $\frac{h^n}{n!}$

תרגיל חישוב נפח כדור ברדיוס R ב- $\mathbb{R}^n$

פתרון

$$B_5(R) = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq R^2\right\}$$

נשים לב כי

$$x_1 = r\cos\theta\sin\varphi$$
$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$x_3 = r\cos\varphi$$

נקרא ליעקובין שלהם $|J_{123}| = r^2\sin\varphi$

$$x_4 = \rho\cos\gamma$$
$$x_5 = \rho\sin\gamma$$

$$|J_{4,5}| = \rho$$

אז היעקוביען החדש

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,2,3} & 0 \\ 0 & J_{4,5}\end{pmatrix}$$
$$|J| = |J_{1,2,3}|\,|J_{4,5}|$$
$$= r^2\rho\sin\varphi$$

הנקודות מקיימות $r^2+\rho^2 \leq R$ לכן

$$V = \int_0^{2\pi}d\gamma\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\iint_{r^2+\rho^2\leq R^2} r^2\rho drd\rho$$
$$= 8\pi^2\iint_{r^2+\rho^2\leq R^2} r^2\rho drd\rho$$
$$(r=\tau\sin t, \rho=\tau\cos t) \Rightarrow \quad = 8\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt\int_0^{R^2}\tau^4 d\tau$$
$$= 8\pi^2\frac{1}{3}\left(\sin^3 t\right)|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^5}{5}$$
$$= \frac{8}{15}\pi^2 R^5$$

תרגיל B כדור היחידה ב-$\mathbb{R}^3$

1. חשבו את האינטגרל, על פונקציה $\iiint_B \|\vec{r}\|^2\,dxdydz$
2. חשבו את

$$\iiint_B x^2dxdydz, \iiint_B xydxdydz, \iiint xyzdxdydz$$

פתרון

.1

$$\int_0^\pi\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^4dr = 4\pi\left(\frac{r^5}{5}\right)_0^1 = \frac{4\pi}{5}$$

.2

(א) $\frac{4\pi}{15}$

(ב) לכל z קבוע $0 \leq x^2+y^2 \leq 1-z^2$ לכל רביע צמוד xy הפוכה ולכן 0

(ג) פונקציה אנטי-סימטרית על תחום סימטרי ולכן 0. אם נחתוך את הכדור במישור שעובר דרך המרכז את הקבוצה בצד I היא בדיוק מינוס של הקבוצה בצד II.

תרגיל נתונה מטריצה $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ חשבו את

$$\iiint_B \langle Ax, x\rangle\,dxdydz$$

פתרון

$$\begin{aligned} &= \iiint \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_jdx_1dx_2dx_3 \\ &= \sum_{i=1}^{3}\iiint_B a_{ii}x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{3} \iiint a_{i,j}x_ix_j \\ &= \frac{4\pi}{5}trA \end{aligned}$$

פרמטריזציה של עקום

תרגיל נתון[15] מעגל התגלגל לאורך ציר x. מה הפרמטריזציה של המסלול אותו עושה נקודה הנוגעת בתחילה בראשית עד הנגיעה הבאה שלה בקרקע.

פתרון ניקח פרמטר θ שהיא זווית הסיבוב של הגלגל. אז

$$\begin{aligned} x &= R\theta - R\sin\theta \\ y &= R - R\cos\theta \\ \vec{\gamma}(\theta) &= R(\theta-\sin\theta,\cos\theta) \end{aligned}$$

הוא הנקודה הרצויה.

תרגיל נתון טורוס אם מרכז בראשית סימטרי ל z בעל רדיוסים ראשים a, A.

פתרון נקבע שני זוויות β, α כאשר β הזוית של המעגל הראשי, α הזוית בתוך המעגל הגדול

$$\begin{aligned} x &= (A+\cos\alpha)\cos\beta \\ y &= (A+\cos\alpha)\sin\beta \\ z &= a\sin\alpha \\ S(\alpha,\beta) &= (x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta), z(\alpha,\beta)) \end{aligned}$$

תרגיל מצאו פרמטריזציה של טבעת מביוס אם עובי 2 ורדיוס ראשי θ

פתרון הזוית של הסיבוב של הטבעת היא חצי מזווית הטבעת. נעביר $r = [-1,1], \theta \in [0,2\pi]$ על עובי הטבעת.

$$\begin{aligned} x &= \left(A + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y &= \left(A + r\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ z &= r\cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

[15] תרגול ב 11.1.2005

תזכורת עבור עקום $\vec{\gamma}(t)$ ומהירות $\vec{v}(t)$ אז

$$|d\vec{r}| = |\vec{v}|\,dt$$

אז האינטגרל המסלולי מסוג ראשון

$$\int_t f(\gamma(t))\,|\vec{v}|\,dt$$

תרגיל חשב את אורך העקום שמתקבל ממעגל שמסתובב (בתרגיל קודם)

פתרון

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (Rt - R\sin t, R - R\cos t) \\ v(t) &= (R - R\cos t, R\sin t) \\ \ell &= \int_0^{2\pi}\|\vec{v}\|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2 - 2R^2\cos t + R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}dt \\ &= \sqrt{2}R\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\ &= 2R\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt \\ &= 2R\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt \\ &= 8R \end{aligned}$$

הגדרה אינטגרל קווי מסוג שני נתון העתק $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ ועקום $\gamma(t)$.

$$\begin{aligned} \int_t \vec{f}\cdot d\vec{r} &= \int_t \vec{f}(\gamma(t))\cdot\vec{v}(t)\,dt \\ &= \int_t \left|\vec{f}\right| |\vec{v}|\cos\theta(t)\,dt \end{aligned}$$

דוגמה חשבו את האינטגרל של $\vec{f}(x,y,z) = (x,y,z)$ לאורך העקום הקודם.

פתרון

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (Rt - R\sin t, R - R\cos t, 0) \\ v(t) &= (R - R\cos t, R\sin t, 0) \\ \vec{f}(\vec{\gamma}(t)) &= \vec{\gamma}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \vec{\gamma}(t)\cdot\vec{v}(t)\,dt &= \int_0^{2\pi} \left(R^2(t-\sin\theta)(1-\cos\theta)+R^2(1-\cos t\right. \\
&= R^2\int_0^{2\pi} t(1-\cos t)\,dt \\
&= R^2\left[\frac{(2\pi)^2}{2}-\int_0^{2\pi} t\cos t dt\right] \\
&= R^2\left[2\pi^2-0\right] \\
&= 2\pi^2R^2
\end{aligned}$$

נשים לב כי האינטגרנד $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\gamma(t)\|^2$ ולכן

$$\frac{1}{2}\|\gamma(2\pi)\|^2 = 2\pi^2R^2$$

הגדרה אינטגרל משטחי מסוג ראשון

$$\begin{aligned}
\vec{S}(u,v) &= (s_x,s_y,s_z) \\
\vec{s_u} &= (s_{x_u},s_{y_u},s_{z_u}) \\
\vec{s_u}\times\vec{s_v} &\perp S
\end{aligned}$$

אז אינטגרל משטחי מסוג ראשון

$$\iint f(\vec{s}(u,v))\left\|\vec{N}(\vec{s_u}\times\vec{s_v})\right\|dudv = I$$

דוגמה פרמטריזציה לספירה

$$\begin{aligned}
S(\theta,\varphi) &= (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi) \\
S_\theta &= (-R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, 0) \\
S_\varphi &= (R\cos\theta\cos\varphi, R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\varphi) \\
S_\theta\times S_\varphi &= \left(R^2\cos\theta\sin^2\varphi, R\sin\theta\sin^2\varphi, R^2\sin\varphi\cos\theta\right) \\
&= R^2\sin\varphi(\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\varphi)
\end{aligned}$$

הגדרה אינטגרל[16] משטחי מסוג שני. נתונה העתקה חח"ע

$$f:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$$

אז האינטגרל מוגדר

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{S} &= \iint_S \vec{f}\cdot\vec{S_u}\times\vec{S_v}dudv \\
&= \iint_S \left\|\vec{f}\right\|\cos\theta(S)\left\|d\vec{S}\right\| \\
&= \iint_S \vec{f}\cdot\hat{n}ds
\end{aligned}$$

[16] הרצאה ב 12.1.2005

אם נסמן

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

עבור $u,v\in D\subset\mathbb{R}^2$ ונסמן

$$\vec{f} = (P,Q,R)$$

ואז

$$I = \iint_{u,v\in D}\left[p\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}+Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}+R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]dudv$$

דוגמה חשבו את השטף של השדה

$$\vec{f}(x,y,z) = (x,y,0)$$

דרך ספירה ברדיוס R עם מרכז בראשית.

פתרון $\left|\vec{ds}\right| = R^2\sin\varphi$ כלומר

$$\begin{aligned}
\vec{f}\cdot\hat{n} &= \sqrt{x^2+y^2}\sin\varphi \\
&= R\sin^2\varphi
\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}
& \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\int_0^\pi R\sin^2\varphi R^2\sin\theta d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^\pi R\sin^2\varphi R^2\sin\varphi d\varphi \\
&= 2\pi R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi \\
&= 2\pi R^3\left[\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi - \int_0^\pi \cos^2\sin\varphi d\varphi\right] \\
&= 2\pi R^3\left[2-\frac{2}{3}\right] \\
&= 2\frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

אם מכפלה משולשת

$$\vec{f}|_s = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, 0)$$

וגם

$$\begin{aligned}
\vec{N} &= \vec{S_v}\times\vec{S_u} = \left(R^2\cos\theta\sin^2\varphi, R^2\sin\theta\sin^2\varphi, R^2\cos\varphi\sin\varphi\right) \\
\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\pi d\varphi\left[R^3\cos^2\sin^3\varphi+R^3\sin^2\theta\sin^3\varphi\right] \\
&= 2\pi R^3\int_0^\pi \sin^3\varphi d\varphi
\end{aligned}$$

תרגיל מהנק' $(0,-2,-1)$ ונק' $(0,2,1)$ חשבו את

$$I = \int_\gamma y^2dx + x^2dx + z^2dz$$

$$\gamma = \left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2=4, x^2+y^2=1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$$

פתרון

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \\ z &= \sin\theta \\ y &= \sqrt{4-\cos^2\theta} \end{aligned}$$

כאשר $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ אז

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(t) &= \left(\cos t, \sqrt{4-\cos^2 t}, \sin t\right) \\ \dot{\vec{\gamma}}(t) &= \left(-\sin t, \frac{\sin t}{\sqrt{4-\cos^2 t}}, \cos t\right) \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{f}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{v}(t)\,dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sin t\left(4\cos^2 t\right) + \frac{\cos^2 t\sin t}{\sqrt{4-\cos^2 t}} + \cos t\sin^2 t\right]dt \\ &= \left(\frac{2}{3}\sin^3 t\right)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

תרגיל נתון הגרף של הפרבולואיד x^2+y^2 מעל התחום $x^2+y^2\leq 1$. צפיפות המסה שלו ליחידת שטח היא x^2+y^2 חשבו את $\vec{R}_{cm}$.

פתרון הפרמטריזציה

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= x^2+y^2 \\ s_x &= (1,0,2x) \\ s_y &= (0,1,2y) \\ s_x\times s_y &= (-2x,-2y,1) \\ &= (-\nabla z, 1) \\ \|s_x\times s_y\| &= \sqrt{4x^2+4y^2+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(x^2+y^2\right)\|s_x\times s_y\|\,dxdy \\ &= \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}dr \end{aligned}$$

המיצוע על Z

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} z\left(x^2+y^2\right)\|s_x\times s_y\|\,dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}\left(x^2+y^2\right)^2\|s_x\times s_y\|\,dxdy \\ &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^5\sqrt{4r^2+1}dr \\ \Rightarrow Z_{cm} &= \frac{I}{M} \end{aligned}$$

תרגיל השטף של

$$f(x,y,z) = \frac{(-2x,-2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

דרך המשטח כלפי מעלה.

פתרון f הוא הנורמל המנורמל $\hat{n}=\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ ולכן השטף של f דרך המשטח הוא

$$\iint_s \vec{f}\cdot\vec{N} = \iint\left\|\vec{N}\right\|$$

כלומר התוצאה היא שטח המשטח.

$$\begin{aligned} \iint\sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{4r^2+1}r\,dr \\ &= \frac{2\pi\left(\left(4r^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right)_{r=0}^1}{12} \\ &= \frac{\pi\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)}{6} \end{aligned}$$

משפט (גאוס) בהנתן תחום V (מתאים) ו $\partial V=S$ אם וקטור נורמלי $\vec{n}$ כלפי חוץ. ויהי $F:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ המכילה את V. אז

$$\begin{aligned} \iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV &= \iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial x}F_x+\frac{\partial}{\partial y}F_y+\frac{\partial}{\partial z}F_z\right)dV \\ &= \iint_s\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma \\ &= \iint_s\vec{F}\cdot\vec{d\sigma} \end{aligned}$$

דוגמה חשבו את השטף של $\vec{F}=x\hat{i}+Y\hat{j}+Z\hat{k}$ קרך

$$S = \left\{x^2+z^2=4, 0\leq y\leq 1\right\}$$

פתרון חישוב ישיר וקטור נורמלי לגליל $(x,y,z)\in S;\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}(x,0,z)$

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot\hat{n} &= \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\left[x^2+z^2\right]=\sqrt{x^2+z^2}=2\\ \Rightarrow\iint_s\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma &= 2\cdot 2\pi 2\cdot 1=8\pi\end{aligned}$$

דרך המשפט: נוסיף ל S את המחסים של הגליל.

$$\begin{aligned}s_1 &= \left\{y=0,x^2+y^2\le 4\right\}\\ s_2 &= \left\{y=1,x^2+y^2\le 4\right\}\end{aligned}$$

נקבל משטח סוג. ולכן ע"פ משפט גאוס השטף דרך כל המשטח $S\cup S_1\cup S_2$ יהיה שווה ל

$$\begin{aligned}\iint_{S\cup S_1\cup S_2}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma &= \iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv\\ &= 3\iiint_V dv\\ &= 3\cdot\pi 2^2\cdot 1=12\pi\end{aligned}$$

נחסיר מזה את השטף דרך S_1,S_2 אז הנורמל ל S_1 הוא

$$\begin{aligned}\hat{n_1} &= (0,-1,0)\\ \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma &= -\iint_{S_1}yd\sigma=0\end{aligned}$$

עבור S_2

$$\hat{n_2} = (0,1,0)$$

לכן

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \iint yd\sigma=4\pi$$

דוגמה חשבו את השטף של $x\hat{i}+y\hat{j}+z^2\hat{k}$ דרך השפה של הקובייה

$$0\le x,y,z\le 1$$

אז

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 1+1+2z=2(1+2)$$

$$\begin{aligned}\iint_S\vec{F}\cdot d\vec{\sigma} &= \iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 2(1+z)\,dxdydz\\ &= 3\end{aligned}$$

תרגיל S תוחם את V ו- $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות והרמונית

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f=\Delta f=\left(\frac{\partial^{f2}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(f) = 0$$

הוכיחו כי $\iint_s f\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma \ge 0$ כאשר $\hat{n}$ וקטור יחידה נורמלי ל-s

$$\begin{aligned}\iint_s f\frac{\partial f}{\partial s}d\sigma &= \iint_s f\vec{\nabla}f\cdot\hat{n}d\sigma\\ &= \iiint_V\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}f\right)dV\\ &= \iiint_V\left(\vec{\nabla}f\cdot\vec{\nabla}f+f\Delta f\right)dV\\ &= \iiint_V\left\|\vec{\nabla}f\right\|^2 dV\ge 0\end{aligned}$$

הערה תכונה של פונקציה הרמונית

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma &= \iint_S\nabla f\cdot\hat{n}d\sigma\\ &= \iiint\nabla\cdot\nabla f dv\\ &= \iiint\Delta f dv=0\end{aligned}$$

חישוב נפחים בעזרת משפט גאוס נניח ש $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=const=c$ אז הנפח יכול להיות מחושב ע"י.

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{c}\iiint_V\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\\ &= \frac{1}{c}\iint_S\vec{F}d\vec{\sigma}\end{aligned}$$

דוגמאות ל-$\vec{F}$ כנ"ל

$$\vec{F} = (x,y,z),(x,0,0)\ldots$$

באופן כללי

$$\vec{F} = (P(y,z)+px,Q(x,z)+qy,R(x,y)+\gamma z)$$

דוגמה חשב את נפח האליפסואיד

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$$

אז הפרמטריזציה של $S=\partial V$.

$$\begin{aligned}x &= a\cos\theta\sin\varphi\\ y &= b\sin\theta\sin\varphi\\ z &= c\cos\varphi\end{aligned}$$

לכן

$$S_\varphi = (a\cos\theta\cos\varphi, b\sin\theta\cos\varphi, -C\sin\varphi)$$
$$S_\theta = (-a\sin\theta\sin\varphi, b\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

אז

$$\begin{aligned}\hat{n} &= S_\varphi \times S_\theta \\ &= \left(bc\cos\theta\sin^2\varphi, ac\sin\theta\sin^2\varphi, ab\sin\varphi\cos\varphi\right)\end{aligned}$$

נבחר

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{r} = (x,y,z) \\ V &= \frac{1}{3}\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dV \\ &= \frac{1}{3}\iint_s \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\vec{r}\cdot\vec{N}d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abc\left(\cos^2\theta\sin^3\varphi+\sin^2\theta\sin^3\varphi+\sin\varphi\cos^2\varphi\right)d\theta d \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} abc\sin\varphi d\theta d\varphi \\ &= \frac{abc}{3}4\pi\end{aligned}$$

תרגיל (חדוא 2מ') V פירמידה ריבועית עם קדקדים A_0, A_1, A_2, A_3, P ונתון

$$P = (-1,6,10), A_1 = \left(\frac{1}{2},0,0\right), A_2 = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right), A_3 = \left(0,\frac{1}{2},0\right)$$

נתונים השדות

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \left(2xy+5x, -5y^2z, 4-3yz+5yz^2\right) \\ \vec{G} &= \vec{r}-\vec{r_p}\end{aligned}$$

כאשר $\vec{r}=(x,y,z)$, $\vec{r_p}=\vec{r}(p)$.
חשבו

$$\iint_{S_1}\left(\vec{G}+\vec{F}-e^{x^2-z^3}\vec{G}\right)\cdot d\vec{\sigma}$$

בכיוון החיצוני לפירמידה כאשר S_1 שפת הפירמידה ללא הבסיס A_0, A_1, A_2, A_3.

פתרון $\vec{G}$ מגבילה לשפת הפירמידה כי היא מתאמה לכל נקודה על שפת הפירמידה וקטור מ $\vec{P}$ לנקודה לכן מספיק לחשב $\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{\sigma}$. נחשב דיברגנס $\vec{F}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 5$$

סה"כ התוצאה היא הנפח כפול 5 פחות שטף שיוצה דרך הבסיס.

$$n_2 = (0,0,-1)$$

אז

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot\hat{n_2} &= -4+3yz-5yz^2 \\ \Rightarrow \iint_{base}\vec{F}\cdot\hat{n_2}d\sigma &= -4\cdot\frac{1}{4} = -1\end{aligned}$$

הנפח של הפירמידה

$$5\cdot V = 5\cdot\frac{1}{4}\cdot 10\cdot\frac{1}{3} = \frac{25}{6}$$

לכן סה"כ

$$\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{n}d\vec{\sigma} = \frac{25}{6}-1$$

זווית מרחבית יהי S משטח החותך כל קרן מהראשית פעם אחת לכל היותר. הזוית המרחבית ω היא המשטח הנוצר על ספירת היחידה כאשר מטילים את S על S^1 יחסית לראשית, וה"גודל" של ω הוא השטח שלה $\mu(\omega)$.

תרגיל הוכיחו[17] כי

$$\begin{aligned}\mu(\omega) &= \iint_S \frac{\cos\theta}{r^2}d\sigma \\ &= \iint_S \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}d\sigma\end{aligned}$$

פתרון

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial n} &= \nabla r\cdot\hat{n} \\ &= \hat{r}\cdot\hat{n} \\ &= 1\cdot 1\cdot\cos\theta\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{\cos\theta}{r^2}d\sigma &= \iint_S\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}d\sigma \\ &= \iint_S\frac{1}{r^2}\nabla\vec{r}\cdot d\vec{\sigma} \\ &= \iint_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{\sigma} \\ \vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} &= \nabla\cdot\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

[17] הרצאה ב 19.1.2005

$$= \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$
$$+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3y^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$
$$+\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3z^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}$$
$$= \frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} - 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3} = 0$$

בגלל ש S קבוצה סגורה שלא מכילה את 0 (כי אז יש אין סוף כיוונים לנקודה אחת) אז יש מרחק בין S לראשית. לכן יש כליפה $0<\varepsilon<d$ שחוסם את במשטח מהראשית. לכן נגדיר משטח ע"י S, ההיטל על B_ε של קרן דרך הראשית והדפנות של המשטח הזה.
אז השטף הכולל

$$\iiint_V \nabla\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = \iiint 0dV = 0$$

וכן השדה מקביל לשטח שלא מכיל את S ואת B_ε ולכן 0 שם. ולכן השטף דרך B_ε ודרך S שווה. לכן מספיק לחשב את B_ε אז

$$\begin{aligned}
&= \iint_{B_\omega}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{\sigma}\\
&= \iint_{B_\varepsilon}\frac{1}{r^2}d\sigma\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{B_\varepsilon}d\sigma\\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{B_\varepsilon}\varepsilon^2\sin\varphi d\theta d\varphi\\
&= \iint_{B_\varepsilon}\sin\varphi d\theta d\varphi\\
&= \mu(\omega)
\end{aligned}$$

תרגיל הראו שלכל משטח סגור S מתקיים השטף $\iint_s\frac{\vec{r}}{r^3}d\sigma = \begin{cases}4\pi & 0\ in\ S\ spher\\ 0 & else\end{cases}$

$$\begin{aligned}
\iint_{s_\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\hat{n}d\sigma &= \iint_{s_\varepsilon}\frac{r}{r_3}d\sigma\\
&= \frac{1}{r^2}\iint_{s_\varepsilon}d\sigma = 4\pi
\end{aligned}$$

תרגיל S משטח סגור שהוא השפה של V. $\hat{n}(p)$ ווקטור יחידה נורמלי ל S לכל $p\in S$ (חיצוני). $\alpha(p)$ הזווית בין $\hat{n}(p)$ והווקטור הקבוע $\vec{\ell}$ לכל $p\in S$ הראו ש

$$\iint_s\cos\alpha d\sigma = 0$$

פתרון

$$\begin{aligned}
\iint_s\cos\alpha d\sigma &= \iint_s\hat{l}\cdot\hat{n}d\sigma\\
&= \iint_s\hat{l}\cdot d\vec{\sigma}\\
&= \iiint\nabla\cdot\hat{l}dV\\
&= \iiint 0dV = 0
\end{aligned}$$

זהויות גרין (יוכח בבית)

1. זהות גרין הראשונה

$$\iiint\left(\phi\Delta\psi+\vec{\nabla}\phi\vec{\nabla}\psi\right)dV = \iint\phi\vec{\nabla}\psi\cdot\hat{n}d\sigma$$

2. משפט גרין

$$\iiint\left(\phi\Delta\psi-\psi\Delta\phi\right)dV = \iint_S\left(\phi\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\phi\right)\cdot\hat{n}d\sigma$$

תכונות של פונקציות הרמוניות ($\Delta\equiv 0$)

1. $\iint_s\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0$
2. אם u,v הרמוניות בתחום ושוות על $S=\partial V$ אז הם מזדהות על כל V.

הוכח מספיק להוכיח שאם u הרמונית ומתאפסת על S אז בהכרח $u\equiv 0$ על כל V.
ע"פ זהות גרין הראשונה

$$\begin{aligned}
\iiint\left(u\Delta u+\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}u\right)dV &= \iint u\vec{\nabla}u\cdot\hat{n}d\sigma\\
\Rightarrow\iiint\left(0+\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}u\right)dV &= \iint u0\cdot\hat{n}d\sigma = 0\\
\Rightarrow\iiint\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2dV &= 0\\
\Rightarrow\left\|\vec{\nabla}u\right\|^2 &= 0\\
\Rightarrow\vec{\nabla}u|_V &= 0\\
u|_V &= const
\end{aligned}$$

והערך על השפה 0 ולכן $u=0$.

משפט סטוקס S משטח[18] דו צדדי בעל "שפה" $\partial S=C$ ויהי $f\in\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ שדה גזיר ברציפות בקבוצה פתוחה המכילה את S ו"שפתו", אז

$$\iint_s\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

כאשר הנורמל באגף שמאל ניקבע לפי כלל יד ימין יחסית לכיוון על c.

דוגמאות

1. כאשר $\vec{F}=(-y,x,1)$

$$S = \left\{(x,y,z)\,|z=a^2-x^2-y^2,0\le z\le a^2\right\}$$

אם מחשבים אגף שמאל

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0\hat{x}+o\hat{y}+2\hat{z}$$

אז

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \left(-\nabla z\,(x,y)\,,1\right)\\ &= (2x,2y,1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)d\vec{s} &= \iint\limits_{\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}ds}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}ds\\ &= \iint\limits_{x^2+y^2\le a}(0,0,2)\cdot\begin{pmatrix}2x\\2y\\1\end{pmatrix}dxdy=2\pi a^2\end{aligned}$$

השפה היא המעגל

$$x^2+y^2 = a^2,z=0$$

$$\begin{aligned}\vec{C} &= (a\cos t,a\sin t,0)\\ \vec{V} &= (-a\sin t,a\cos t,0)\\ \vec{F}\,(c\,(t)) &= (-a\sin t,a\cos t,0)\end{aligned}$$

האינטגרל הקווי

$$\begin{aligned}\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi}\vec{F}\,(c\,(t))\cdot\vec{v}dt\\ &= \int_0^{2\pi}a^2dt\\ &= 2\pi a^2\end{aligned}$$

2. חשבו את האינטגרל לאורך העקום C של

$$\oint_C(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz$$

כאשר c מוגדר ע"י

$$\left\{x^2+y^2+z^2=36,y=\sqrt{3}x\right\}$$

נחשב

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = (-2,-2,-2)$$

לכן נחשב ע"פ סטוקס

$$\begin{aligned}\hat{n} &= \frac{\left(\sqrt{3},-1,0\right)}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3},-1,0\right)\\ \Rightarrow\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n} &= -\sqrt{3}+1\end{aligned}$$

הרדיוס של המישור הוא של הקליפה כי חותך את הראשית ולכן מעגל גדור ולכן

$$S = \pi r^2=36\pi$$

סה"כ

$$\iint_s\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\hat{n}ds = \left(-\sqrt{3}+1\right)36\pi$$

מאחר שלא בחרו את כיוון העקום התשובה היא עד כידי סימן

תרגיל חשבו את $\iint_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)d\vec{s}$

$$\vec{F} = (y,z,x)\,,S=\left\{z=\sqrt{x^2+y^2},1\le z\le 2\right\}$$

שני דרכים

1. בעזרת גאוס
2. בעזרת סטוקס

פתרון

1. אם נסמן $\vec{E}=\vec{\nabla}\times\vec{F}$ אז

$$\iiint\nabla\cdot\vec{E}dV = \iiint 0dV=0$$

ולכן השטף דרך S שווה לשטף דרך ה"מכסים" של הנפח.
נשים לב כי

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{F} &= (-1,-1,-1)\\ \vec{n}_1 &= (0,0,-1)\end{aligned}$$

[18] תרגול ב 25.1.2005

כלומר השטף דרך המכסה $\vec{S}_1$ שווה ל $\iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{s} = 4\pi$ וגם

$$\vec{n_2} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{\nabla} \times \vec{F} d\vec{s} = -\pi$$
$$\iint_{S_1 \cup S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot d\vec{s} = 3\pi$$

2. אז המעגל התחתון

$$C_1 = (\cos t, \sin t, 1)$$
$$V_1 = (-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint ydx + zdy + xdz$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t + \cos t\right) dt$$
$$= -\pi$$

באותו אופן העבודה לאורך השני 4π.

תרגיל C הוא העקום $\left\{x^2+y^2=4z^2, x^2+z^2=1, x \geq 0, z \geq 0\right\}$ מהנקודה $(0,-2,1)$ לנקודה $(0,2,1)$ חשבו את

$$\int_C z^2dx + y^2dy + x^2dz$$

פתרון נבדוק אם סטוקס משתלם

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 2z-2x, 0)$$

אז האינטגרל דרך העקום + האינטגרל C_2 שבו $\vec{C_2} = (0,t,1)$ הוא 0 ולכן נחשב אינטגרל דרך הישר.

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-2}^{2} t^2 dt$$
$$= \left(\frac{t^3}{3}\right)|_{-2}^{2}$$
$$= \frac{16}{3}$$