אינפי' 3

נכתב ע"י איתי נחשון מתוך הרצאות של פרופ' צוויקל מיכאל

סמסטר חורף 2004-5

$Id: infi3_lectures.lyx,v 1.34 2005/03/15 16:55:54 itay Exp $

תוכן עניינים

1 המרחב $\mathbb{R}^n$

עבור $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ נדבר על העתקות $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$.

דוגמאות

1. $F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$
2. $F(r,\theta,\varphi) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$
3.

$$\Omega \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}, F(x,y,z) = \left(\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)}, \frac{Cy}{(x^2+y^2+z^2)}, \frac{Cz}{(x^2+y^2+z^2)}\right)$$

1.1 המרחב $\mathbb{R}^n$, נקודות, סדרות, קבוצות, מטריקות

1.1.1 מרחק בין שתי נקודות

נתונות $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ אז נסמן פונקציית מטריקה סטנדרטית

$$d(x,y) = d(y,x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

מטריקות כלליות

1. סופיות

$$1 \le p < \infty, d_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

2. אין-סופית

$$d_\infty = \max_{1 \le j < n} |x_j - y_j|$$

תכונות מטריקות

1. $d_p(x,y) = d_p(y,x)$
2. $d_p(x,y) \ge 0$ וגם $d_p = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d_p(x,y) \le d_p(x,z) + d_p(z,y)$ (לשם כך צריך את א"ש קושי-שוורץ)

משפט (תרגיל) קיימים קבועים A_n, B_n תלויים ב-n כך ש

$$A_n d_\infty(x,y) \le d_p(x,y) \le B_n d_\infty(x,y)$$

לכל x, y ב $\mathbb{R}^n$
לדוגמה עבור $n = 1, A_1 = B_1 = 1$

כדור ב-$\mathbb{R}^n$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$ ולכל $0 < r$ נגדיר

$$B_p(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | d_p(x,y) < r\}$$

לדוגמה עבור $\mathbb{R}^n$ אז B_2 הוא כדור ברדיוס r. B_∞ יהיה מלבן באורך צלע $2r$.

הערה[1]

1. בקורס נסמן $B_2 = B$
2. נסמן

$$\begin{aligned} Q(x,r) &= B_\infty(x,r) \\ &= \{(y_1,y_2,\ldots,y_n) \,|x_j - r < y_j < x_j + r; j = 1,..,n\} \\ &= \prod_{j=1}^{n} (x_j - r < y_j < x_j + r) \end{aligned}$$

נורמות

הגדרה התכונות הבאות מתקיימות עבור $\|.\|$:

1. $\|\lambda x\| = \|(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)\| = |\lambda| \, \|x\|$; $\begin{matrix}\forall x \in \mathbb{R}^n \\ \lambda \in \mathbb{R}\end{matrix}$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n; \|x\| > 0$ וגם $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

הגדרה נורמת ℓ^p של איבר $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{\ell_n^p} = \|x\|_p = d(x,0) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$d_p(x,y) = \|x-y\|_p$$

תרגיל לכל $p, q \in \{1, 2, \infty\}$ קיים קבוע $c_{p,q,n}$ התלוי רק ב p, q, n כך ש

$$\forall x \in \mathbb{R}^n; \|x\|_p \quad \leq \quad c_{p,q,n} \|x\|_q$$

1.2 סדרות ב-$\mathbb{R}^n$

הגדרה

1. נניח שלכל $k \in \mathbb{N}$ נתונה נק' $p_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,n})$ אז $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה ב $\mathbb{R}^n$ נאמר שהסדרה הזו מתכנסת לנקודה $p_* \in \mathbb{R}^n$ אם $\lim_{k\to\infty} d_p(p_*, p_k) = 0$; $p \in [1,\infty) \cup \{\infty\}$
2. נניח שלכל $k \in \mathbb{N}$ נתונה נק' $p_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, ..., x_{k,n})$ אז $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרה ב $\mathbb{R}^n$ נאמר שהסדרה הזו מתכנסת לנקודה $p_* = (x_{*,1}, x_{*,2}, ..., x_{*,n}) \in \mathbb{R}^n$ אם $\lim_{k\to\infty} x_{k,j} = x_{*,j}$ עבור $j = 1, \ldots, n$ (התכנסות רכיב רכיב).

1.3 מעט טופולוגיה

הגדרה קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה חסומה אם קיים $r > 0$ כך ש $E \subset B(0,r)$

משפט (Bolzano-Weierstrass) לכל סדרה $\{p_k\}$ חסומה ב $\mathbb{R}^n$ קיימת תת-סדרה מתכנסת לנקודה ב-$\mathbb{R}^n$

הוכחה אינפי 2

הגדרה

1. קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה פתוחה אם לכל $x\in E$ קיימת $r=r_x>0$ כך ש $B\left(x,r_x\right)\subset E$
2. קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה סגורה אם לכל סדרה מתכנסת של נקודות ב E גם גבול הסדרה הוא נקודה ב E

הגדרה נקודת הצטברות נתונה קבוצה E, ונקודה p. p נקראת נקודת הצטברות (clusterpoint) של E אם לכל $r>0$ הכדור $B\left(p,r\right)$ מכיל אין-סוף נקודות ב E.

הגדרה נתונות שתי קבוצות E,G כך ש $E\subset G\subset\mathbb{R}^n$ נאמר ש E פתוחה ביחס ל G אם לכל $x\in E$ קיים $r_x>0$ כך ש $B\left(x,r_x\right)\cap G\subset E$. (למשל G פתוחה ביחס ל-G, עבור G כלשהו).

הגדרה קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח של E. יש תת כיסוי סופי. כלומר אם לכל אוסף $\left\{W_\alpha\right\}_{\alpha\in A}$ של קבוצות פתוחות כך ש $E\subset\cup_{\alpha\in A}W_\alpha$, קיים אוסף סופי $\alpha_1,...,\alpha_n\in A$ כך ש

$$n\in\mathbb{N};E\quad\subset\quad\bigcup_{j=1}^{n}W_{\alpha_j}$$

הגדרה נתונה קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$, נגדיר את הסגור של E כקבוצה, שנסמן ב $\overline{E}$ של כל הנקודות $p\in\mathbb{R}^n$ שהן גבולות של הסדרות ב E.

תרגיל הוכיחו כי $\overline{E}$ היא חיתוך של כל הקבוצות הסגורות אשר מכילות את E

דוגמאות

$$\begin{aligned}\overline{B_p\left(x,r\right)} &= \left\{y\in\mathbb{R}|d_p\left(x,y\right)\leq y\right\}\\ \overline{Q\left(x,r\right)} &= \prod_{j=1}^{n}\left[x_j-r,x_j+r\right]\end{aligned}$$

תרגיל נתון קובייה סגורה $\overline{Q\left(p,r\right)}$ קיימות נקודות $p_1,p_2,...,p_{2^n}$ כך ש

$$\overline{Q\left(p,r\right)}\quad=\quad\bigcup_{j=1}^{2^n}\overline{Q\left(p_j,\frac{r}{2}\right)}$$

משפט (Heine-Borel) נתונה קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ אזי TFAE(כל הטענות הבאות שקולות)

1. E סגורה וחסומה
2. לכל סדרה של נקודות ב-E יש תת-סדרה אשר מתכנסת לנקודה ב E
3. E קומפקטית

הוכחה

1. $(3)\Leftarrow(1)$

אם E קומפקטית נוכיח ש E חסומה. ניקח $A=\mathbb{N}$ אז

$$W_\alpha=B\left(0,\alpha\right)$$

זו קבוצה פתוחה וגם

$$\bigcup_{\alpha\in A}W_\alpha=\mathbb{R}^n$$

אזי $E \subset \bigcup_{\alpha\in A} B(0,\alpha)$ או

$$\begin{aligned} E &= B(0,\alpha_1)\cup B(0,\alpha_2),\ldots,B(0,\alpha_N) \\ &= B(0,r) \end{aligned}$$

כאשר

$$r = \max(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N)$$

לכן E חסומה
נראה E סגורה: נתונה סדרה $\{p_k\}$ ב E אשר מתכנסת לנקודה $p_*\in\mathbb{R}^n$ נניח ש $p_*\notin E$ כאשר $A=\mathbb{N}$

$$W_\alpha = \left\{x\in\mathbb{R}^n | d_2(p_*,x) > \frac{1}{\alpha}\right\}$$

אזי W_α פתוחה (מדוע?)

$$E \subset \mathbb{R}^n\setminus\{p_*\} = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}} W_\alpha$$

E קומפקטית לכן

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{N} W_{\alpha_j}$$

עבור $\alpha_1,...,\alpha_N$ מתאימים

$$r=\max(\alpha_1,...,\alpha_n);E \subset W_r$$

העובדה הזאת בסתירה להתכנסות של $\{p_k\}$ ל p_*
$\Leftarrow p_*\in E$ לכן E סגורה

2. $(1)\Leftarrow(2)$
לפי Bolzano-Weierstras זה מידי
3. $(2)\Leftarrow(1)$
מידי ש E בסגורה
אם E לא חסומה קיימת סדרה $\{p_k\}$ ב E כך ש $d(0,p_k)>k$
תרגיל להראות שאין גבול ב $\mathbb{R}^n$
4. $(2)\Leftarrow(3)$
נניח ש E מקיימת את (2)

סימון נתון אוסף W של קבוצות פתוחות ונתונה קבוצה $G\subset\mathbb{R}^n$ נאמר ש W הוא אוסף G סופי אם G מוכל באיחוד של מספר סופי של קבוצות ב W
אחרת אנו אומרים כי W הוא G אין-סופי
באופן כללי אם $G=\bigcup_{j=1}^M G_j$ ואם W הוא G-אין-סופי אזי קיים $m\in\{1,2,..M\}$ כך ש W הוא G_m-אין-סופי
יהי $W=\{W_\alpha\}_{\alpha\in A}$ אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות כך ש $E\subset\bigcup_{\alpha\in A}W_\alpha$
E חסומה לכן

$$E\subset Q_1 = \overline{Q}(0,r)$$

עבור r מספיק גדול. אם W E-סופי גמרנו.
אחרת

$$Q_1 = Q_{11}\cup Q_{12}...Q_{12^n}$$

כאשר כל Q_{1j} מן הצורה $Q_{1j}=\overline{Q\left(x_j,\frac{r}{2}\right)}$ אזי

$$E = \bigcup_{j=1}^{2^n}\left(E\cap Q_{1j}\right)$$

קיים $j\in\{1,..,2^n\}$ ו Q_2 כך ש W הוא $Q_2\cap E$ אין-סופי

הגדרה[2] כל קבוצה $G\subset\mathbb{R}^n$ היא "יפה" או מכוערת"

G יפה אם קיים מספר סופי של אינדקסים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_N$ ב- A כך ש

$$G \subset \bigcup_{j=1}^{N} W_{\alpha_j}$$

אחרת G "מכוערת" אם $G_1,G_2,...,G_m$ כולן יפות אזי $\bigcup_{k=1}^{M}G_k$ גם היא יפה

לכן אם $\bigcup_{k=1}^{k}H_k$ מכוערת (קיימת לפחות אחרת מכוערת)

ניסוח פורמלי קיים קובייה סגורה

$$K = \overline{Q\left(o,r\right)}$$

כך ש $E\subset K$ נניח ש E מכוערת

$$K_1 = \bigcup_{j=1}^{2^n} Q_{i,j}$$

כאשר $Q_{i,j} = \overline{Q\left(q_{i,j},\frac{r}{2}\right)}$ קיים לפחות j אחד ב $\{1,2,..,2^n\}$ כך ש $Q_{i,j}\cap E$ מכוערת נגדיר

$$K_2 = Q_{ij}$$

בשביל ה j הזה.

באופן דומה לכל $\beta\in\mathbb{N}$ נמצא קובייה כך ש

$$K_\beta = \overline{Q\left(q_\beta,\frac{r}{2_{\beta-1}}\right)}$$

כך ש $K_\beta\subset K_{\beta-1}$ וגם $K_\beta\cap E$ מכוערת. מכוערת לכן לא ריקה.

נבחר נקודה $p_\beta\in K_\beta\cap E$ לסדרה $\{p_\beta\}_{\beta\in\mathbb{N}}$ נמצאת ב-E ובגלל תנאי (2) יש לה תת סדרה אשר מתכנסת לנקודה $p_*\in E$. כלומר קיימת פונקציה עולה

$$\gamma:\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$$

כך ש $\lim_{k\to\infty}d\left(p_*,p_k\right)=0$

קיים $\alpha_*\in A$ כך ש $p_*\in W_{\alpha_*}$. לכן קיים $p>0$ כך ש

$$p_* \in Q\left(p_*,p\right)\subset W_{\alpha_*}$$

טענה לכל $\beta_*\in\mathbb{N}$ מתקיים $p_\beta\in K_\beta$ לכל $\beta\geq\beta_*$ (מדוע?)

לכן $p_*\in K_{\beta_*}$

עבור $\beta=\beta_*$ מספר גדול

$$K_\beta \subset Q\left(p_*,p\right)$$

(תרגיל - כמה גדול צריך להיות β)

אזי

$$E\cap K_{\beta_*}\subset K_{\beta_*}\subset Q\left(p_*,p\right)\subset W_{\alpha_*}$$

לכן $E\cap K_\beta$ יפה - זאת סתירה.

■

הערה מעל מרחב טופולוגי כללי המשפט לא מתקיים. מעל מרחב מטרי 3,2 שקולים אבל לא 1.

2 העתקות רציפות מ $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^m$

נתונה קבוצה $E \subset \mathbb{R}^n$ ונתונה העתקה $T : E \mapsto \mathbb{R}^m$. נתונה נקודה $p_* \in E$

הגדרה "קלאסית" של רציפות של T T רציפה ב- p_* אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta = \delta(\varepsilon)$ חיובי כך ש $T(p)$ מוגדרת עבור כל $p \in B_{(\mathbb{R}^n)}(p_*, \delta)$ (כדור n ממדי) ומתקיים

$$T(p) \quad \in \quad B_{(\mathbb{R}^m)}(T(p_*), \varepsilon)$$

(כאשר הכדור m ממדי)

הגדרות שקולות על מרחב מטרי ונורמי

1. $d(p, p_*) < \delta(\varepsilon)$ גורר $T(p)$ מוגדר ו $d(T(p), T(p_*)) < \varepsilon$
2. $\|p - p_*\|_{\ell_n^2} < \delta(\varepsilon)$ גורר $T(p)$ מוגדר ו $\|T(p) - T(p_*)\|_{\ell_m^2} < \varepsilon$

הגדרת רציפות ביחס לקבוצה E נתונה $E \subset \mathbb{R}^n$, נקודה $p_* \in E$, העתקה $T : E \mapsto \mathbb{R}^m$. נתונה קבוצה נוספת $p_* \in G \subset E$. נאמר ש T רציפה ב p_* ביחס ל G אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta(\epsilon) > 0$ כך שלכל

$$p \quad \in \quad B(p_*, \delta) \cap G$$

מתקיים

$$T(p) \quad \in \quad B(T(p_*), \varepsilon)$$

(כלומר $T_{(\mathbb{R}^n)}(B(p, \delta) \cap G) \subset B_{(\mathbb{R}^m)}(T(p), \varepsilon)$)

משפט(Heine)[3] T רציפה ב p ביחס ל G אם"ם לכל סדרה $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ של נקודות ב G אשר מתכנסת ל p מתקיים

$$\lim_{k \to \infty} d(T(p_k), T(p)) \quad = \quad 0$$

(ש"ב להוכיח שקילות להגדרה הקודמת)

הגדרה עבור T, G, E כנ"ל נתונה קבוצה $H \subset G$. נאמר ש T רציפה ב H ביחס ל G אם עבור כל $p \in H$. T רציפה ביחס ל G.

משפט נניח שבהגדרה הנ"ל ניקח $G = H$. עבור E, G, T כנ"ל. T רציפה ב-G ביחס ל G אם"ם לכל קבוצה פתוחה W ב $\mathbb{R}^m$ הקבוצה $T^{-1}(W) \cap G$ פתוחה ביחס ל G.
(ש"ב להוכיח)

קבוצות קומפקטיות והעתקות רציפות

משפט נניח ש T, G, E כנ"ל נניח שT רציפה ב G ביחס ל G נניח ש G קומפקטית מתקיים:

1. $T(G)$ קומפקטית
2. אם G קבוצה קשירה (לפי קשתות) אזי גם $T(G)$ קשירה (לפי קשתות).
3. אם T חח"ע על G אזי קיימת העתקה S, $S : T(G) \mapsto G$ ומקיים
   (א) $\forall p \in G; S(T(p)) = p$
   (ב) S רציפה ב $T(G)$ ביחס ל $T(G)$

הוכחה

1. תרגיל
2. לא נוכיח

3. נוכיח בעזרת הלמה הבאה

למה נתונה סדרה $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ב $\mathbb{R}^n$ ונקודה p_{**} כך שלכל תת סדרה של $\{p_k\}$ יש תת סדרה (אחרת) אשר מתכנסת ל p_{**} אזי הסדרה המקורית מתכנסת גם היא ל p_{**}

הוכחה אם המסקנה לא נכונה אזי קיים $\varepsilon > 0$ וקיימת תת סדרה מסוימת $\{p_{\alpha(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ של $\{p_k\}$ כך ש $p_{\alpha(k)} \notin B(p_k,\varepsilon)$ לכל $k\in\mathbb{N}$. מכיוון של $\{p_{\alpha(k)}\}$ יש תת סדרה אשר מתכנסת ל p_{**} קיבלנו סתירה.

חזרה להוכחת (3): נסמן $V=T(G)$ אז $S:V\mapsto G$ מוגדרת היטב. לכל $v\in V$ $S(v)$ היא נקודה יחידה $p\in G$ כך ש $T(p)=v$. (החלק הראשון מתקיים)

נוכיח את החלק השני בעזרת משפט Heine. ניקח סדרה כלשהי $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ב V אשר מתכנסת לנקודה נתונה $v_*\in V$. ברצוננו להראות ש $S(v_k)$ מתכנסת ל $S(v_*)$.

נסמן $S(v_k)=p_k\in G\Rightarrow T(p_k)=v_k$ נסמן $p_*=S(v_*)$ אז $v_*=T(p_*)$. מכיוון ש G קומפקטית, לכל תת סדרה של $\{p_k\}=\{S(v_k)\}$ יש תת סדרה $\{S(v_{\theta(k)})\}$ מתכנסת לנקודה $q\in G$. ז"א $p_{\theta(k)}=S(v_{\theta(k)})$ מתכנסת ל q מכיוון ש T רציפה ביחס ל G

$$T\left(p_{\theta(k)}\right) \quad \rightarrow \quad T(p_*)$$

אבל $v_{\theta(k)}=T\left(p_{\theta(k)}\right)$ מתכנסת ל v_*. הגבול של הסדרה $\mathbb{R}^n$ הוא יחיד (מדוע?) לכן

$$T(q)=v_* \quad\Leftrightarrow\quad S(v_*)=q$$

כלומר כל תת סדרה מתכנסת של $\{S(v_k)\}$ מתכנסת לאותה נקודה $S(v_*)$ (ולפי הלמה סיימנו)

■

הגדרה גבול של העתקה

הגדרה נתונות G,E,T כנ"ל ונתונה נקודה $p_0\in\mathbb{R}^n$ ברצוננו להגדיר את הגבול

$$\lim_{\substack{p\rightarrow p_0\\ p\in G}} T(p)$$

נניח ש p_0 היא נקודת הצטברות של G ז"א

$$\forall r > 0, B(p_0,r)\cap G$$

מכילה אין סוף איברים או

$$\forall r > 0, (B(p_0,r)\setminus\{p_0\})\cap G\neq\phi$$

אם קיימת נקודה $q\in\mathbb{R}^m$ כך שמתקיים

$$\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0; p\in(B(p_0,\delta)\setminus\{p_0\})\Rightarrow T(p)\in B(q,\varepsilon)$$

אזי נאמר שהגבול קיים ושווה ל q

הערה הסימון $\lim_{p\rightarrow q}T(p)$ ללא תנאי נוסף $p\in G$, פרוש הדבר שקיים $0<r$ כך ש T מוגדרת בקבוצה $B(q,r)\setminus\{q\}$ (ואולי גם בקבוצה יותר גדולה) והגבול נלקח ביחס ל $B(q,r)\setminus\{q\}$.

הגדרה (שקולה) הגבול הנ"ל קיים ושווה ל q אם"ם ההעתקה

$$\tilde{T}:G\cup\{p_0\}\rightarrow\mathbb{R}^m$$

רציפה בנקודה p_0 ביחס ל $G\cup\{p_0\}$ כאשר

$$\tilde{T}(p_0) = q$$

ו

$$\tilde{T}(p) = T(p)$$

לכל $p\in G\setminus\{p_0\}$.

דוגמה

$$\begin{aligned}(x,y) &\mapsto (x\cos y, y\sin x)\\ T(x,y) &\mapsto (x\cos y, y\sin x) \qquad (1)\end{aligned}$$

אם ברצוננו להגדיר העתקה T בעזרת הנוסחה (1) אפשר לבחור $E\subset\mathbb{R}^2$ או כל תת-קבוצה של $\mathbb{R}^2$ ועבור $G\subset E$ ועבור כל נקודה $G\ni P=(x,y)$ נקבל ש T רציפה ב-p ביחס ל-G. דבר זה נובע בקלות מרציפות הפונקציות הסקלריות.

באופן יותר כללי: רכיבים של העתקה נתונה $E\subset\mathbb{R}^n$, נתונה $G\subset E$, נתונה העתקה $T:E\mapsto\mathbb{R}^m$.

נגדיר m פונקציה $f_1,f_2,..,f_m$ כך שלכל $p\in E$, $f_j(p)$ הוא רכיב ה-j של הווקטור $T(p)$. ז"א לכל $p\in E$

$$T(p) = (f_1(p), f_2(p), f_3(p), ..., f_m(p))$$

משפט ההעתקה הנ"ל T היא רציפה בנקודה $p_0\in G$ ביחס ל G אם"ם כל אחת מן הפונקציות $f_j: E\mapsto\mathbb{R}$ הנ"ל רציפה ב p_0 ביחס ל G. כמוכן הגבול

$$\lim_{\substack{p\to p_*\\ p\in G}} T(p)$$

קיים ושווה ל $q_*(q_1,q_2,...,q_m)$ אם"ם כל אחת מן הגבולות

$$\lim_{\substack{p\to p_*\\ p\in G}} f_j(p)$$

קיים ושווה ל p_j, עבור $j=1,2,...,m$.

הוכחה תרגיל

משפט עבור E,G,T כנ"ל. נתונה קבוצה $V\subset\mathbb{R}^m$ והעתקה $S:V\mapsto\mathbb{R}^k$. נניח ש T רציפה בנקודה $p_0\in G$ ביחס ל G. נניח ש S רציפה בנקודה $q_0=T(p_0)$ ביחס ל $T(G)$ אזי העתקה $S\circ T$ רציפה ב p_0 ביחס ל G. כאשר

$$\begin{aligned}(S\circ T)(p) &= S(T(p))\\ S\circ T: E &\mapsto \mathbb{R}^k\end{aligned}$$

דוגמה אם $S(x_1,x_2,...,x_m)=x_j$

רציפות במידה שווה

הגדרה T רציפה ב G ביחס ל G במידה שווה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta(\epsilon)>0$ כך שלכל $p,q\in G$

$$d_{\mathbb{R}^n}(p,q)<\delta \quad\Rightarrow\quad d_{\mathbb{R}^m}(T(p),T(q))<\varepsilon$$

משפט אם G,E כנ"ל ו-$T:E\mapsto\mathbb{R}^m$ רציפה ב-G ביחס ל G ואם G קומפקטית אזי T רציפה ב G ביחס ל G במידה שווה.

הוכחה דומה למקרה $n=m=1, G=E=[a,b]$, תרגיל

2.1 העתקות ליניאריות

הגדרה העתקה $T:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ נקראת ליניארית אם לכל $p,q \in \mathbb{R}^n$ וכל $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$T(\alpha p+\beta q) = \alpha T(p)+\beta T(q)$$

הערות

1. כל העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ מיוצגת ע"י מטריצה $m\times n$ A. ז"א קיימת

$$A = \{a_{ij}\}_{j=1}^{n}{}_{i=1}^{m}$$

כך ש

$$T(p) = T(p_1,p_2,...,p_n) = (p_1,p_2,...,p_m) = q \qquad (2)$$

כאשר

$$(j=1,2,..,m) \quad q_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j \qquad (3)$$

2. נתון T איך מוצאים את A?
a_{ij} הוא רכיב מספר i של $T(0,..,0,1,0,...,0)$ כאשר 1 במקום ה j.

3. מצד שני כל מטריצה $m\times n$ A מגדירה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ ע"י הנוסחאות (2) ו-(3)
אפשר לרשום את הקשר בין T לבין המטריצה A אשר מייצגת את T כדלקמן

$$\left(A\left(p^t\right)\right)^t = T(p)$$

4. סימון לא רשמי לקורס ולכן למחברת זו.

$$T\text{"} = \text{"}A, A\text{"} = \text{"}T$$

5. תזכורת: אם $m=n, T:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ אז T חח"ע $\iff det(A)\neq 0 \iff$ קיימת מטריצה $B=A^{-1}$ ו T^{-1} מיוצגת ע"י A^{-1}
במקרה זה אפשר לחשב את האיברים $\{b_{ij}\}$ של המטריצה $B=A^{-1}$ ע"י חוק Cramer

$$b_{ij} = \frac{M_{ij}}{det(A)}$$

כאשר M_{ij} דטרמיננטה של תת-מטריצה $(n-1)\times(n-1)$ של A
אם $S:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, T:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ העתקות ליניאריות. אז יש גם העתקה המורכבת

$$U = S\circ T$$

$U:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ היא ליניארית ואם $S\text{"} = \text{"}A_S, T\text{"} = \text{"}A_T$ אזי

$$A_S\cdot A_T \quad \text{"} = \text{"} \quad S\cdot T$$

תכונת "ליפשיץ" של העתקות ליניאריות

תזכורת פונקציות $f:G\mapsto V$ המקיימות $\exists L\in\mathbb{R};\forall x,y\in G;d_V\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq Ld_G\left(x,y\right)$ נקראות "ליפשיץ"

משפט נתונה העתקה ליניארית $\mathbb{R}^m$ אזי קיים קבוע C כך שלכל $p,q\in\mathbb{R}^n$

$$d_{\mathbb{R}^m}\left(T\left(p\right),T\left(q\right)\right)\leq Cd_{\mathbb{R}^n}\left(p,q\right)\tag{4}$$

הוכחה נתון p,q כלשהם ב-$\mathbb{R}^n$, נגדיר

$$\begin{aligned}x&=\left(x_1,x_2,..,x_n\right)=p-q\\ y&=\left(y_1,y_2,..,y_m\right)=T\left(p\right)-T\left(q\right)\end{aligned}$$

תהי A מטריצה המייצגת את T $A=\{a_{ij}\}$
נזכיר את אי-שוויון Cauchy-shwartz

$$\left|\sum_{k=1}^{M}\alpha_k\beta_k\right|\leq\sqrt{\sum_{k=1}^{M}\left|\alpha_k\right|^2\sum_{k=1}^{M}\left|\beta_k\right|^2}$$

מכוון ש

$$\begin{aligned}y&=T\left(x\right)\\ \left|y_i\right|&=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\\ &\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}d\left(T\left(p\right),T\left(q\right)\right)^2&=\sum_{i=1}^{m}\left|y_i\right|^2\\ &\leq\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\right)\\ &=\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\end{aligned}$$

ז"א קיבלנו

$$d\left(T\left(p\right),T\left(q\right)\right)^2\leq d\left(p,q\right)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

אזי קיבלנו את (4) כאשר

$$C=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}$$

הקבוע נקרא קבוע Hillbert-Schmidt נסמן[4] ע"י $\|A\|_{HS}$ ומתקיים

$$\|Ax-Ay\|_2\leq\|A\|_{HS}\|x-y\|$$

[4] הרצאה ב 7.11.2004

הערה נניח ש $T:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ ליניארית אזי

$$T\left(\mathbb{R}^n\right)=\{Tp|\in\mathbb{R}^n\}$$

הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^m$ הממד שלו שווה לדרגה של המטריצה המייצגת את T.

2.2 העתקות דיפרנציאבליות

הגדרה נתונה פונקציה $f:G\mapsto\mathbb{R}$ כאשר G קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$ נאמר ש f דיפרנציאבילית בנקודה $p_0=(x_1,x_2,...,x_n)\in G$ אם קיימים n מספרים $a_1,a_2,..,a_n$ כך שכאשר מגדירים את הפונקציה $\varepsilon(h)$ ע"י

$$\left\{\begin{array}{c} r>0\\ B(p_0,r)\subset G\end{array}\right. ;\forall h=(h_1,...,h_n)\in B(0,r);$$

$$\begin{aligned} f(x_1+h_1,x_2+h_2,...,x_n+h_n) &= f(x_1,x_2,...,x_n)\\ &+\sum_{j=1}^{n}a_jh_j\\ &+\varepsilon(h)\|h\|_2\end{aligned}$$

וגם ע"י $O=(0,0,...,0);\varepsilon(O)=0$ אזי מתקיים

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{O}}\varepsilon\left(\vec{h}\right) = 0$$

הערות הדברים הבאים ידועים

1. f דיפרנציאבילית ב-p_0 $\Leftarrow$ f רציפה ב-p_0
2. f דיפרנציאבילית ב-p_0 $\Leftarrow$ כל הנגזרות החלקיות

$$f_j^{'}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0)$$

קיימות ו $f_j^{'}(p_0)=a_j$.

הערה הוכחה ע"י השוואת כל המקדמים חוץ מהמקדם j לערך ב p_0 ואז מקבלים את הגדרת הנגזרת החד ממדית עבור הנגזרת החלקית.

3. קיום $n\geq 2$ הנגזרות החלקיות ב-p_0 לא מבטיחה דיפרנציאבליות, אפילו לא רציפות.
4. אם כל הנגזרות החלקיות $f_j^{'}(p)=\frac{\partial f(p)}{\partial x_j}$ רציפות ב-p_0 (דבר זה דורש בין היתר ש $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ קיימת בסביבה של p_0) אזי f דיפרנציאיבילית ב-p_0.
5. יש פונקציות דיפרנציאביליות ב-p_0 שהנגזרות החלקיות שלהן לא רציפות ב-p_0.

למה (הוכחה לסעיף 4) נתונה פונקציה $f:Q(p_0,r)\to\mathbb{R}$ (כאשר $Q(p_0,r)$ קובייה פתוחה ב-$\mathbb{R}^n$) אזי לכל $h=(h_1,..,h_n)$ ב $Q(0,r)$ קיימות נקודות $q_1,...,q_n\in Q(p_0,r)$ כך ש

$$f(p_0+h)-f(p_0) = \sum_{j=1}^{n}h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(q_j) \tag{5}$$

נניח שכל הנגזרות החלקיות של f (מסדר ראשון) קיימות בכל נקודה של $Q(p_0,r)$.

הוכחה תרגיל- מתי לרשום $f(p_0+h)-f(p_0)=\sum_{j=1}^{n}(f(s_j)-f(t_j))$ כאשר s_j,t_j נמצאים על אותו ישר מקביל ל $e_j=(0,...,0,1,0,...,0)$ להראות לפי משפט Lagrange ש

$$f(s_j)-f(t_i) = h_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(q_j)$$

הערה אם בלמה הנ"ל כל הנגזרות החלקיות גם רציפות בכל נקודה של $Q(p_0,r)$ אזי אפשר לקבל את הנוסחה (5) עבור $q_1=q_2=,,,=q_n$ כאשר $q=q_0+\theta h$ עבור $\theta\in[0,1]$

הגדרה נתונה $G\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה והעתקה $T:G\to\mathbb{R}^m$ נאמר ש T דיפרנציאבילית ב-$p_0\in G$ אם קיימת העתקה ליניארית $L:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ כך שאם נגדיר העתקה $\vec{\varepsilon}:B(0,r)\setminus\{0\}\mapsto\mathbb{R}^m$ ע"י

$$T(p_0+h) = T(p_0)+L(h)+\|h\|\vec{\varepsilon}(h)$$

כאשר $r>0$ כך ש $B(p_0,r)\subset G$ אזי $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\vec{\varepsilon}\left(\vec{h}\right)=\vec{0}$.

הגדרה נתונה[5] העתקה T מתת קבוצה מסוימת של $\mathbb{R}^n$ ל $\mathbb{R}^m$. נאמר ש T דיפ' ב-p_0 אם:

1. $p_0\in\mathbb{R}^n$
2. קיים $r>0$ כך ש T מוגדרת ב $B(p_0,r)$
3. קיימת העתקה ליניארית מסומנת ע"י $dT|_{p_0}$ כך ש $dT|_{p_0}:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^m$ ומקיים

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\frac{1}{\left\|\vec{h}\right\|}\left(\vec{T}\left(\vec{p_0}+\vec{h}\right)-\vec{T}(\vec{p_0})-dT|_{\vec{p_0}}\left(\vec{h}\right)\right) = 0$$

הערה הביטוי מוגדר עבור כל $h\in B(0,r)\setminus\{0\}$

"דוגמה" אם $m=1$ ומסמנים $T(p)=f(p)$ T דיפרנציאבילית ב p_0 $L:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ אזי ניתן לכתוב את L לפי הנוסחה

$$\forall h\in\mathbb{R}^n;L(h_1,...,h_n) = \sum_{j=1}^{n}(\beta_j h_j)$$

ז"א אנו מקבלים את אותה הגדרה כמקודם עבור דיפרנציאביליות של f ב-p_0, כאשר

$$\beta_j = a_j=\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0)$$

סימון אם $T:G\mapsto\mathbb{R}^m$ דיפראנציאבילית ב $p_0\in G$ אזי ההעתקה ליניארית L אשר מופיעה בהגדרה נקראת הדיפרנציאל של T ב p_0. ומסומן ע"י $dT|_{p_0},DT|_{p_0}$ למשל אם $m=n=1$ אז $df|_{p_0}$ זו העתקה הנתונה ע"י

$$\forall h\in\mathbb{R};(df|_{p_0})(h) = f^{'}(p_0)h$$

אם $m=1$ אבל n כללי אזי

$$\begin{aligned}\forall h\in\mathbb{R}^n;df|_{p_0}(h_1,h_2,...,h_3) &= \sum_{j=1}^{n}a_jh_j\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0)h_j\\ &= \left(\vec{\nabla}f(p_0)\right)\cdot\vec{h}\\ &= grad(f)|_{p_0}\cdot\vec{h}\\ \vec{\nabla}f(p_0) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0),\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0),...,\frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)\right)\end{aligned}$$

[5] הגדרה ההרצאה ב 14.11.2004

הערה כידוע כל העתקה $T:G\mapsto\mathbb{R}^m$ כאשר $G\subset\mathbb{R}^n$ ניתנה להצגה בעזרת m פונקציות $f_j:G\mapsto\mathbb{R}$ ע"י

$$T(p) = (f_1(p), f_2(p), ..., f_n(p))$$

נזכיר שהגדרת $\vec{\varepsilon}$

$$\vec{\varepsilon}(h) = \frac{1}{\|h\|}\left[T(p_0+h)-T(p_0)-L(h)\right]$$

לכן הרכיבים ה j של $\vec{\varepsilon}$

$$\varepsilon_j = \frac{1}{\|h\|}\left[f_j(p_0+h)-f_j(p_0)-\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}h_k\right]$$

כאשר $(a_{j,k})$ המטריצה המייצגת את $dT|_{p_0}=L$.
לכן $\lim_{h\to0}\vec{\varepsilon}(h)=\vec{0} \iff \forall j;\lim_{h\to0}\varepsilon_j(h)=0 \iff f_j$ דיפרנציאבילית ב p_0 ומתקיים

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p_0) = a_{j,k}$$

מסקנה T דיפ' ב-$p_0 \iff f_j$ דיפ' ב p_0 לכל j

$$[df|_{p_0}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_0) \end{pmatrix}$$

נקראת מטריצת יעקובי.

הערה הדיפרנציאל[6] L הוא יחיד. ז"א אם קיימת העתקה ליניארית $\tilde{L}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ופונקציה $\tilde{\varepsilon}$ אשר מקיימים את כל התנאים הנ"ל נובע ש $L=\tilde{L}$

הגדרות

1. אם $G\subset H$ ואם T דיפרנציאבילית בכל נקודה של H נאמר T דיפרנציאבילית ב H.
2. אם H פתוחה ואם כל הנגזרות $\frac{\partial f_j}{x_i}$ רציפות בכל נקודה של H (כאשר $T(P)=(f_1,f_2,...,f_n)$) אזי נאמר $T\in C^1(H)$

2.3 חוק השרשרת

חוק השרשרת עבור משתנה יחיד

$$[f(g(x))]^{'} = f^{'}(g(x))\,g^{'}(x)$$

לפונקציה של שני משתנים

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial}{\partial x}f(x(t),y(t))\,x^{'}(t)+\frac{\partial}{\partial y}f(x(t),y(t))\,y^{'}(t)$$

באופן יותר כללי

$$\frac{d}{dt}f(x(s,t),y(s,t)) = \frac{\partial}{\partial x}f(x(s,t),y(s,t))\,x_t+\frac{\partial}{\partial y}f(x(s,t),y(s,t))\,y_t$$

[6] הרצאה ב 10.11.2004

משפט **חוק השרשרת** (בצורה כללית) נתונה $G \subset \mathbb{R}^n$ $T : G \mapsto \mathbb{R}^m$. נניח ש T דיפרנציאבילית בנקודה $p_0 \in G$. נתונה $W \subset \mathbb{R}^m$ פתוחה והעתקה $S : W \mapsto \mathbb{R}^k$. נניח ש $T(G) \subset W$ ו S דיפרנציאבילית ב-q_0. אזי $S \circ T$ מוגדרת בסביבה של p_0 ו $S \circ T$ דיפרנציאבילית ב p_0. כמוכן

$$\begin{aligned} d\left(S \circ T\right)|_{p_0} &= dS|_{T(p_0)} \circ dT|_{p_0} \\ \left[d\left(S \circ T\right)|_{p_0}\right] &= \left[dS|_{T(p_0)}\right]\left[dT|_{p_0}\right] \end{aligned}$$

הוכחה נסמן $A = dT|_{p_0}$, $B = dS|_{T(p_0)}$ אזי עבור $r > 0$ מתאים

$$\forall h \in B(0,r); T(p_o + h) = T(p_0) + Ah + \|h\| \varepsilon(h)$$

עבור $\rho > 0$ מתאים

$$\forall u \in B(0,\rho); S(q_o + u) = S(q_0) + Bu + \|u\| \tilde{\varepsilon}(u)$$

קיים $\gamma > 0$ שמקיים

$$\forall h \in B(0,\gamma); \|\|h\| \varepsilon(h)\| < \frac{\rho}{2}; \|Ah\| < \frac{\rho}{2}$$

(השתמשנו בכך ש $\|Ah\| \leq \|A\|_{HS} \|h\|$)
לכן

$$S \circ T(p_o + h) = S\left(T(p_0) + Ah + \|h\| \varepsilon(h)\right)$$

לכן נציב

$$u = Ah + \|h\| \varepsilon(h) \tag{6}$$

מקיים $\|u\| < \rho$ אזי

$$\begin{aligned} S \circ T(p_o + h) &= S\left(T(p_0) + u\right) \\ &= S(q_0) + Bu + \|u\| \tilde{\varepsilon}(u) \\ &= S \circ T(p_0) + B\left(Ah + \|h\| \varepsilon(h)\right) + \|u\| \tilde{\varepsilon}(u) \\ &= S \circ T(p_0) + BAh + \|h\| B\left(\varepsilon(h)\right) + \|u\| \tilde{\varepsilon}(u) \\ &= S \circ T(p_0) + dS|_{q_0} \circ dT|_{q_0}(h) + \|h\| B\left(\varepsilon(h)\right) + \|Ah + \|h\| \varepsilon(h)\| \tilde{\varepsilon}(u) \end{aligned}$$

נשאר להראות שהשארית בעלת הצורה $\|h\| \varepsilon^{''}(h)$ כך ש

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \vec{\varepsilon^{''}}\left(\vec{h}\right) = \vec{0}$$

נורמת השארית חסומה מלעיל ע"י

$$\begin{aligned} & \|h\| \|B\|_{HS} \|\varepsilon(h)\| + \|Ah\| \|\tilde{\varepsilon}(u)\| + \|h\| \|\varepsilon(h)\| \|\tilde{\varepsilon}(u)\| \\ \leq\ & \|h\| \|B\|_{HS} \|\varepsilon(h)\| + \|h\| \|A\|_{HS} \|\tilde{\varepsilon}(u)\| + \|h\| \|\varepsilon(h)\| \|\tilde{\varepsilon}(u)\| \\ =\ & \|h\| \left(\|B\|_{HS} \|\varepsilon(h)\| + \|A\|_{HS} \|\tilde{\varepsilon}(u)\| + \|\varepsilon(h)\| \|\tilde{\varepsilon}(u)\|\right) \end{aligned}$$

אזי

$$\left\|\varepsilon^{''}(h)\right\| \leq \left(\|B\|_{HS} \|\varepsilon(h)\| + \|A\|_{HS} \|\tilde{\varepsilon}(u)\| + \|\varepsilon(h)\| \|\tilde{\varepsilon}(u)\|\right)$$

נשאר לבדוק

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \|\tilde{\varepsilon}(u)\| = 0$$

כאשר $u = u(h)$ מוגדר ע"י (6)
מזה

תרגיל להוכיח ש

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\|\tilde{\varepsilon}(u(h))\| = 0$$

■

הערות (לגבי משפט כלל השרשרת)[7]

1. אפשר לנסח וגם להוכיח את המשפט נקודתית מבלי להזכיר את הקבוצה G ו W
2. הפונקציה $\vec{\varepsilon}''(h)$ מוגדרת

$$\varepsilon''(h) = \frac{B(\varepsilon(h))+A}{\|h\|}$$

3. צריך להוכיח ש $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\varepsilon''(h)=0$.
אפשר למשל להיעזר במשפט $Heine$. ז"א מספיק להראות שלכל סדרה $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ב $B(0,\gamma)\setminus\left\{\vec{0}\right\}$ אשר מקיים $\lim_{y\to\infty}\vec{h_j}=\vec{0}$

דוגמאות של חוק השרשרת

1. נתונות m פונקציות רציפות $\varphi_j:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ $j=1\dots m;$ נגדיר $T:[0,1]\mapsto\mathbb{R}^m$ ע"י

$$T(x) = (\varphi_1(x),\varphi_2(x)\dots\varphi_m(x))$$

אם φ_j גזירה ב $(0,1)$ לכל j אזי T דיפ' ב $(0,1)$.

$$\begin{aligned} dT|_x:\mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}^m \\ dT|_x &= h\left(\varphi_1'(x),\varphi_2'(x)\dots\varphi_m'(x)\right) \\ [dT] &= \begin{pmatrix}\varphi_1'(x)\\ \varphi_2'(x)\\ \vdots\\ \varphi_m'(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

יהי W קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^m$ אשר מכילה את הקבוצה

$$T([0,1])=\{(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\dots\varphi_m(t))\,|0\le t\le 1\}$$

נתונה פונקציה $f:W\mapsto\mathbb{R}$ שהיא דיפ' בכך נקודה $q\in T([0,1])$ נסמן

$$S:W\mapsto\mathbb{R};S=f$$

[7] הרצאה ב-14.11.2004

נגדיר $U=S\circ T:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
U(t) &= S(T(t))\\
&= S(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\ldots\varphi_m(t))\\
&= f(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\ldots\varphi_m(t))\\
dU|_t &= dS|_{T(t)}\circ dT|_t\\
[dU|_t] &= \left[dS|_{T(t)}\right][dT|_t]\\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(T(t)),\frac{\partial f}{\partial x_1}(T(t))\ldots\frac{\partial f}{\partial x_n}(T(t))\right)\begin{pmatrix}\varphi_1^{'}(t)\\ \varphi_1^{'}(t)\\ \vdots\\ \varphi_1^{'}(t)\end{pmatrix}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(T(t))\,\varphi_j^{'}(t)
\end{aligned}$$

ידוע שכאשר $V:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$. v דיפ' ב-$x_0\in(a,b)$ $\iff$ v גזירה ב-x_0 ומתקיים

$$[dV|_{x_0}] = \left(V^{'}(x_0)\right)$$

במקרה שלנו קיבלנו ש-U גזירה בכל $t\in(0,1)$ ומקיימת

$$U^{'}(t) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}(T(t))\,\varphi_j^{'}(t)$$

2. ניתן כמובן להרחיב

$$d(S\circ T\circ U)=dS\circ dT\circ dU \qquad (7)$$

הערה דרך להוכיח שאם $T:E\mapsto\mathbb{R}^m$ $E\subset\mathbb{R}^n$ ו $T(p)=(f_1(p)\ldots f_m(p))$ אזי כאשר T דיפ' ב-p

$$[dT|_p] = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}$$

בעזרת חוק השרשרת אפשר לתת הוכחה שניה:
נשתמש בנוסח (7) כאשר T העתקה הנתונה $U:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^n$, $S:\mathbb{R}^m\mapsto\mathbb{R}$ נתונה ע"י +

$$U(f) = (0\ldots f\ldots 0)+p$$

(f במקום ה j)

$$S(x_1,x_2\ldots x_m) = x_j$$

עבור i,j קבועים $1\le i\le n, 1\le j\le m$

2.4 משפטי רציפות

משפט עבור הנוסחה

$$f(p_0+h)-f(p_0) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(p_j)\,h_j$$

גרסה חדשה של נוסחה זו:
נתונות נקודות $p_0, h \in \mathbb{R}^n$. נניח ש f פונקציה ממשית של n משתנים שהיא דיפ' בכל נקודה מן הצורה $p_0 + \theta h; 0 \leq \theta \leq 1$ (מספיק שהיא רק רציפה בנקודות כאשר $\theta = 0, \theta = 1$). (ז"א f דיפ' בכל נקודה על ה"קטע הישר" המחבר את p_0 ו $p_0 + h$) אזי קיים $\theta \in (0,1)$ כך ש

$$\exists\theta \in (0,1) ; f(p_0 + h) - f(p_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0 + \theta h) h_j \tag{8}$$

הוכחה נגדיר $\psi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ ע"י $\psi(t) = f(p_0 + th)$

$$p_0 + th = \begin{pmatrix} p_{0_1} + th_1 \\ p_{0_2} + th_2 \\ \vdots \\ p_{0_n} + th_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$$

לפי חוק השרשרת

$$\psi'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0 + th) \varphi_j'(t) \tag{9}$$

ונשים לב ש- $\varphi_j'(t) = \left(p_{0_j} + th_j\right)' = h_j$.

לפי משפט $Lagrange$ קיים $\theta \in (0,1)$ כך ש

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)$$

נציב ב-(9) ונקבל את (8)

משפט (הכללה) להעתקה T אשר דיפ' בכל נקודה $p_0 + \theta h; 0 \leq \theta \leq 1$ ומעתיקה לתוך $\mathbb{R}^m$, $m > 1$.
נסמן את הרכיבים של T

$$T(p) = (f_1(p), f_2(p) \dots f_m(p))$$

נפעיל את משפט הקודם לכל אחד מהפונקציות $f_1, f_2 \dots f_m$ ונקבל m נקודות

$$j = 1 \dots m; \theta_j \in (0,1); p_0 + \theta_j h = p_j$$

כך ש

$$\forall j = 1 \dots m; f_j(p_0 + h) - f_j(p_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p_j) h_k$$

נוח לרשום את m המשוואות הנ"ל בצורה הבאה

$$(T(p_0 + h) - T(p_0))^t = \begin{pmatrix} f_1(p_0 + h) - f_1(p_0) \\ f_2(p_0 + h) - f_2(p_0) \\ \vdots \\ f_m(p_0 + h) - f_m(p_0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_1) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(p_1) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(p_2) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(p_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p_m) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(p_m) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

נסמן את המטריצה $m \times n$ שקיבלנו ע"י $L(p_1, p_2 \dots p_m)$

הערה L הוא כמעט יעקוביאן רק שהוא תלוי ביותר מנקודה אחת.

הגדרה אם $E \subset \mathbb{R}^n$ ו- $T : E \mapsto \mathbb{R}^n$ ואם $p \in E$ ו-T דיפ' ב-p אזי המטריצה $[dT|_p]$ נקראת מטריצת היעקוביאן של T ב p. והדטרמיננטה שלה נקראת היעקוביאן $Jacobian$ של T ב-p ומסומנת ע"י $J_T(p)$ ז"א $J_T(p) = det\,[dT|_p]$

2.5 משפט החד חד ערכיות הלוקאלית

משפט נניח ש $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ונתונה העתקה $T : B(p_0, r) \mapsto \mathbb{R}^n$ עבור $r > 0$ כמוכן נניח ש $T \in C^1(B(p_0, r))$ נניח ש $J_T(p_0) \neq 0$ אזי קיים $0 < r_0 \leq r$ כך ש T חח"ע ב $B(p_0, r_0)$.
כלומר אם $T(q_1) = T(q_2)$ ו-$q_1, q_2 \in B(p_0, r_0)$ אזי $q_1 = q_2$

הוכחה לפי המשפט הקודם לכל $q_1, q_2 \in B(p_0, r_0)$ מתקיים

$$(T(q_1) - T(q_2))^t = L(p_1 \dots p_n)(q_1 - q_2)$$

כאשר $p_0 = q_2, p_0 + h = q_1 \Rightarrow h = q_1 - q_2$ עבור נקודות מסוימות $p_1 \dots p_n$ כולן על הקטע הישר המחבר בין q_1, q_2 ז"א

$$\theta_j \in [0,1]; p_j = (1 - \theta_j) q_1 + \theta_j q_2$$

$$\begin{aligned} (p_j - p_0) &= (1 - \theta_j)(q_1 - p_0) + \theta_j (q_2 - p_0) \\ \|p_j - p_0\| &\leq (1 - \theta_j)\|q_1 - p_0\| + \theta_j \|q_2 - p_0\| \\ \Rightarrow p_j &\in B(p_0, r_0) \end{aligned}$$

נשאר[8] להוכיח $r_0 > 0$ מספיק קטן $det(L(p_1 \dots p_n)) \neq 0$ עבור כל בחירה של $p_1 \dots p_n$ ב$B(p_0, r)$
נניח בשלילה אזי לכל $k \in \mathbb{N}$ קיימות n נקודות $p_{1k} \dots p_{nk} \in B\left(p_0, \frac{1}{k}\right)$ וגם

$$det(L(p_1 \dots p_n)) = 0$$

כאשר $k \to \infty$

$$\forall j = 1 \dots n; \lim_{k \to 0} p_{jk} = p_0$$

$$\left(T \in C^1(B(p_0, r))\right) \Rightarrow \lim_{k \to 0} \frac{\partial f_j(p_{jk})}{\partial x_m} = \frac{\partial f_j(p_0)}{\partial x_m}$$

אזי

$$\begin{aligned} \lim_{k \to \infty} detL(p_{1k} \dots p_{mk}) &= detL(p_0 \dots p_0) \\ &= J_T(p_0) \neq 0 \end{aligned}$$

בסתירה להנחה
■

2.6 משפט ההעתקה הפתוחה

ניסוח ראשון נתונה העתקה $T : B(p_0, r) \mapsto \mathbb{R}^n$ כאשר $B(p_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ ו-$T \in C^1(B(p_0, r))$, $J_T(p_0) \neq 0$ אזי קיים $r_1 \in (0, r)$ ו-$\rho > 0$ שמקיים

$$B(T(p_0), \rho) \subset T(B(p_0, r_1))$$

ניסוח שני נתונה קבוצה פתוחה $W \subset \mathbb{R}^n$ והעתקה $T : W \mapsto \mathbb{R}^n$ וגם $\forall p \in W; J_T(p) \neq 0$. אזי $T(W)$ קבוצה פתוחה.

תרגיל הוכיחו שהניסוח השני הוא מסקנה של הניסוח הראשון.

[8] הרצאה ב 17.11.2004

הוכחת הניסוח הראשון

למה נתונה קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ ופונקציה $\varphi:E\mapsto\mathbb{R}$ נניח שקיימת נקודה $p_*\in E$ כך ש $\forall p\in E;\varphi(p_*)\le\varphi(p)$ נניח בנוסף ש p_* נקודה פנימית של E ז"א קיים $\gamma>0$ כך ש $B(p_*,\gamma)\subset E$ נניח גם שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ $j=1\dots n;$ כולן קיימות ב-p_* אזי $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(p_*)=0$ $j=1\dots n;$

הוכחה נקבע j ונגדיר

$$e_j=(0\dots0,1,0\dots1);u_j(t)=\varphi(p_*+te_j)$$

פונקציה זו מוגדרת עבור כל $t\in(-\gamma,\gamma)$

$$\frac{u_j(0+h)-u_j(0)}{h}=\frac{\varphi(p_*+he_j)-\varphi(p_*)}{h}\to\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(p_*)$$

לכן הנגזרת u' קיים ב-0 $u_j'(0)=\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(p_*)$

לכל $t\in(-\gamma,\gamma)$, $u(t)\ge u(0)$ ומכאן עם משפט פרמה מאינפי 1.

הוכחת ניסוח ראשון נבחר r_1 ($r_0>r_1$, r_0 במשפט הקודם) מספיק קטן כדי לקבל $T:\overline{B(p_0,r)}\mapsto\mathbb{R}^n$ חח"ע. יהי

$$\Gamma=\partial B(p_0,r)=\{p\in\mathbb{R}^n|\,\|p-p_0\|=r_1\}$$

לפי משפטים קודמים $T(\Gamma)$ קבוצה קומפקטית (מדוע?). ו-T רציפה. בגלל חח"ע של T הנקודה $q_0\notin T(\Gamma)$ ואזי מאחר שבין שתי קבוצות, אחת סגורה והשנייה קומפקטית, מתקבל מרחק גדול מאפס, אז

$$\exists\delta>0;\forall q\in T(\Gamma);\|q-q_0\|>\delta$$

(אם לא, אז קיים $p_k\in T(\Gamma)$ כך ש $\|q_k-q_t\|\le\frac{1}{k}$ לכל $k\in\mathbb{N}$ עוברים לתת סדרה ומקבלים סתירה)

טענה כאשר $\rho=\frac{\delta}{3}$ הכל עובד.
נתון נקודה כלשהי $q_1\in B\left(q_0,\frac{\delta}{3}\right)$ צ"ל שקיים $p_1\in B(p_0,r_1)$ כך ש $T(p_1)=q_1$
נגדיר

$$\varphi(p)=\|T(p)-q_1\|^2$$
$$\varphi:\overline{B(p_0,r_1)}\mapsto\mathbb{R}$$

(נוכיח שפונקציה זו מקבלת מינימום ב-$\overline{B(p_0,r_1)}$ בנקודה p_* ואחר כך ניראה ש $T(p_*)=q_1$ כלומר $p_1=p_*$.)
קיימת[9] נקודה p_* ב $\overline{B(p_0,r_1)}$ כך ש

$$\forall p\in\overline{B(p_0,r_1)};\varphi(p_*)\le\varphi(p)$$

(כי φ רציפה על קבוצה קומפקטית $\overline{B(p_0,r_1)}$)
אם $p_*\in\Gamma$ (פני הכדור) אז

$$\begin{aligned}\Rightarrow T(p_*)&\in T(\Gamma)\\ \Rightarrow\|T(p_*)-q_0\|&\ge\delta\\ \|T(p_*)-q_1\|&\ge\|T(p_*)-q_0\|-\|q_1-q_0\|\\ &\ge\delta-\frac{\delta}{3}=\frac{2\delta}{3}\end{aligned}$$

[9] הרצאה ב 21.11.2004

אבל $\|T(p_0)-q_1\| \le \frac{\delta}{3}$ ואז $\left(\frac{2\delta}{3}\right)^2 \le \varphi(p_*)$, $\varphi(p_0) \le \left(\frac{\delta}{3}\right)^2$ לכן המינימום של φ לא מתקבל בשפה Γ של $\overline{B(p_0,r)}$ ז"א p_* נקודה פנימית ולכן לפי הלמה מהשיעור הקודם

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(p_*) = 0$$

עבור $k=1\ldots n$

$$\begin{aligned}\varphi(p) &= \|T(p)-q_1\|^2\\ &= \sum_{j=1}^{n}(f_j(p)-q_{1,j})^2\\ \frac{\partial\varphi(p)}{\partial x_k} &= \sum_{j=1}^{n}2(f_j(p)-q_{1,j})\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p)\end{aligned}$$

בפרט

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(p_*)\\ &= \sum_{j=1}^{n}2(f_j(p)-q_{1,j})\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p)\end{aligned}$$

ניתן גם לכתוב באופן מטריצי כשמסמנים $y_j = f_j(p)-q_{1,j}$

$$(0\ldots0) = (y_1\ldots y_n)\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p_*) & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p_*)\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p_*) & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(p_*)\end{pmatrix}$$

מכיוון ש $det\{\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(p_*)\}_{j,k=1}^{n} \ne 0$ נקבל $2(f_j(p_*)-q_{i,j})=0$ עבור $j=1\ldots n$ ז"א

$$T(p_*) = q_1$$

■

הגדרה (העתקות ליפשיץ) נתונה קבוצה $E\subset\mathbb{R}^n$ והעתקה $T:E\mapsto\mathbb{R}^m$. נתונה קבוצה $G\subset E$ נאמר ש T מקיימת תנאי ליפשיץ עם קבוע ליפשיץ M ב G אם

$$\forall p,q\in G; \|T(p)-T(q)\| \le M\|p-q\|$$

משפט אם T כנ"ל כאשר E פתוחה, $T\in C^1(E)$ ו G קומפקטית. אזי קיים קבוע $M=M_{G,T}$ כך ש

$$\|T(p)-T(q)\| \le M_{G,T}\|p-q\|$$

הוכחה

1. נניח ש G קבוצה קמורה.

$$(T(p)-T(q))^t = L(p_1\ldots p_n)(p-q)^t$$

(כאשר L המטריצה $p_1 \dots p_n$ נקודות על הקטע המחבר בין p לבין q)

$$\begin{aligned} M_{GT} &= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sup_{s\in G}\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(s)\right|^2} \\ &\geq \|L\|_{HS} \\ \|T(p)-T(q)\| &\leq M_{G,T}\|p-q\| \end{aligned}$$

2. (יתר המשפט להוכיח) אפשר להחליף את M_{GT} כאשר G קמורה ע"י

$$\sup_{s\in G}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(s)\right|^2}$$

2.7 דיפרנציאביליות ותנאי C^1 עבור העתקות הפוכות

הערה עבור $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ אם $f:(a,b)\mapsto\mathbb{R}$ גזירה וחח"ע ואם $f^{'}$ רציפה ושונה מ 0 בכל (a,b) אזי קיימת פונקציה הפוכה גזירה g מוגדרת בקטע פתוח שקצוותיו הם $f(a)$ ו $f(b)$ וגם

$$g^{'}(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$g^{'}$ רציפה כפונקציה מורכבת של פונקציות רציפות.

למה יהי D קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$ ונתונה העתקה $T:D\mapsto\mathbb{R}^n$ נניח ש T דיפ' ב $p\in D$ ו-$dT|_p$ העתקה הפיכה (ז"א $J_T(p)\neq 0$) אזי קיימים קבועים $c,r>0$ כך ש

$$\forall h\in B(0,r);\|T(p+h)-T(p)\| \geq c\|h\|$$

הוכחה נסמן $A=\left[(dT|_p)^{-1}\right]$ (מטריצה של העתקה הפוכה)

$$\forall x\in\mathbb{R}^n;\|Ax\| \leq \|A\|_{HS}\|x\| \tag{10}$$

לכן

$$\begin{aligned} x=dT|_p h &\iff h=(dT|_p)^{-1}x \\ \|h\| &\leq \|A\|_{HS}\|x\| \\ &= \|A\|_{HS}\|dT|_p h\| \\ \|dT|_p h\| &\geq \frac{\|h\|}{\|A\|_{HS}} \end{aligned} \tag{11}$$

בגלל דיפרנציאביליות של T ב-p מתקיים

$$\begin{aligned} \exists r_1>0;\forall h\in B(0,r_1);T(p+h)-T(p) &= dT|_p h+\|h\|\varepsilon(h) \\ \Rightarrow \lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\vec{\varepsilon}\left(\vec{h}\right) &= \vec{0} \end{aligned}$$

לכן

$$\exists r>0;\forall h\in B(0,r);\|\varepsilon(h)\| \leq \frac{1}{2\|A\|_{HS}}$$

עבור כל h כזה (כלומר ב-$B(0,r)$ נקבל

$$\begin{aligned} \|T(p+h)-T(p)\| &= \|dT|_p h+\|h\|\varepsilon(h)\| \\ &\geq \|dT|_p h\|-\|h\|\|\varepsilon(h)\| \\ (11)\Rightarrow &\geq \frac{\|h\|}{\|A\|_{HS}}-\frac{1}{2\|A\|_{HS}}\|h\| \\ &= \left(\frac{1}{2\|A\|_{HS}}\right)\|h\| \end{aligned}$$

(אזי $c=\left(\frac{1}{2\|A\|_{HS}}\right)$)

■

משפט תהי D קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^n$ ונניח שההעתקה $T:D\mapsto\mathbb{R}^n$ ב-$C^1(D)$ נניח ש $p\in D, J_T(p)\neq 0$ אזי ההעתקה $S=$"T^{-1}" שהיא $local\ inverse$ הופכית מקומית, של T אשר מוגדרת בסביבה של $T(p)$ היא דיפ' ב-$T(p)$ וגם

$$d\left(T^{-1}\right)|_{T(p)} = \left(dT|_p\right)^{-1}$$

הוכחה עבור $p\in D$ נתונה אם $J_T(p)\neq 0$ מובטח ממשפטים קודמים שקיימים $r>0$ כך ש T חח"ע ב $B(p,r)$ ו $W=T(B(p,r))$ היא קבוצה פתוחה. נגדיר $\varepsilon(h)$; $\begin{matrix}\forall h\in B(0,r)\\ h\neq 0\end{matrix}$ ע"י

$$T(p+h)-T(p) = dT|_p h+\|h\|\varepsilon(h)$$

וע"פ הנתון $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\vec{\varepsilon}\left(\vec{h}\right)=\vec{0}$. נסמן את ההעתקה הפוכה מקומית מ-W על $B(p,r)$ ע"י T^{-1} ע"פ הלמה הנ"ל אפשר להניח ש

$$\forall h\in B(0,r);\|T(p+h)-T(p)\| \geq c\|h\|$$

(אולי לצורך זה נצטרך לדרוש $r>0$ יותר קטן)

נבחר $r_2>0$ כך ש $B(T(p),r_2)\subset W$.$q=T(p)$ נגדיר[10]

$$\begin{aligned} \forall u\in B(0,r_2);h(u) &= T^{-1}(q+u)-T^{-1}(q) \\ \Rightarrow T(p+h(u))-T(p) &= T\left(T^{-1}(q+u)\right)-q \\ &= q+u-q=u \end{aligned}$$

לכל $0\neq u\in B(0,r_2)$ נגדיר

$$\tilde{\varepsilon}(u) = \frac{1}{\|u\|}\left[T^{-1}(q+u)-T^{-1}(q)-\left(dT|_p\right)^{-1}u\right]$$

כדי להוכיח את המשפט נראה

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\vec{\tilde{\varepsilon}}\left(\vec{h}\right) = \vec{0}$$

אבל

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(u) &= \frac{1}{\|u\|}\left[h(u)-\left(dT|_p\right)^{-1}u\right] \\ &= \frac{1}{\|u\|}\left(dT|_p\right)^{-1}\left[dT|_p h(u)-u\right] \\ \|\tilde{\varepsilon}(u)\| &\leq \frac{1}{\|u\|}\|dT|_p h(u)-u\|\left\|\left(dT|_p\right)^{-1}\right\|_{HS} \end{aligned}$$

[10] הרצאה ב 24.11.2004

לכן מספיק להראות

$$\frac{1}{\|u\|}\left\|dT|_p h(u)-u\right\| \xrightarrow[u\to\infty]{} 0$$

אבל

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|u\|}\left\|dT|_p h(u)-u\right\| &= \frac{1}{\|u\|}\left\|T(p+h(u))-T(p)-\|h(u)\|\varepsilon(h(u))-u\right\| \\ &= \frac{1}{\|u\|}\left\|u-\|h(u)\|\varepsilon(h(u))-u\right\| \\ &= \frac{\|h(u)\|}{\|u\|}\left\|\varepsilon(h(u))\right\|\end{aligned}$$

כאשר

$$u \to 0$$

בגלל ש T^{-1} רציפה (מדוע?) אז

$$\Rightarrow h(u)\to 0$$

כלומר לפי ההגדרה

$$\Rightarrow \|\varepsilon(h(u))\|\to 0$$

נשאר להראות $\frac{\|h(u)\|}{\|u\|}$ חסומה. אבל הוכחנו בלמה קודמת

$$\|T(p+h)-T(p)\| \geq c\|h\|$$

עבור c $\forall h\in B(0,r)$ בפרט כאשר $h=h(u)$ ז"א

$$\|u\| \geq c\|h(u)\|$$

בגלל החח"ע (לפי משפט קודם)

$$h(u)=0 \iff u=0$$

כלומר

$$\frac{\|h(u)\|}{\|u\|} \leq \frac{\|h(u)\|}{c\|h(u)\|}\leq\frac{1}{c}$$

■

מסקנה נתונה $T\in C^1(D)$ אשר מקיימת את כל התנאים של המשפט הנ"ל. תהי $\Omega\subset D$ קבוצה פתוחה כך ש $T:\Omega\mapsto\mathbb{R}^n$ חח"ע ו- $J_T(p)\neq 0$ עבור כל $p\in\Omega$. ותהא ההעתקה

$$T^{-1}(W) \mapsto \Omega$$

כאשר $W=T(\Omega)$ אזי $T^{-1}\in C^1(W)$

הוכחה נסמן

$$\begin{aligned}\forall p\in\Omega; T(p) &= (f_1(p)\dots f_n(p)) \\ \forall q\in W; T^{-1}(q) &= (g_1(p)\dots g_n(p))\end{aligned}$$

אזי

$$\left[dT^{-1}|_q\right] = \{a_{ij}(q)\}=\left\{\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(q)\right\}$$

כי מהמשפט הקודם T^{-1} דיפרנציאבילית.
נסמן

$$\left[dT|_{T^{-1}(q)}\right] = \{b_{ij}(q)\} = \left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(T^{-1}(q)\right)\right\}$$

מכוון ש T^{-1} רציפה מ W ל Ω. וגם $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ רציפה ב Ω. לכן $b_{ij}(q)$ רציפות לכן

$$\begin{aligned} d\left(T^{-1}\right)|_{T(p)} &= \left(dT|_P\right)^{-1} \\ dT^{-1}|_q &= dT^{-1}|_{T^{-1}(q)} \end{aligned}$$

לכן

$$\{a_{i,j}(q)\} = \left(\{b_{i,j}(q)\}\right)^{-1}$$

לפי חוק קרמר$a_{ij}(q)$ היא מנה של פולינומים ב $b_{\alpha,\beta}(q)$ עבור α,β שונים. הפולינום במכנה לא מתאפס (כי $J_T \neq 0$ לכל $p \in \Omega$) לכן $a_{i,j}(q)$ היא פונקציה רציפה של q.
(מדוע?)
■

2.8 משפט הפונקציות הסתומות

דוגמאות

1. נתונה[11] המשוואה $f(x,y) = x^2 + y^2 = 25$ בסביבה $(3,4)$ המשוואה $f(x,y) = 25$ מגדירה y כפונקציה של x. כלומר קימת פונקציה גזירה $Y(x)$ מוגדרת בסביבה של $x=3$ כך שבסביבה

$$f(x,y) = 25 \iff y = Y(x)$$

למרות שלא ידוע נוסחה עבור $Y(x)$ אפשר לחשב את $Y'(x)$ לפחות עבור $x=3$.
$Y(X)$ נקראת פונקציה סתומה $Implicit\ function$ ותהליך החישוב $Y'(x)$ נקראת גזירה סתומה

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + Y^2(x)\right) = 0$$

לכל x בסביבה מסוימת של $x=3$.
נגזור לפי x

$$\begin{aligned} f_1'(x, Y(x)) + f_2'(x, Y(x))\, Y'(x) &= 0 \\ \Rightarrow Y'(x) &= -\frac{f_1'(x, Y(x))}{f_2'(x, Y(x))} \end{aligned}$$

נוסחה ל $Y(x)$ לא ידוע אבל לפחות כאשר $x=3, Y(3)=4$.

סיכום (לא מדויק) נתונה פונקציה "נחמדה" $f(x,y)$ ונקודה (x_*, y_*) וקבוע c כל ש

$$f(x,y) = c$$

בתנאים מתאימים (כולל $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$) אפשר להוכיח שקיימת פונקציה גזירה

$$Y : (x_* - \delta, x_* + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$$

כך שבסביבה (ב-$\mathbb{R}^2$ דו ממדית) מסוימת של (x_*, y_*)

$$y = Y(x) \iff f(x,y) = c$$

כמו כן אפשר לחשב את

$$-\frac{f_1'(x_*, y_*)}{f_2^2(x_*, y_*)} = Y'(x_*)$$

[11] הרצאה ב 28.11.2004

2. נתונה $f(x,y)=\left(x^2+y^2-25\right)(x-y)^2$ אז על $\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$ אין אפשרות לקבל פונקציה.
3. נתונה $f(x,y)=x^2+y^2+z^2=9$ אז לדוגמה בנקודה $(2,2,1)$ ניתן לחלץ
4. נתונה $\vec{f}(x,y,z)=\vec{c}$

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \\ x+y+z \end{cases}$$
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר הפתרונות הם חיתוך כדור עם משטח מעגל ואז אין פתרונות לעומת זאת אם נבחר

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$$

פתרון מקומי קרוב לנקודה $(2,2,1)$. קיימות פונקציות $x(z),y(z)$ מגדרות בסביבה מסוימת (תלת-ממדית) של

$$z = 1$$

כך שבסביבה תלת-ממדית מסוימת של $(2,2,1)$

$$\vec{f}(x,y,z)=\vec{c} \iff x=X(z),y=Y(z)$$

משפט הפונקציות הסתומות נתונה הפונקציה $\vec{f}(\vec{x},\vec{y})=\vec{c}$

משפט נתונים $n,m\in\mathbb{N}$, נתונה קבוצה פתוחה $D\subset\mathbb{R}^{n+m}$ ונסמן כל נקודה ב D ע"י

$$\vec{p}=(\vec{x},\vec{y})\in D,\vec{x}\in\mathbb{R}^m,\vec{y}\in\mathbb{R}^n$$

נתונה העתקה

$$F:D \mapsto \mathbb{R}^n$$
$$F \in C^1(D)$$

נתונה נקודה קבועה $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$ נניח

1. הקבוצה

$$E = \left\{\vec{p}\in D|\vec{F}(\vec{p})=\vec{c}\right\}\neq\phi$$

לא ריקה.

2. בפרט $\exists\vec{p_*}=\overrightarrow{(\vec{x_*},\vec{y_*})}\in E;\vec{x_*}\in\mathbb{R}^m,\vec{y_*}\in\mathbb{R}^n$
3. נגדיר העתקה $\tilde{F}:B_{(n)}(\vec{y_*},r_*)\mapsto\mathbb{R}^n$ ע"י

$$\tilde{F}(\vec{y}) = F(\vec{x_*},\vec{y})$$

כאשר $r_*>0$ מספיק קטן להבטיח ש

$$B_{(m+n)}(\vec{p_*},r_*) \subset D$$

כלומר

$$y\in B(\vec{y_*},r_*) \Rightarrow \overrightarrow{(\vec{x_*},\vec{y})}\in B_{(m+n)}(\vec{p_*},r_*)$$

4. נניח ש $J_{\tilde{F}}\left(y_{*}\right)\neq0$ (למשל אם $m=n=1$ ו $F\left(x,y\right)=f\left(x,y\right)$ אז תנאי זה שקול לתנאי $\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_{*},y_{*}\right)\neq0$)

נשים לב $\tilde{F}$ מעתיקה כדור ב-$\mathbb{R}^{n}$ לתוך $\mathbb{R}^{n}$

אזי

קיים מספר $r>0$ והעתקה $\Phi:B_{(m)}\left(\vec{x_{*}},r\right)\mapsto\mathbb{R}^{n}$ וגם $\Phi\in C^{1}\left(B\left(\vec{x_{*}},r\right)\right)$ כך שלכל נקודה

$$\overrightarrow{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}\quad\in\quad B_{(m+n)}\left(\vec{p_{*}},r\right)$$

כך ש

$$F\left(\vec{x},\vec{y}\right)=c\quad\Longleftrightarrow\quad\vec{y}=\Phi\left(x\right)$$

כלומר

$$E\cap B_{(m+n)}\left(\vec{p_{*}},r\right)\quad=\quad B_{(m+n)}\left(\vec{p_{*}},r\right)\cap\left\{ \left(\vec{x},\vec{\Phi}\left(\vec{x}\right)\right)|\vec{x}\in B_{(m,n)}\left(\vec{x_{*}},r\right)\right\}$$

מסקנה מהמשפט הנ"ל נובעות שיטות לחישוב $d\Phi|_{\vec{x_{*}}}$ כלומר את כל הנגזרות החלקיות של כל הרכיבים של Φ. הנוסחאות נובעות מגזירת הזהות (או כל רכיב שלו)

$$F\left(\vec{x},\vec{\Phi}\left(\vec{x}\right)\right)\quad=\quad\vec{c}$$

הוכחה נגדיר העתקה חדשה $T:D\mapsto\mathbb{R}^{n+m}$ ע"י

$$\vec{T}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\quad=\quad\left(x_{1},x_{2},\ldots,x_{m},f_{1}\left(\vec{x},\vec{y}\right),f_{2}\left(\vec{x},\vec{y}\right),\ldots,f_{n}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right)=\overrightarrow{\left(\vec{x},\vec{F}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right)}$$

כאשר $f_{j}\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ מסמן את הרכיב ה j של $\vec{F}\left(\vec{x},\vec{y}\right)$
ברור ש $T\in C^{1}\left(D\right)$. אז

$$\left[dT|_{(x,y)}\right]\quad=\quad\left(\begin{array}{cccccc}
1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\\
\frac{\partial f_{1}}{\partial x_{1}} & \vdots & \frac{\partial f_{1}}{\partial x_{m}} & \frac{\partial f_{1}}{\partial y_{1}} & \cdots & \frac{\partial f_{1}}{\partial y_{n}}\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{\partial f_{n}}{\partial x_{1}} & \cdots & \frac{\partial f_{n}}{\partial x_{m}} & \frac{\partial f_{n}}{\partial y_{1}} & \cdots & \frac{\partial f_{n}}{\partial y_{n}}
\end{array}\right)$$

הרבע התחתון ימני של המטריצה $B=\left\{ \frac{\partial f_{j}}{\partial y_{k}}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right\} _{j,k=1}^{n}$
וגם

$$J_{T}\left(x,y\right)\quad=\quad detB=det\left\{ \frac{\partial f_{j}}{\partial y_{k}}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right\} _{j,k=1}^{n}$$

בפרט

$$J_{T}\left(\vec{x_{*}},\vec{y_{*}}\right)\quad=\quad J_{\tilde{F}}\left(\vec{y_{*}}\right)\neq0$$

לכן לפי משפטים קודמים קיים $r_{1}>0$ כך שעבור

$$\Omega=B\left(\vec{p_{*}},r_{1}\right)$$

אז $T:\Omega\mapsto\mathbb{R}^{m+n}$ חח"ע. בנוסף $\forall\vec{p}\in\Omega; J_T(\vec{p})\neq 0$ אז $T(\Omega)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^{n+m}$ בפרט

$$\exists r_2>0; B\left(T\left(p_*\right),r_2\right) \subset T(\Omega)$$

$(T(p_*)=q_*)$ נבחר

$$r = \min\left(r_1,r_2\right)$$

נגדיר

$$\begin{aligned} T^{-1}:B\left(\vec{q_*},r\right) &\mapsto \mathbb{R}^{m+n}\\ \vec{T^{-1}}\left(\vec{x},\vec{y}\right) &= \overrightarrow{\left(\vec{U}\left(\vec{x},\vec{y}\right),\vec{V}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right)}\\ U\left(\vec{x},\vec{y}\right) &= \left(\psi_1\left(\vec{x},\vec{y}\right),\ldots,\psi_m\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right)\\ V\left(\vec{x},\vec{y}\right) &= \left(\psi_{m+1}\left(\vec{x},\vec{y}\right),\ldots,\psi_{m+n}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right) \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} \vec{T^{-1}}\left(\vec{T}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right) &= \overrightarrow{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}\\ \Rightarrow \vec{T^{-1}}\left(\vec{x},F\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right) &= \overrightarrow{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}\\ \overrightarrow{\left(\vec{U}\left(\vec{x},\vec{F}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right),\vec{V}\left(\vec{x},\vec{F}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right)\right)} &= \overrightarrow{\left(\vec{x},\vec{y}\right)}\\ \Rightarrow \vec{U}\left(\vec{x},\vec{F}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right) &= \vec{x}\\ \vec{V}\left(\vec{x},\vec{F}\left(\vec{x},\vec{y}\right)\right) &= \vec{y} \end{aligned}$$

נגדיר

$$\Phi\left(\vec{x}\right) = \vec{V}\left(\vec{x},\vec{c}\right)$$

$$\begin{aligned} \vec{T}\left(\vec{p_*}\right) &= \overrightarrow{\left(\vec{x_*},\vec{F}\left(\vec{x_*},\vec{y_*}\right)\right)}\\ &= \left(\vec{x_*},\vec{c}\right) \end{aligned}$$

לכן Φ מוגדרת ב $B_{(m)}\left(\vec{x_*},r\right)$

$$\vec{x}\in B_{(m)}\left(\vec{x_*},r\right) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{\left(\vec{x},\vec{c}\right)}\in B_{(m+n)}\left(\vec{q_*},r\right)$$

$$\begin{aligned} \Phi &\in C^1\left(B\left(\vec{q_*},r\right)\right)\\ T\left(T^{-1}\left(x,y\right)\right) &= \left(x,y\right)\\ T\left(U\left(x,y\right),V\left(x,y\right)\right) &= \left(x,y\right)\\ \left(U\left(x,y\right),F\left(U\left(x,y\right),V\left(x,y\right)\right)\right) &= \left(x,y\right)\\ U\left(x,y\right)=x, F\left(U\left(x,y\right),V\left(x,y\right)\right) &= y \end{aligned}$$

$$\forall\left(x,y\right)\in B_{(m+n)}\left(p_*,r\right); F\left(x,V\left(x,y\right)\right) = y$$

בפרט אם $y=c$

$$\begin{aligned} F\left(x,V\left(x,c\right)\right) &= c\\ F\left(x,\Phi\left(x\right)\right) &= c \end{aligned}$$

$$y = \Phi(x) \Rightarrow (x,y) \in E$$

$$\begin{aligned}(x,y) \in E &\Rightarrow F(x,y) = c \\ y &= V(x, F(x,y)) = V(x,c) = \Phi(x)\end{aligned}$$

■

חישוב $[d\Phi|_x]$

1. **באופן[12] אנלוגי נגדיר** $\tilde{V}(y) = V(x^*, y)$

$$\begin{aligned}T^{-1}(x,y) &= (x, V(x,y)) \\ \left[dT^{-1}|_{(x,y)}\right] &= \begin{pmatrix} I_{m\times m} & O_{m\times n} \\ A'_{n\times m} & B'_{n\times n}\end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial \psi_{m+n}}{\partial y_m}(x,y) \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial y_n}(x,y) & \cdots & \frac{\partial \psi_{m+n}}{\partial y_n}(x,y)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נסמן

$$B' = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial \psi_{m+n}}{\partial y_m}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{m+1}}{\partial y_m}(x,y) & \cdots & \frac{\partial \psi_{m+n}}{\partial y_m}(x,y)\end{pmatrix}$$

אזי (**כי** $\left[dT^{-1}|_{(x,y)}\right]\left[dT|_{(x,y)}\right] = I$)

$$\begin{aligned}B' &= B^{-1} \\ A' + B'A &= 0 \\ A' &= -B^{-1}A\end{aligned}$$

השוואת רכיבי המטריצות כאשר $(x,y) = (x_*, y_*)$ **נותנת נוסחאות עבור כל רכיבי** $[d\Phi|_x]$

2. **הזהות**

$$F(x, \Phi(x)) = c$$

לכל $x \in B_m(x_*, r)$

$$f_j(x_1, \ldots, x_m, \varphi_1(\vec{x}), \ldots, \varphi_n(\vec{x})) = c_j$$

נגזור חלקית לפי x_k

$$0 = \frac{\partial c_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_*, y_*) \cdot 1 + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial y_\alpha}(x_*, y_*) \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k}$$

קיבלנו מערכת של n **משוואות ליניאריות ב** n **נעלמים** $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k}(x_*)$ $\alpha = 1, 2, \ldots, n;$

[12] הרצאה ב 1.12.2004

3 אקסטרמום של פונקציה רציפה של כל קבוצה ב-$\mathbb{R}^n$

הגדרה נתונה $E \subset \mathbb{R}^n$, פונקציה רציפה $f: E \mapsto \mathbb{R}$. נאמר ש-p_* היא מקסימום (מינימום) של f ביחס ל-E אם $f(p) \leq f(p_*)$ ($f(p) \geq f(p_*)$)
(אקסטרמום היא מילה משותפת למקסימום ומינימום)

הערה

1. אם E קומפקטית $\Leftarrow$ קיימות נקודות מינימום ומקסימום.
אם p_* נקודת אקסטרמום של F ביחס ל E ואם p_* גם נקודה פנימית של E אזי הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ אם הן קיימות מתאפסות ב $p = p_*$

דוגמה נגדיר

$$f(x) = x^2 + y^2 - 4x - 4y$$

$$f: D \mapsto \mathbb{R}$$

כאשר

$$D = \left\{(x, y) \,|x \geq 0; x^2 + y^2 \leq 25\right\}$$

מצא נק' אקסטרמום

פתרון אם יש אקסטרמום בחלק הפנימי של D אז מתקיים בו

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_*, y_*) = 0$$

זה קורה רק בנקודה $(2, 2)$.
אם נקודת אקסטרמום לא פנימית אזי היא בשפה
בחלק הישר $L = \{(x, y) \,|x = 0, y \in [-5, 5]\}$ אם אקסטרמום p_* ב-L ז"א

$$p_* = (0, x_*)$$

הפונקציה

$$\psi(y) = f(0, y) = y^2 - 4y$$

יש אקסטרמום ב $y = y_*$ לגבי הקטע $[-5, 5]$ ז"א

$$\psi'(y_*) = 0 \iff y_* = 2$$

או $y_* = \pm 5$
בחלק של העקום

$$U = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 = 25\right\}$$

נבנה פונקציית עזר $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; u(\theta) = f(5\cos\theta, 5\sin\theta)$ נחפש אקסטרמום של u על הקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$u(\theta) = 25 - 20\cos\theta - 20\sin\theta$$

הערכים[13] של $u(\theta)$ על $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ הם הערכים של f על השפה.
נקודות חשודות $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$

$$u^{'}(\theta)=0 \quad\Rightarrow\quad \theta=\frac{\pi}{4}$$

כלומר נקודה רלוונטית $\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

$$\begin{aligned}
f(2,2) &= 4+4-8-8=-8\\
f(0,2) &= 4-8=-4\\
f(0,5) &= 25-20=5\\
f(0,-5) &= 25+20=45\\
\left(\frac{5}{\sqrt{2}},\frac{5}{\sqrt{2}}\right) &= 25-4\sqrt{2}25=25\left(1-4\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

הערה בגלל הצורה המיוחדת של f בתרגיל זה יש אפשרות לפתור אותו באופן כמעט מיידי

$$f(x,y)+8 = (x-2)^2+(y-2)^2-8$$

שיטה שניה לחיפוש אקסטרמום של f על עקום.

1. $\varphi(y)=f\left(\sqrt{25-y^2},y\right)$ בקטע $[-5,5]$
2.

שיטת כופלי לגרנז' שלבי השיטה

- מצאו פונקציה ב-C^1 $g(x,y)$ שמקבלת ערך קבוע בעקום- C

$$g(x,y) = x^2+y^2$$

(או $g=const$)

- מצאו נקודות קצה של C אם יש

$$(0,5),(0,-5)$$

- מצאו נקודות $(x,y)\in C$ שבה $\vec{\nabla}g(x,y)=\vec{0}$
- מצא נקודות (x,y) ב-C (התנאי שב-C נותן משוואה), אשר מקיימות את המשוואה

$$\vec{\nabla}f(x,y)+\lambda\vec{\nabla}g(x,y) = \vec{0}$$

עבור ערך מתאים של $\lambda\in\mathbb{R}$ המשתנה החדש λ נקרא כופל לגרנז'.

טענה (ההוכחה בדרך) האקסטרמום של f ב- C מתקבל לפחות באחת מן הנקודות אשר מתקבלות בשיטה שהראינו.

דוגמה שניה לשיטת לגרנז' הפעם עם שני אילוצים ושני כופלים
תהי $f(x,y,z)=Ax+By+Cz$ A,B,C קבועים.
יהי C חיתוך שני משטחים

$$\begin{aligned}
x+y+z &= 0\\
x^2+y^2+z^2 &= 1
\end{aligned}$$

[13] הרצאה ב 5.12.2005

- מצאו שתי פונקציות $g_1, g_2 \in C^1\left(\mathbb{R}^3\right)$ כך ש

$$g_1\left(x,y,z\right)=c_2, g_2\left(x,y,z\right)=c_1$$

בכל נקודה של c

- מצאו נקודות קצה של C
- מצאו נקודות $(x,y,z)\in C$ אם יש, אשר בהן

$$\vec{\nabla} g_1 \times \vec{\nabla} g_2 = \vec{0}$$

ז"א

$$rank\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} < 2$$

- מצאו נקודות $(x,y,z)\in C$ אם יש כך שעבור λ_1, λ_2 מתאימים מתקיים

$$\nabla f\left(x,y,z\right)+\lambda_1 \nabla g_1\left(x,y,z\right)+\lambda_2 \nabla g_2\left(x,y,z\right) = \vec{0}$$

הערה ניתן גם את שני התנאים האחרונים לרשום

$$rank\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} < 3$$

המשפט הכללי על כופלי לגרנז' (למעשה בניסוח הבסיסי לא מופיע אף כופל לגרנז')
תהי D תת-קבוצה פתוחה של $n,m\in\mathbb{N},\mathbb{R}^{m+n}$ נתונה העתקה $G:D\mapsto\mathbb{R}^n$, כך ש $G\in C^1(D)$ נתונה פונקציה $C^1(D)\ni f:D\mapsto\mathbb{R}$. תהי $E\subset D$ קבוצה סגורה. כך ש

$$\forall\vec{x}\in E; G\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$$

(יתכן שיש $\vec{x}\notin E$ שבה $G\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$)
נאמר שנקודה $p_*\in E$ היא נקודת קצה של E אם לכל $r>0$, הכדור $B_{(m+n)}\left(p_*,r\right)$ מכיל נקודה

$$p\notin E; G\left(p\right) = \vec{0}$$

אם קיימת נקודה $p_1\in E$ כך ש

$$\forall p\in E; f\left(p\right) \leq f\left(p_1\right)$$

אזי

1. או p_1 נקודת קצה של E
2. או להעתקה $T:D\mapsto\mathbb{R}^{n+1}$ אשר מוגדרת ע"י

$$T\left(p\right) = \left(G\left(p\right), f\left(p\right)\right)$$

יש דיפרנציאל

$$\left[dT|_{p_1}\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \frac{\partial g_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_{n+m}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial z_1} & \frac{\partial g_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial z_{n+m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial z_1} & \frac{\partial g_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial z_{n+m}} \\ \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial f}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial z_{n+m}} \end{pmatrix}$$

ב-p_1 כך ש

$$rank\left[dT|_{p_1}\right] \quad \leq \quad n$$

הערה נסמן $G(p) = (g_1(p), \ldots, g_n(p))$ אם בחרנו את $g_1, \ldots, g_n$ בהתאם לקבוצה נתונה כך ש

$$\forall p \in E; rank\left[dG|_p\right] \quad = \quad n$$

אז התנאי (??) שקול לתנאי

$$\vec{\nabla} f(\vec{p}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \vec{\nabla} g_j(p_*)$$

עבור קבועים מתאימים $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$(מספר האילוצים $= n <$ מספר המשתנים $= m + n$)

הוכחה

$$G(p) \quad = \quad (g_1(p), \ldots, g_n(p))$$

נניח ש p_1 נקודת מקסימום ואינה נקודת קצה. נוכיח ש (??) מתקיים. נוח לסמן $f(p) = g_{n+1}(p)$ אז

$$T(p) \quad = \quad (g_1(p), g_2(p), \ldots, g_{n+1}(p))$$

ונסמן $A = \left[dT|_{p_1}\right]$ נניח בשלילה (??) לא מתקיים, ונראה שדווקא p_1 לא נק' מקסימום (וגם לא נקודת מינימום) נתון

$$rankA \quad = \quad n + 1$$

כלומר נובע שיש $n+1$ עמודות של המטריצה A אשר יוצרות מטריצה $(n+1) \times (n+1)$ הפיכה. נבחר $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n+1)$ מספרים שלמים ב $\{1, \ldots, m+n\}$ כך ש

$$B = \left\{\frac{\partial g_i}{\partial x_{\alpha(j)}}(p_1)\right\}_{i=1,j=1}^{n+1,n+1}$$

היא המטריצה ההפיכה הזו. נניח ש $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2\ldots$ אחרת נבצע פרמו-טציה ברישום המשתנים. נכתוב $x \in \mathbb{R}^{n+1}, y \in \mathbb{R}^{m-1}; p = (x, y)$ (אם $m = 1$ פשוט נכתוב $p = x$) בפרט נסמן[14] $p_1 = (x_1, y_1)$. נבחר $r > 0$ מספיק קטן, כך ש $B(p_1, r) \subset D$ (D פתוחה). נגדיר העתקה $S : B(x_1, r) \mapsto \mathbb{R}^{n+1}$ ע"י

$$\begin{aligned} S(x) \quad &= \quad T(x, y_1) \\ &= \quad (g_1(x, y_1), g_2(x, y_1), \ldots, g_{n+1}(x, y_1)) \end{aligned}$$

אבל

$$x \in B(x_1, r) \quad \Rightarrow \quad (x, y_1) \in B(p_1, r)$$

נחשב יעקוביאן

$$\begin{aligned} J_S(X_1) \quad &= \quad detB \\ &= \quad det\left\{\frac{\partial g_i}{\partial x_{\alpha(j)}}(p_1)\right\}_{i=1,j=1}^{n+1,n+1} \\ &\neq \quad 0 \end{aligned}$$

[14] הרצאה ב-12.12.2004

אפשר להניח אולי אחרי הקטנת המספר $r>0$, ש S חח"ע ב $B(x_1,r)$ וגם $J_s(x)\neq 0$ לכל $x\in(x_1,r)$ מזה ינבע שהקבוצה

$$W = S(B(x_1,r))$$

היא פתוחה. קיים $\rho>0$ כך ש

$$B(S(x_1),\rho) \subset W$$

אם צריך ניקח $r>0$ עוד יותר קטן כדי להבטיח שלכל $p\in B(p_1,r)$

$$G(p) = \vec{0} \iff p\in E$$

(אפשר להניח כי p_1 לא נקודת קצה) הנקודה $\left(0,0,\ldots,f(p_1)+\frac{\rho}{2}\right)$ נמצאת ב $B(S(x_1),\rho)$ כי

$$S(x_1) = (0,0,\ldots,f(p_1))$$

(כי $G(x_1,y_1)=\vec{0}$) לכן קיים נקודה $p_+=(x_+,y_1);x_+\in B(x_1,r)$ כך ש

$$\begin{aligned} S(p_+) &= \left(0,0,\ldots,f(p_1)+\frac{\rho}{2}\right) \\ &= (g_1(p_+),g_2(p_+),\ldots,f(p_+)) \end{aligned}$$

ז"א

$$g_1(p_+) = g_2(p_+)=\ldots=g(p_+)=0$$

וגם $p_+\in E$, אבל

$$f(p_+) > f(p_1)$$

■

3.1 מיון נקודות קריטיות בעזרת נגזרות חלקיות מסדר שני.

(נושא זה לא דרוש לחיפוש אקסטרמום גלובלי של פונקציה f על קבוצה E ב-$\mathbb{R}^n$).

הגדרות

1. נתונה פונקציה f של n משתנים מוגדרת בקבוצה שמכילה סביבה של נקודה $p_0\in\mathbb{R}^n$. נאמר ש p_0 היא נקודה קריטית של f אם כל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ קיימות ושוות ל-0 ב- $p=p_0$.
2. נאמר ש p_0 היא נקודת מקסימום (מינימום) מקומי אם קיים $r>0$ כך ש $f(p)\leq f(p_0)$ $(f(p)\geq f(p_0))$ לכל

$$p \in B(p_0,r)$$

הערה אם כל הנגזרות החלקיות קיימות ב-p_0 ואם p_0 נקודת מקסימום (מינימום) אזי p_0 נקודה קריטית.
אבל קיימות נקודות קריטיות שהן לא מקסימום מקומי וגם לא מינימום מקומי נקודות כאלו נקראות נקודות אוכף.

דוגמה נתונות

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^2+y^2\\
f_2(x,y) &= -x^2-y^2\\
f_3(x,y) &= x^2-y^2\\
f_4(x,y) &= xy\\
f_5(x,y) &= Ax^2+2Bxy+Cy^2
\end{aligned}
$$

לכל הפונקציות יש $f_1,\ldots,f_5$ יש נקודה קריטית ב-$(0,0)$.
f_1,f_2 יש מינימום ומקסימום, ל-f_3,f_4 יש אוכף.
אפשר להוכיח כי ל f_5 יש אוכף עבור $B^2>AC$. עבור $B^2<AC$ אם $A>0$ מינימום, $A<0$ מקסימום.
אם $B^2=AC$ תלוי...

מבוא (למשפט כללי שבודק אופי של נקודות קריטיות בעזרת נגזרות מסדר שני)
נתונה מטריצה סימטרית $(n\times n)$ M,

1. נאמר כי M חיובית לחלוטין (שלילית לחלוטין)

$$Positive\ Definite \qquad (Negitive\ Definite)$$

אם כל הערכים העצמיים של M הם ממש חיובים (ממש שליליים).

הערה תנאי זה שקול לתנאי

$$\forall x\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^n; x^tMx \quad > \quad 0$$

$$\left(\forall x\neq\vec{0}\in\mathbb{R}^n; x^tMx<0\right)$$

כי $M=L^t\Lambda L$ כאשר L אורתוגונלית, Λ אלכסונית והאיברים על האלכסון של Λ בדיוק הערכים העצמיים.

2. אם יש ל M לפחות ע"ע אחד ממש חיובי ולפחות ערך עצמי אחד ממש שלילי אז נאמר ש-M היא "מטריצת אוכף".
3. אם כל הע"ע של M גדולים או שווים ל-0, או כולם קטנים או שווים מ-0 נאמר ש-M היא מנוונת $(Degenerate)$

משפט $Sylvester$: מטריצה $n\times n$ $A=\{a_{ij}\}$ חיובית לחלוטין אם לכל $m=1,\ldots,n$ הדטרמיננטה של $\{a_{ij}\}_{i,j}^m$ היא חיובית, ושלילית לחלוטין אם הדטרמיננטה של $\{a_{ij}\}_{i,j}^m$ "מחליפה סימן": $(-1)^m\det\{a_{ij}\}_{i,j}^m>0$.

דוגמה ניקח $n=2$

$$M \quad = \quad \begin{pmatrix} A & B\\ B & C\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ אז $B^2>AC$ גורר M "מטריצת אוכף".
$B^2<AC$ אז M חיובית לחלוטין $A>0$ או שלילית לחלוטין $A<0$.

משפט תהי $D\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה נתונה פונקציה

$$f:D \quad \mapsto \quad \mathbb{R}$$

נניח ש $f\in C^2(D)$ כלומר כל הנגזרות החלקיות של F מסדר שני קיימות ורציפות ב-D. נניח שיש ל f נקודה קריטית ב-$p_0\in D$. תהי M מטריצת $Hessian$ של f ב-p_0. כלומר

$$M \quad = \quad \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right\}_{i,j=1}^n$$

אזי

1. אם M חיובית לחלוטין אז p_0 נקודת מינימום מקומי
2. אם M שלילית לחלוטין אז p_0 נקודת מקסימום מקומי
3. אם M "מטריצת אוכף" אז p_0 נקודת אוכף מקומי
4. אם M מנוונת אז הכל יכול לקרות.

הוכחה
(הערה: M מטריצה סימטרית בגלל משפט שווארץ עבור פונקציות ב-C^2).
ניקח $\delta > 0$ כך ש-$B(P_0, \delta) \subset D$. נקבע נקודה קבועה $(h_1, \ldots, h_n) = h \in B(0, \delta)$.
נגדיר פונקצית עזר $u(t) = f(p_0 + th)$. u מוגדרת ב-$[-1,1]$ (ואפילו בקטע יותר גדול).
לפי חוק השרשרת u גזירה ו-

$$u'(t) = \sum_{j=1}^{n} f'_j(p_0 + th) h_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p_0 + th) h_j$$

(כי $f \in C^2$ ולכן גם $f \in C^1$). כמו כן:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dt^2}(t) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left[f'_j(p_0 + th) h_j\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f''_{jk}(p_0 + th) h_j h_k\right) \\ &= (h_1, \ldots, h_n) M(p_0 + th)(h_1, \ldots, h_n)^T \\ &= \left\langle h, M(p_0 + th) h^T\right\rangle\end{aligned}$$

($M(p) = \left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right\}_{i,j=1}^{n}$)
<u>הערה על סימון:</u> $f''_{kj} = (f'_k)'_j = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$.
נגדיר פונקצית עזר שניה (של $2n$ משתנים) $\varphi(x,p) = \left\langle x, M(p) x^T\right\rangle$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$ ולכל $p \in B\left(p_0, \frac{\delta}{2}\right)$ עם $\|x\| = 1$.
נגדיר $K = \left\{(x,p) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| = 1, p \in B\left(p_0, \frac{\delta}{2}\right)\right\}$. זו קבוצה קומפקטית, כי היא סגורה וחסומה, ו-$\varphi : K \to \mathbb{R}$ היא רציפה ב-K מכיוון ש-$f \in C^2$. לכן φ רציפה במ"ש על K.
נפעיל את נוסחת טיילור לפונקציה u. נקבל שקיים $\theta \in (0,1)$ כך ש-$u(1) = u(0) + u'(0) \cdot 1 + u''(\theta) \cdot \frac{1}{2}$.
($u'(0) = 0$ כי p_0 נק' קריטית של f).
לכן $u(1) = u(0) + \frac{1}{2}u''(\theta)$. ($\theta$ תלוי ב-p_0 וב-h ובכל מני דברים אחרים - אבל $\theta \in (0,1)$).
זה שקול ל-$f(p_0 + h) - f(p_0) = \frac{1}{2}\left\langle h, M(p_0 + \theta h) h^T\right\rangle = \frac{1}{2}\|h\|^2 \varphi(v, p_0 + \theta h)$ כאשר $v = \frac{h}{\|h\|}$.
נניח $M(p_0)$ מטריצת אוכף. לכן יש ע"ע $0 < \lambda_1$, $M(p_0) y^T = \lambda_1 y^T$ (y וקטור עצמי) ויש גם $\lambda_2 < 0$ ו-$z \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$M(p_0) z^T = \lambda_2 z^T$. אפשר להניח ש-$\|y\| = \|z\| = 1$.
$\varphi(y, p_0) = \left\langle y, M(p_0), y^T\right\rangle = \langle y, \lambda_1 y\rangle = \lambda_1 > 0$. בגלל רציפות $p \to M(p)$ קיים δ_1 כך ש-$\varphi(y,p) > \frac{\lambda_1}{2}$ עבור כל $p \in B(p_0, \delta_1)$.
באופן דומה, $\varphi(z, p_0) = \lambda_2 < 0$ וקיים $\delta_2 > 0$ כך ש-$\varphi(z,p) < \frac{\lambda_2}{2} < 0$ לכל $p \in B(p_0, \delta_2)$.
ניקח $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. לכל $r \in [0, \delta]$ הנקודות $p_0 + \frac{1}{2}rz$, $p_0 + \frac{1}{2}ry$ ב-$B(p_0, r)$.

$$f\left(p_0 + \frac{1}{2}ry\right) - f(p_0) = \frac{1}{2}\frac{r^2}{4}\varphi\left(y, p_0 + \frac{\theta_1}{2}ry\right) > \frac{r^2}{4}\frac{\lambda_1}{2} > 0$$

באופן דומה

$$f\left(p_0 + \frac{1}{2}rz\right) - f(p_0) = \frac{1}{2}\frac{r^2}{4}\varphi\left(z, p_0 + \frac{\theta_1}{2}rz\right) < \frac{r^2}{4}\frac{\lambda_2}{2} < 0$$

כלומר p_0 לא נקודת מקסימום מקומי וגם לא נקודת מינימום מקומי $\Leftarrow$נקודת אוכף.

נניח כעת ש-$M\left(p_0\right)=M$ חיובית לחלוטין. נסמן ב-$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ את הערכים העצמיים של M (הם לא בהכרח שונים זה מזה). קיים $\alpha>0$ כך ש-$\lambda_j\geq\alpha$ לכל $j\in\{1,2,\ldots,n\}$. ידוע שקיימת מטריצה אורתוגונלית L ($L^T=L^{-1}$) כך ש-$M=L^{-1}\Lambda L$ כאשר $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$.

אם $\|x\|=1$ אז $\left\|Lx^T\right\|=\sqrt{\left\langle\left(Lx^T\right)^T,\left(Lx^T\right)^T\right\rangle}=\sqrt{\left\langle x^T,\left(L^TLx^T\right)^T\right\rangle}=\sqrt{\left\langle x^T,Ix^T\right\rangle}=\sqrt{\left\langle x^T,x^T\right\rangle}=\|x\|=1$.

(מטריצה אורתוגונלית משמרת נורמה אוקלידית).

לכל $x\in\mathbb{R}^n$ אם $\|x\|=1$ נסמן $y=\left(Lx^T\right)^T$ ונקבל

$$\begin{aligned}
\varphi\left(p_0,x\right) &= \\
&= \left\langle x,\left(M\left(p_0\right)x^T\right)^T\right\rangle=\left\langle x,\left(L^T\Lambda Lx^T\right)^T\right\rangle=\left\langle\left(Lx^T\right)^T,\left(\Lambda\left(Lx^T\right)\right)^T\right\rangle \\
&= \left\langle y,\left(\Lambda y^T\right)^T\right\rangle=\sum_{j=1}^n y_j\lambda_jy_j=\sum_{j=1}^n\lambda_jy_j^2\geq\sum_{j=1}^n\alpha y_j^2 \\
&= \alpha\|y\|^2=\alpha>0
\end{aligned}$$

מכיוון ש-φ רציפה במ"ש ב-K קיים $\delta_0>0$ כך שלכל x ולכל (z,p) ב-$K\cap B_{2n}\left(\left(x,p_0\right),\delta_0\right)$ קיים $\varphi(z,p)>\frac{\alpha}{2}$. בפרט לכל x אם $\|x\|=1$ וכל $p\in B\left(p_0,\delta_0\right)$ נקבל $\left\langle x,\left(M(p)x^T\right)^T\right\rangle\geq\frac{\alpha}{2}>0$.

<u>חשוב:</u> δ_0 <u>לא</u> תלוי בבחירת x עם $\|x\|=1$.

לכן, עבור כל $h\in B\left(p_0,\min\left(\frac{\delta}{2},\delta_0\right)\right)$ נקבל ש-

$$f\left(p_0+h\right)-f\left(p_0\right) = \frac{\|h\|^2}{2}\varphi\left(v,p_0+\theta h\right)\geq\frac{\|h\|^2}{2}\frac{\alpha}{2}\geq 0$$

ז"א ל-f יש מינימום מקומי ב-p_0. באופן לגמרי אנלוגי מוכיחים שאם $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ כולן שליליות אז יש ל-f נקודת מקסימום מקומי ב-p_0. לבסוף עלינו לטפל במקרה ש-M מנוונת.

נראה שייתכן מקסימום מקומי, מינימום מקומי או נקודת אוכף לפי הדוגמאות הבאות:

$p_0=(0,\ldots,0)$.

מינימום: $f\left(x_1,\ldots x_n\right)=\sum_{j=1}^n x_j^4$.

מקסימום: $f\left(x_1,\ldots x_n\right)=-\sum_{j=1}^n x_j^4$.

אוכף: $f\left(x_1,\ldots x_n\right)=x_1^3$.

■

4 נוסחת טיילור עבור פונקציות של n משתנים

נטפל רק במקרה של $n=2$ (שני משתנים).

שלב א': תרגילי חוק השרשרת.

1. נניח ש-f דיפרנציאבילית בסביבה כדורית של $\left(x_0,y_0\right)$. נבחר $h=\left(h_1,h_2\right)$ כך ש-$\left(x_0+h_1,y_0+h_2\right)$ בסביבה זו ונגדיר פונקצית עזר $u(t)=f\left(x_0+th_1,y_0+th_2\right)$ לכל $t\in[-1,1]$ אזי

$$u'(t) = f'_x\left(x_0+th_1,y_0+th_2\right)h_1+f'_y\left(x_0+th_1,y_0+th_2\right)h_2$$

2. אם $f''_{xx},f''_{xy},f''_{yx},f''_{yy}$, קיימות ורציפות באותה סביבה של $\left(x_0,y_0\right)$אזי אם נסמן $x(t)=x_0+th_1,y_0+th_2$

$$\begin{aligned}
u''(t) &= f''_{xx}(x(t))h_1^2+f''_{xy}(x(t))h_1h_2+f''_{yx}(x(t))h_2h_1+f''_{yy}(x(t))h_2^2 \\
&= f''_{xx}(x(t))h_1^2+2f''_{xy}(x(t))h_1h_2+f''_{yy}(x(t))h_2^2 \\
\text{"} &= \left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x(t))\text{"}
\end{aligned}$$

3. נניח ש-$f\in C^3$ בכדור סביב (x_0,y_0). חישוב דומה נותן אחרי הפעלת משפט שוורץ ($f'''_{xxy}=f'''_{xyx}=f'''_{yxx}$ וכדומה) ש-

$$\begin{aligned} u'''(t) &= f'''_{xxx}(x(t))h_1^3+3f'''_{xxy}(x(t))h_1^2h_2+3f'''_{xyy}(x(t))h_1h_2^2+f'''_{yyy}(x(t))h_2^3 \\ \text{"} &= \left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x(t))\text{"} \end{aligned}$$

בעזרת אינדוקציה אפשר להראות שלכל $n\in\mathbb{N}$, אם $f\in C^n(B((x_0,y_0),r))$ ו-$\|h\|\le r$ ו-$t\in(-1,1)$ מתקיים

$$u^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n} h_1^{n-j}h_2^j\binom{n}{j}\frac{\partial^n}{\partial x^{n-j}\partial y^j}f(x(t))\text{"}=\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x(t))\text{"}$$

משפט אם $f\in C^{n+1}(B((x_0,y_0),r))$ אזי לכל $h=(h_1,h_2)$ ב-$B((0,0),r)$ קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש:

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2) = \sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x(0))+\frac{1}{(n+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x(\theta))$$

(תזכורת: $x(t)=(x_0+th_1,y_0+th_2)$).

<u>הערה</u>: אם יש תנאים על $f\in C^\infty$ שגורמים לכך ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x(t))$ עבור $t\in[-1,1]$ אז

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x(0))\text{""}=e^{\left(h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right)}f(x(0))\text{""}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} f(x_0+h_1,y_0+h_2) &= u(1) \\ &= u(0)+u'(0)\cdot 1+\frac{u''(0)}{2!}1^2+\cdots+\frac{u^{(n)}(0)}{n!}1^n+\frac{u^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}1^{n+1} \end{aligned}$$

הפעלנו נוסחת טיילור עבור פונקציה של משתנה יחיד לפונקציה $u(t)$ על $[0,1]$. עכשיו רק צריך להציב מהחישובים הקודמים עם חוק השרשרת.
■

5 חשבון אינטגרלי

הרצאה ב 29.12.2004

תרגיל

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^3} f\chi_w \\ W &= \left\{(x,y,z)\,|x^2+y^2\le z\le 1\right\} \end{aligned}$$

פתרון

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_E(x,y)\left(\int_{z=x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy \\
&= \iint_{E}\left(\int_{z=x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy
\end{aligned}
$$

אז

$$
\begin{aligned}
W &= \left\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in E, x^2+y^2\le z\le 1\right\} \\
E &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\right\}
\end{aligned}
$$

אם $f(x)=\left(x^2+y^2\right)z$ אז

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_E \left(\frac{\left(x^2+y^2\right)z^2}{2}\right)_{z=x^2+y^2}^{1} dxdy \\
&= \iint_E \frac{\left(x^2+y^2\right)}{2}-\frac{\left(x^2+y^2\right)^3}{2}dxdy \\
&= \int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{x^2+y^2-\left(x^2+y^2\right)^3}{3}\right)dydx \\
E &= \{x\in[-1,1]\,;u(x)\le y\le v(x)\}
\end{aligned}
$$

גישה שניה לחישוב לפי נוסחת החלפת משתנים אינטגרל זה שווה ל

$$
I = \int_{r=0}^{1}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^6}{2}\right)rd\theta dr
$$

עבור W כנ"ל ניתן לכתוב נוסחה אחרת עבור חישוב $\int_{\mathbb{R}^3} f\chi_W$ כאשר האינטגרציה הראשונה היא לפי x (או לפי y) צריך לזהות את

$$
W = \{(x,y,z)\,|\,(y,z)\in G, u(z,y)\le x\le v(y,z)\}
$$

אז נוכל לכתוב

$$
I = \iint_G\left(\int_{x=u(y,z)}^{v(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right)dydz
$$

אז

$$
\begin{aligned}
G &= \left\{(y,z)\,|y^2\le z\le 1\right\} \\
z &= x^2+y^2 \\
x^2 &= z-y^2 \\
x &= -\sqrt{z-y^2}=u(y,z) \\
x &= \sqrt{z-y^2}=v(y,z)
\end{aligned}
$$

ונקבל

$$
I = \iint_G\int_{x=-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} f(x,y,z)\,dydz
$$

משפט נתונה קבוצה פתוחה $W \subset \mathbb{R}^d$ ונתונה העתקה $T : W \mapsto \mathbb{R}^d$ ב-$C^1(W)$ ונתונה תת קבוצה D כך שמתקיים

1. χ_D פונקציה אינטגרבילית ב- $\mathbb{R}^d$
2. T חח"ע גלובלית ב-D.

נתונה פונקציה $f : D \mapsto \mathbb{R}$ רציפה וחסומה.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\chi_D = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{T(D)} f\left(T^{-1}\right)|J|$$

דוגמה

$$T(u,v) = (u\cos v, u\sin v)$$

הרצאה ב 2.1.2005

דוגמה

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}\right)\\
D &= \left\{(x,y)\,|\,(x-a)^2+y^2 \le a^2, x^2+y^2 \ge \varepsilon^2\right\}\\
\Rightarrow T(D) &= \left\{(r,\theta)\,|-\alpha(\varepsilon) \le \theta < \alpha(\varepsilon), \varepsilon \le r \le 2a\cos\theta\right\}\\
T^{-1}(r,\theta) &= (r\cos\theta, r\sin\theta)\\
J_{T^{-1}}(r,\theta) &= \left|\begin{array}{cc}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{array}\right| = r
\end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\chi_D = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{T(D)} f\cdot T^{-1}\left|J_{T^{-1}}\right|$$

בעזרת נוסחת חישוב לאינטגרל כפול.

$$= \int_{-\alpha(\varepsilon)}^{\alpha(\varepsilon)}\left[\int_{r=\varepsilon}^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdr\right]d\theta$$

שאלה נתון $\alpha \in \mathbb{R}$ אם $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^\alpha$ תנסו לחשב

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\chi_D$$

כאשר D כנ"ל - עבור ערכים שונים של $\alpha \in \mathbb{R}$

דוגמה

$$\begin{aligned}
T^{-1}(r,\theta,\varphi) &= (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\\
J_{T^{-1}}(r,\theta,\varphi) &= r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

עלינו לבחור $D \subset \mathbb{R}^3$ כך ש T מוגדרת היטב וחח"ע על D. למשל אם

$$\begin{aligned}
D &= \left\{(x,y,z)\,|0 < x^2+y^2+z^2 \le a^2, x^2+y^2 > 0, y \ne 0\right\}\\
T(D) &= \left\{(r,\theta,\varphi)\,|r \in (0,a], \theta \in (0,\pi), \varphi \in (0,2\pi), \varphi \ne \pi\right\}
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3}\chi_D &= \int \chi_{T(D)}\left|J_{T^{-1}}\right| \\ &= \int_{T(D)}\left(r^2\sin\theta\right) \\ &= \int_{(0,\pi)\times(0,2\pi)}\int_{r=0}^{a} r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \iint\left(\frac{a^3}{3}\right)\sin\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(2\frac{a^3}{3}\right)d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3\end{aligned}$$

דוגמה עבור T,T^{-1} באותו אופן (קואורדינטות כדוריות)

$$D = \left\{(x,y,z)\mid\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2+z^2\le a^2, x^2+y^2+z^2>\varepsilon^2\right\}$$

נרצה לחשב $\int\chi_D\left(x^2+y^2+z^2\right)^\alpha$

$$\begin{aligned}T(D) &= \left\{(r,\theta,\varphi)\mid -\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{3\pi}{4}, 0\le\theta\le\theta, 0\le r\le u(\theta,\varphi)\right\} \\ & x^2-\frac{2ax}{\sqrt{2}}+\frac{a^2}{2}+y^2-\frac{2ay}{\sqrt{2}}+\frac{a^2}{2}+z^2\le a^2 \\ x^2+y^2+z^2 &\le \sqrt{2}a(x+y) \\ r &\le \sqrt{2}ar\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi) \\ r &\le \sqrt{2}a\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi)\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f\chi_D &= \int\left(f\circ T^{-1}\right)\left|J_T^{-1}\right|\chi_{T(D)} \\ &= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}a\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi)} r^{2\alpha+2}\sin\theta dr d\theta d\varphi \\ (\alpha>0)\Rightarrow &= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{2}a\sin\theta(\sin\varphi+\cos\varphi)} r^{2\alpha+2}\sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\left(\sqrt{2}a\sin\theta\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)\right)^{2\alpha+3}}{2\alpha+3}\sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}a}{2\alpha+3}\right)^{2\alpha+3}\int_{\varphi=-\frac{\pi}{4}}^{\varphi=\frac{3\pi}{4}}\sin^{2\alpha+4}\theta d\theta\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\sin\varphi+\cos\varphi\right)^{2\alpha+3}d\theta d\varphi = * \\ \sin\varphi+\cos\varphi &= \sqrt{2}\left(\sin\varphi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\varphi\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

הסבר הנוסחה להחלפת משתנים

טענה נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^d$ לכל קבוצה $E\subset\mathbb{R}^d$ מדידה לפי ז'ורדן. ז"א הפונקציה χ_E אינטגרבילית לפי רימן ב-$\mathbb{R}^d$. אזי גם הקבוצה $T(E)$ מדידה לפי ז'ורדן וגם

$$\int_{\mathbb{R}^d} X_{T(E)} = |det[T]|\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\chi_D = \int f\circ T^{-1}\chi_{T(D)}\left|J_T^{-1}\right|$$

χ_D אנטגרבילית[15] לפי רימן ב-$\mathbb{R}^d$, $T\in C^1(W)$, W פתוחה

$$D\subset W \subset \mathbb{R}^d$$

$T:D\mapsto\mathbb{R}^d$ חח"ע,

1. D קומפקטית
2. $J_{T^{-1}}\neq 0$ ב $T(D)$
3. f רציפה (וחסומה) ב-D (ביחס ל-D)

למה $E\subset\mathbb{R}^d$ אינטגרבילית לפי רימן $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיימים d-תיבות $I_1,\ldots,I_N$ כך ש

$$\partial E \supset \cup_{j=1}^N I_j$$

וגם

$$\sum_{j=1}^N V_d(I_j) < \varepsilon$$

לכן אם נניח $f=\chi_D$ אז $\chi_{T(D)}$ אינטגרבילית.

- נניח ש $T:\mathbb{R}^d\mapsto\mathbb{R}^d$ העתקה ליניארית חח"ע $det[T]\neq 0$

למה אם χ_D אינטגרבילית ב-$\mathbb{R}^d$ אזי

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{T(D)} &= |\det[T]|\int\chi_D\\ V_d(T(D)) &= V_d(D)|\det[T]|\end{aligned}$$

נשים לב כי $[T]$ א"ג שומרת על מרחקים וגם מטריצה אלכסונית

$$[T] = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

משפט (פרוק פולרי) של מטריצה $d\times d$ - לכל מטריצה $d\times d$ A קיימת פרוק לגורמים

$$A = U\wedge V$$

כאשר U,V א"ג ו-$\wedge$ אלכסונית. שימו לב

$$|\det A| = |\det\wedge|$$

[15] הרצאה ב 5.1.2005

- נניח ש f,D,W,T כמו בניסוח המשפט, אבל, בנוסף D "מאד קטן" אז D הנגזרת של כל רכיבי T הן כמעט קבועים ב D. T כמעט ליניארית וf כמעט קבוע ב-D. לכן לפי השלב הקודם

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f\chi_D &\approx \int_{\mathbb{R}^d} f(p)\,\chi_D \quad ,p\in D\\ &= f(p)\int\chi_D \approx f(p)\left(\text{"}\det\left[T^{-1}\right]\text{"}\right)\int\chi_{T(D)}\\ \int\chi_{T(D)} &\approx J_T(p)\int\chi_D\\ \left|J_{T^{-1}}(T(p))\,J_T(p)\right| &= |J_I| = 1\end{aligned}$$

- D,W,T,f כמו בניסוח המשפט. נפרק את D לאיחוד של קבוצות מאוד קטנות זרות זו לזו.

$$D = \cup_{j=1}^N D_j$$

כלומר

$$\chi_D(p) = \sum_{j=1}^N \chi_{D_j}(p)$$

לכן

$$\int\chi_D f = \sum_{j=1}^N\int\chi_{D_j} f$$

נבחר $p_j\in D_j, q_j = T(p_j)$

$$\begin{aligned}&\approx \sum_{j=1}^N f(p_j)\left|J_{T^{-1}}(T(p))\right|\int\chi_{T(D_j)}\\ &= \sum_{j=1}^N\int f(p_j)\,J_{T^{-1}}(T(p_j))\,\chi_{T(D_j)}\\ &= \sum_{j=1}^N\int f\left(T^{-1}(q_i)\right)\chi_{T(D_J)}\left|J_{T^{-1}}(q_j)\right|\\ &\approx \sum_{j=1}^N\int f\cdot T^{-1}\chi_{T(D_J)}\left|J_{T^{-1}}\right|\\ \forall q\in D_j; f\left(T^{-1}(q)\right) &\approx f\left(T^{-1}(q_j)\right)\\ J_{T^{-1}}(q) &\approx J_{T^{-1}}(q_j)\\ \cup_{j=1}^N T(D_j) &= T(D)\end{aligned}$$

זרות זו לזו

$$\begin{aligned}\sum\chi_{T(D_j)} &= \chi_{T(D)}\\ I &= \int\left(f\circ T^{-1}\right)\left|J_{T^{-1}}\right|\sum_{j=1}^N\chi_{T(D_j)}\\ &= \int\left(f\circ T^{-1}\right)\left|J_{T^{-1}}\right|\chi_{T(D)}\end{aligned}$$

5.1 עקומים ואינטגרלים קוויים

הגדרה נתון[16] $d \in \mathbb{N}$ נאמר שקבוצה $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ היא עקום אם קיים קטע חסום $[a,b]$ והעתקה רציפה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ כך ש $\Gamma = \gamma([a,b])$

דוגמאות

1. $d = 2$ $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ רציפה $\gamma(t) = (t, f(t))$ אז הגרף של f ב $[a,b]$ היא עקום.
2. $d = 3$ $[a,b] = [0, 100\pi]$ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 6t)$ קו בורג עם 50 סיבובים.
3. $d = 2$, $\Gamma = [0,1] \times [0,1]$, לפי $Peano$ קיימות פונקציות רציפות $[0,1] \mapsto [0,1]$: $j = 1,2; f_j$ כך ש
$$\{(f_1(t), f_2(t)), 0 \le t \le 1\} = [0,1] \times [0,1]$$

הערה נוסיף תנאי נוסף - נטפל רק בעקום Γ בעלי הצגות פרמטריות γ בעלות התכונות הבאות

- γ חח"ע פרט אולי ש $\gamma(a) = \gamma(b)$
- כל הרכיבים של γ הן פונקציות גזירות פרט אולי במספר סופי של נקודות ב-$[a,b]$ $x_1, x_2, \dots x_N$. אפשר לחלק את $[a,b]$ ע"י $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ כך שבכל קטע (x_{j-1}, x_j) כל הרכיבים של γ בעלות נגזרות רציפות אשר שואפות לגבול (חד-צדדי) ב x_{j-1} ו- x_j.

דוגמאות

1. $[a,b] = [0,1]; \gamma(t) = \left(t, t^2\right)$
2. $[a,b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; \gamma(t) = \left(\sin t, \sin^2 t\right)$
3. $[a,b] = [0, \ln 2]; \gamma(t) = \left(e^t - 1, (e^t - 1)^2\right)$ לכל עקום יש אין סוף הצגות פרמטריות שונות.

אורך של עקום אם Γ עקום הנותן ע"י הצגה פרמטרית חח"ע נגדיר אורך של Γ ע"י קבוצה של כל החלוקות הסופיות

$$a = t_0 < t_1 \dots < t_N = b$$

אז את הסופרמום

$$L(\Gamma) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{N} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|\right\}$$

נגדיר האורך.

משפט (באופן שקול) $\gamma(t) = (\gamma_1(t) \dots \gamma_N(t))$ אם $a \le t \le b$ ו-γ מקיים את התנאים של הגדרת העקום. אזי

$$L(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (\gamma'(t))^2} dt < \infty$$

הערה צ"ל ש $L(\gamma)$ לא תלוי בבחירת ההצגה הפרמטרית עבור L.

רעיון ההוכחה אם $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^d$ ו-$\tilde{\gamma} : \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right] \mapsto \mathbb{R}^d$ שתיהן הצגות חד-חד ערכיות לאותו עקום Γ מוכיחים שקיימת העתקה חח"ע $\psi : [a,b] \mapsto \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right]$ ועל. כך ש

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\psi(t))$$

[16] 9.1.2005

5.1.1 אינטגרלים קווים

אינטגרל מסוג ראשון

הגדרה נתון עקום γ בעל הצגה שמקיימת תנאים (שהובאו בהגדרה) נתונה פונקציה $f : E \mapsto \mathbb{R}$ כאשר $\Gamma \subset E \subset \mathbb{R}^d$. נניח (לשם פשטות) ש f רציפה ב-Γ ביחס ל Γ. אזי מגדירים

$$\int_\Gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\sum_{j=1}^{d} |\gamma'(t)|^2} dt$$

אפשר (וחובה) להוכיח שערך אינטגרל זה לא תלוי בבחירת ההצגה. (אם $f \equiv 1$ אז האינטגרל הוא אורך Γ)

הערה ניתן לכתוב

$$L(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$$

ולהראות ע"י

$$\gamma_k(t_j) - \gamma_k(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1}) \gamma_k'(c_{k,t})$$

שמגיעים לאותו דבר.

אינטגרל מסוג שני

הגדרה נסמן ב

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

או ע"י

$$\int_\Gamma \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_d dx_d$$

כאשר $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ הן פונקציות רציפות ב-Γ ביחס ל-Γ ו-$\vec{F}$ הוא העתקה $\vec{F} : \Gamma \mapsto \mathbb{R}^d$ הנתונה ע"י

$$\vec{F}(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \ldots, \varphi_d(p))$$

מקובל להתיחס ל-$\vec{F}(p)$ כווקטור (במקום נקודה ב-$\mathbb{R}^d$)

"הגדרה"

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left[\sum_{j=1}^{d} \varphi_j(\gamma(y)) \gamma_j'(t) \right] dt$$

אפשר להוכיח שערך האינטגרל הוא תמיד אותו דבר עבור שתי הצגות $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^d$ ו-$\tilde{\gamma} : \left[\tilde{a}, \tilde{b}\right] \mapsto \mathbb{R}^d$ לאותו עקום Γ אשר מקיימות תנאים (שכתבנו בהגדרה) בתנאי שמתקיים

$$\tilde{\gamma}(\tilde{a}) = \gamma(a)$$
$$\tilde{\gamma}\left(\tilde{b}\right) = \gamma(b)$$

אחרת אם הפוך סימן האינטגרלים הפוך. מהנוסחה

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot dr = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \left|\gamma'(t)\right| dt \qquad (12)$$

נתונה נקודה p_0 בעקום Γ. קיים $t_0 \in [a,b]$ כך ש $\gamma(t_0) = p_0$ נניח ש $\gamma'(t_0) \neq \vec{0}$, אז נגדיר את כוון המשיק ל-Γ ב-p_0 ככוון הווקטור $\gamma'(t)$. נניח שלעקום Γ יש הצגה $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^d$ כך ש $\vec{\gamma}'$ קיימת, רציפה ושונה מ-0 בכל נקודה ב-(a,b) נסמן ב- $\hat{T}(p)$ את וקטור היחידה המשיק ל Γ בנקודה p ובמגמה של ההצגה γ. זו פונקציה רציפה ש p לאורך Γ (ביחס ל Γ). בפרט אם $p = \gamma(t)$ $\hat{T}(p) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}$ אם נציב ב-(12) נקבל ש

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(\vec{F} \cdot \hat{T}\right)(\gamma(t)) \left|\gamma'(t)\right| dt = \int_\Gamma \vec{F} \cdot \hat{T} ds$$

פרוש פיזיקלי של $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ אם $\vec{F}(p)$ מסמן שדה כוח שהוא ווקטור אחד בכל נקודה p על העקום Γ, אז $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ נותן את העבודה המבוצעת ע"י כוח זה להזיז חלקיק לאורך Γ כאלו, ובמגמה של ההצגה γ שבחרנו. אם h קטן אז $\gamma'(t)$ כמעט קבוע בקטע $[t_0, t_0 + h]$ ולכן קטע עקום מ $\gamma(t_0)$ ל- $\gamma(t_0 + h)$ כמעט קטע ישר גם $\vec{F}$ כמעט קבוע בקטע זה. העבודה המבוצעת לאורך קטע זה

$$\begin{aligned} &\approx \vec{F}(\gamma(t_0)) \cdot (\vec{\gamma}(t_0 + h) - \vec{\gamma}(t_0)) \\ &\approx \vec{F}(\gamma(t_0)) \cdot \vec{\gamma}'(t_o) h \end{aligned}$$

נחלק את $[a,b]$ לקטעים קטנים

$$a = t_0 \leq t_1 \quad \ldots \quad \leq t_N = b$$

העבודה לאורך Γ כולו

$$\approx \sum_{j=1}^N \vec{F}(\gamma(t_{j-1})) \cdot \vec{\gamma}'(t_{j-1})(t_j - t_{j-1})$$

עבור חלוקות יותר עדינות של $[a,b]$ הסכום הנ"ל מתקרב, קרוב כרצוננו ל

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

דוגמה

$$\vec{F} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

אז

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \varphi_2 &= \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \varphi_3 &= \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

לקטע ישר מ $(1,0,0)$ ל $(c,0,0)$

$$t \in [0,1]; \gamma(t) = (t + t(c-1), 0, 0)$$

5.2 משטחים ואינטגרלים משטחיים

הגדרה נאמר[17] כי $S \subset \mathbb{R}^d$ היא משטח אם קיימת קבוצה $D \subset \mathbb{R}^d$ העתקה $\gamma : D \mapsto \mathbb{R}^d$ רציפה ב-D ביחס ל-D כך ש $S = \gamma(D)$.

הערה נניח ש D קומפקטית ו- χ_D אינטגרבילית ב $\mathbb{R}^2$ בשימושים שלנו נניח $\gamma \in C^1\left(\tilde{D}\right)$ עבור קבוצה פתוחה $\tilde{D}$, $D \subset \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ וגם נניח γ חח"ע ב-D.

הערה לפעמים נטפל במשטח שהוא איחוד סופי של מספר סופי של משטחים כאלו. למשל השפה של הקובייה

$$[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$$

דוגמאות

.1

$$\begin{aligned} D &= \left\{(u,v) \,|u^2+v^2 \le 1\right\}, \gamma(u,v) = \left(u, v, \sqrt{1-u^2-v^2}\right) \\ S &= \gamma(D) \end{aligned}$$

באופן כללי

$$D = \{(u,v) \,|\, (u,v) \in D\}, \gamma(u,v) = \{u, v, f(u,v)\}$$

כאשר $f \in C^1\left(\tilde{D}\right)$

.2

$$\begin{aligned} D &= \left\{(u,v) \,|0 \le u \le \frac{\pi}{2}, 0 \le v < 2\pi\right\} \\ v(u,v) &= (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{aligned}$$

בעיה נתונה קבוצה פתוחה $W \subset \mathbb{R}^3$ נתון משפט $S \subset W$. והצגה פרמטרית

$$\begin{aligned} \gamma : D &\mapsto W \\ S &= \gamma(D) \end{aligned}$$

ומתקיימים כל התנאים בהגדרת המשטח. ובנוסף

$$\forall (u,v) \in D; \frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v} \neq 0$$

צ"ל את שטח (הפנים) של S.
כמובן נניח ש S "$orientable$" כלומר בעל שני צדדים ונניח שנוזל נע ב-W והמהירות של הנוזל בכל נקודה $p \in W$ (כולל $p \in S$) נתון ע"י $\vec{F}(p)$ כאשר הרכיבים של $\vec{F}$ הן רציפים ב-W. מה השטף של הנוזל לעבר S, כלומר נפח ליחידת זמן של הנוזל אשר עובר מצד אחד לצד השני של S.

תשובות השטח הוא

$$\iint_D \left\|\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}\right\|_2 dudv$$

[17] הרצאה ב 12.1.2005

השטף הוא

$$\iint_D \vec{f}(\gamma(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\gamma}{\partial u} \times \frac{\partial\gamma}{\partial v}\right) dudv$$

או[18] בסימון

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

או

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

אינטגרל זה נקראה אינטגרל משטחי מסוג שני.
אפשר להוכיח שערך אינטגרל זה לא תלוי בהצגה פרמטרית אבל הסימן שלו כן תלוי במגמת הוקטור הניצב

$$\vec{\gamma_u} \times \vec{\gamma_v}$$

מוגדר גם אינטגרל משטחי מסוג ראשון

$$\iint_S F ds = \iint_D f(\gamma(u,v)) \|\vec{\gamma_u} \times \vec{\gamma_v}\| dudv$$

מוגדר למשל לכל פונקציה

$$f : S \mapsto \mathbb{R}$$

רציפה ביחס ל S.

הערה במקרה ש

$$\gamma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), 0)$$

נקבל ש

$$\begin{aligned}
\|\vec{\gamma_u} \times \vec{\gamma_v}\| &= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \\
T(u,v) &= (X(u,v), Y(u,v)) \\
T : D &\mapsto S \subset \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

ואי תלות של $\iint_S Fds$ בבחירת ההצגה שקול לנוסחת החלפת משתנים באינטגרל כפול.

5.2.1 משפט הדיברגנץ של גאוס

הגדרה נתון $W \subset \mathbb{R}^3$ פתוחה ונתון העתקה\שדה ווקטורי

$$\vec{F} : W \mapsto \mathbb{R}^3$$

אם הנגזרות החלקיות של רכיבי $\vec{F}$ קיימות בנקודה $p \in W$ מגדירים

$$\begin{aligned}
div\vec{F}(p) &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(p) \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x}(p) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) + \frac{\partial F_3}{\partial z}
\end{aligned}$$

(כאשר $\vec{F}(p) = (F_1(p), F_2(p), F_3(p))$)
ניתן גם לכתוב

$$"\vec{\nabla}" = "\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)"$$

[18] הרצאה ב 16.1.2005

משפט (הדיברגנץ) נתונים $W,\vec{F}$ כנ"ל נניח ש $\vec{F}\in C'(W)$ נתונה קבוצה $V\subset W$ שהיא "נחמדה" (הגדרה בהמשך) ויהי S השפה של V, $S=\partial V$
אז (כי V נחמדה) S היא איחוד זר סופי של משטחים

$$S = \bigcup_{i=1}^{N} S_i$$

שעבורם ניתן לחשב $\iint_{S_i}\vec{F}\cdot d\vec{S}$ $i=1,\ldots,N;$
אז מתקיים

$$\iint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V div\vec{F}(x,y,z)\,dxdydz$$

כאשר

$$\iint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^{N}\iint_{S_i}\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

ואנו בוחרים מגמת ווקטור הניצב $\vec{\gamma_u}\times\vec{\gamma_v}$ בכל נקודה על פני כל משטח S_j כך שווקטור זה פונה החוצה מ-V

הוכחה

1. נניח ש V בעלת הצורה

$$V = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\varphi_0(x,y)\le z\le\varphi_1(x,y)\}$$

(תחום z פשוט, וגם $\varphi_{0,1}$ גזירות) כאשר χ_D אינטגרבילית ו-$\varphi_0,\varphi_1\in C\left(\tilde{D}\right)$ כאשר $D\subset\tilde{D}\subset\mathbb{R}^2$ וגם $\tilde{D}$ פתוחה. כמו כן נניח ש

$$\vec{F}(x,y,z) = (0,0,f(x,y,z))$$

אז

$$\begin{aligned}\iiint_V div\vec{F} &= \iiint_V \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dxdydz\\ &= \iint_D\left(\int_{z=\varphi_0(x,y)}^{\varphi_1(x,y)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right)dxdy\\ &= \iint_D\left(f(x,y,\varphi_1(x,y))-f(x,y,\varphi_0(x,y))\right)dxdy\end{aligned}$$

השפה של V,

$$\partial V = S_0\cup S_1\cup\sum$$

הנחה נוספת נניח ש ∂D הוא בעל הצגה

$$\{\vec{r}(t)\,|\vec{r}(x(t),y(t))\}$$

בעלת רכיבים ב C^1.

נקבל הצגה פרמטרית בשביל $\sum$

$$\begin{aligned}\sum &= \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in\partial D, \varphi_0(x,y)\le z\le\varphi_1(x,y)\}\\ &= \{(x(t),y(t),z)\,|a\le t\le b, \varphi_0(x(t),y(t))\le z\le\varphi_1(x(t),y(t))\}\end{aligned}$$

בהצגה פרמטרית

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(t,z) &= (x(t),y(t),z),(t,z)\in Q\\ \Rightarrow\vec{\gamma}_t(t,z) &= \left(x^{'}(t),y^{'}(t),0\right)\\ \vec{\gamma}_z &= (0,0,1)\\ \Rightarrow\vec{\gamma}_t\times\vec{\gamma}_z &= y^{'}(t)\,\hat{i}-x^{'}(t)\,\hat{j}+0\hat{k}\end{aligned}$$

לכן

$$\iint_{\sum}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_Q\left[f(x(t),y(t),z)\,\hat{k}\right]\cdot\left(y^{'}(t)\,\hat{i}-x^{'}(t)\,\hat{j}\right)=0$$

ב- S_1

$$S_1 = \{(x,y,\psi_1(x,y))\,|\,(x,y)\in D\}$$

ניקח $u=x, v=y$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(x,y) &= (x,y,\varphi_1(x,y))\\ \vec{\gamma_x} &= \left(1,0,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\\ \vec{\gamma_y} &= \left(0,1,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\\ \gamma_x^{'}\times\gamma_y^{'} &= \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x},-\frac{\partial\varphi}{\partial y},1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_D\left[f\left(\vec{\gamma}(x,y)\,\hat{k}\right)\right]\cdot\vec{\gamma_x}\times\vec{\gamma_y}dxdy\\ &= \iint_D F(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy\end{aligned}$$

עבור S_0 אותו חישוב אבל הפעם עם מגמה שונה של הנורמל ולכן

$$\begin{aligned}\iint_{\partial D}F\cdot d\vec{S} &= \iint_{S_1}\vec{F}\cdot d\vec{S}-\iint_{S_0}\vec{F}\cdot d\vec{S}\\ &= \iint_D F(x,y,\varphi_1(x,y))\,dxdy-\iint_D F(x,y,\varphi_0(x,y))\,dxdy\\ &= \iint_D F(x,y,\varphi_1(x,y))-F(x,y,\varphi_0(x,y))\,dxdy\\ &= \iiint_V div\vec{F}\end{aligned}$$

2. ניקח תחום x,y,z פשוטים אז ניתן לחלק את האינטגרל הניפחי

$$\iiint_V div\vec{F} = \iiint_V\frac{\partial F}{\partial x}+\iiint_V\frac{\partial F}{\partial y}+\iiint_V\frac{\partial F}{\partial z}$$

נשתמש בכך שניתן לתת לכל אחד מהאינטגרלים הללו הצגה פרמטרית שונה ואז

$$\begin{aligned} &= \iint_D F(x,y,\varphi_1(x,y)) - F(x,y,\varphi_0(x,y))\,dxdy \\ &+ \iint_E F(x,\psi_1(x,z),z) - F(x,\psi_0(x,z),z)\,dxdz \\ &+ \iint_F F(\omega_1(y,z),y,z) - F(\omega_1(y,z),y,z)\,dydz \end{aligned}$$

הגדרה תחום V נקראת מאד נחמד אם הוא z-פשוט ומקיים את כל התנאים שהנכנו בשלב הראשון הנ"ל של המשוואה ובנוסף כאשר מתחלפים התפקידים של x, y, z עדין כל אותן התכונות מתקיימות.
תחום V נקראת נחמד אם

$$V = kj = 1V_j$$

כאשר V_j מאד נחמדים ולא חופפים זה את זה, כלומר

$$\begin{array}{c}\forall j,k \\ 1 \le j < k \le N\end{array} \quad (V_k \backslash \partial V_k) \cap (V_j \backslash \partial V_j) = \phi$$

וכדי לקבל את התחומים V_j חתכנו את V בעזרת מישורים המקבילים למערכת הצירים $x = const, y = const, z = const$

דוגמה

$$V = \left\{(x,y,z) \,|a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2\right\}$$

הערה נשים[19] לב כי אם $f:\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ רציפה ב-x אז

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt = f(x)$$

אם $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ רציפה

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2}\iint_{\{x^2+y^2\le r\}} f(x,y)\,dxdy = f(0,0)$$

אם $f:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ רציפה

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r^3}\iiint_{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)$$

בפרט

$$\nabla\cdot\vec{F}(p) = \lim_{r\to 0}\frac{\iiint_{B(p,r)}\nabla\cdot\vec{F}(p)\,dV}{V(B(p,r))}$$

אם $\vec{F} \in C'(B(P,R))$ ו $0 < r < R$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{\iint_{\partial B(P,R)}\vec{F}\cdot d\vec{s}}{V(B(p,r))}$$

[19] הרצאה ב 19.1.2005

5.2.2 הרוטור $(Curl)$ של שדה וקטורי ומשפט סטוקס

הגדרה נתונה קבוצה פתוחה $W \subset \mathbb{R}^3$ שדה ווקטורי

$$\vec{F} : W \quad \mapsto \quad \mathbb{R}^3$$

נגדיר את הרוטור של $\vec{F}$ בכל נקודה $p \in W$ ע"י

$$\begin{aligned} curl\left(\vec{F}(p)\right) &= rot\left(\vec{F}(p)\right) \\ &= \vec{\nabla} \times \vec{F}(p) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}F_3(p) - \frac{\partial}{\partial z}F_2(p)\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}F_1(p) - \frac{\partial}{\partial x}F_3(p)\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}F_2(p) - \frac{\partial}{\partial y}F_3\right)\hat{k} \end{aligned}$$

בכל נקודה $p \in W$ שבה כל הנגזרות בנוסחה קיימות

הערה נניח שבכל נקודה $p \in W$ שבה כל הנגזרות בנוסחה קיימות. (בדרך כלל נניח ש $\vec{F} \in C^1(W)$, ולכן $\nabla \times F$ מוגדרת בכל W.

הערה שיטה לזכור את הנוסחה היא ע"י סימון

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

דוגמאות

1. עבור דיסק שמסתובב במהירות זוויתית

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} \quad = \quad 2\omega\hat{k}$$

2. במערבולת

$$\vec{B}(x,y) \quad = \quad \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2+y^2}$$

אז

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} \quad = \quad \vec{0}$$

לכל $(0,0) \neq (x,y)$

משפט (סטוקס) נתון $W \subset \mathbb{R}^3$ קבוצה פתוחה. נתון שדה ווקטורי $\vec{F} : W \mapsto \mathbb{R}^3$ ב- $C^1(W)$. נתון משטח $S \subset W$ אוריאנטבילי, ע"י הצגה פרמטרית

$$\vec{\gamma} : D \quad \mapsto \quad \mathbb{R}^3$$

γ חח"ע וב $C^1\left(\tilde{D}\right)$ כאשר $D \subset \tilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ וגם $\tilde{D}$ פתוחה. כאשר D הוא תחום שעבורו מתקיים משפט גרין.

- (תזכורת- משפט גרין נכון עבור תחום D מאוד נחמד

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \,|a \le x \le b, u_0(x) \le y \le u_1(x)\} \\ &= \{(x,y) \,|\alpha \le y \le \beta, v_0(x) \le x \le v_1(x)\} \end{aligned}$$

וגם $u_1, u_0 \in C^1(a-\varepsilon, b+\varepsilon) ; v_0, v_1 \in C^1(\alpha-\varepsilon, \beta+\varepsilon)$ וגם נכון עבור תחום D שניתן לחלק אותו לתחומים מאוד נחמדים - מספר סופי שלהם ע"י קווים ישרים)

אזי

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

כאשר ∂ מסמן את "הקצה" של S.

$$\partial s = \vec{\gamma} (\partial D)$$

כאשר ∂D מסמן את השפה של D במובן הרגיל.

הערה המגמה של חישוב כיוון האינטגרציה היא ע"י קביעת נורמל למישור (כלומר בחירת צד של המישור האורינטבילי) אז נבחר את כיוון האינטגרציה על השפה כך שהפנים בצד שמאל.

הוכחה נניח[20] ש $\vec{F}(x,y,z) = (F(x,y,z), 0, 0)$ (ניתן להוכיח באותה צורה עבור $(\vec{F} = (0, F_2, 0), (0,0,F_3)$)
נניח של ∂D יש הצגה פרמטרית

$$\partial D = \{(u(t), v(t)) | a \leq t \leq b\}$$

אז אפשר לקבל הצגה פרמטרית ל "∂S"

$$"\partial S" = \{(x(t), y(t), z(t)) | a \leq t \leq b\}$$

כאשר

$$\begin{aligned} x(t) &= x(u(t), v(t)) \\ y(t) &= y(u(t), v(t)) \\ z(t) &= z(u(t), v(t)) \\ \gamma(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{aligned}$$

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \left(F_1(x(u(t), v(t)), \ldots) X_u' \frac{du}{dt} + F_1(x(u(t), v(t)), \ldots) X_v' \frac{dv}{dt} \right) dt$$

נגדיר

$$\begin{aligned} P(u(t), v(t)) &= F_1(x(u(t), v(t)), \ldots) X_u'(u,v) \\ Q(u(t), v(t)) &= F_1(x(u(t), v(t)), \ldots) X_v'(u,v) \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left(P(u(t), v(t)) \frac{du}{dt} + Q(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt} \right) dt \\ &= \int_{\partial D} P(u,v)\, du + Q(u,v)\, dv \\ &= \int_{\partial D} \left(P(u,v) \hat{i} + Q(u,v) \hat{j} \right) \cdot d\vec{r} \qquad (13) \end{aligned}$$

מתקיימים כל התנאים הדרושים להפעלת משפט גרין לפי כך האינטגרל שווה ל

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial V} \right) dudv$$

[20] הרצאה ב 23.1.2005

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial u} &= \left(\frac{F_1}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{F_1}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{F_1}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial v}\\
&\quad +F_1\left(\ldots\right)\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}\\
\frac{\partial P}{\partial v} &= \left(\frac{F_1}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{F_1}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{F_1}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u}\\
&\quad +F_1\left(\ldots\right)\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}\\
\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)
\end{aligned}$$

אזי

$$(13) = \iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(Y_u^{'}X_v^{'}-Y_v^{'}X_u^{'}\right)+\frac{\partial F_1}{\partial z}\left(Z_u^{'}X_v^{'}-Z_v^{'}X_u^{'}\right)$$

לעומת זאת

$$\iint_S = \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}$$

אז

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial z}\hat{\jmath}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\hat{k}$$

וגם

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \frac{\partial\gamma}{\partial u}\times\frac{\partial\gamma}{\partial v}ds\\
&= \left(z_u^{'}x_v^{'}-x_u^{'}z_v^{'}\right)\hat{\jmath}+\left(x_u^{'}y_v^{'}-y_u^{'}x_v^{'}\right)\hat{k}
\end{aligned}$$

וקיבלנו את משפט סטוקס.

פרוש פיזיקלי ל $\vec{\nabla}\times\vec{F}$ במקרה ש $\vec{F}$ שדה מהירות של נוזל זורם

טענה נניח ש $\vec{F}\in C^1\left(W\right)$, W פתוחה ב-$\mathbb{R}^3$ ניקח נקודה $p\in W$ נבחר ווקטור יחידה $\hat{N}$. נקבל נוסחה עבור

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(p\right)\right)\cdot\hat{N}$$

ניקח ווקטורי יחידה $\hat{I},\hat{J}$ ניצבים ל-$\hat{N}$ כך ש $\vec{N}=\hat{I}\times\hat{J}$ לכל $a>0$ יהי S_a המשטח

$$\gamma\left(u,v\right)=\left\{u\hat{I}+v\hat{J}+\overrightarrow{OP}|u^2+v^2\leq a^2\right\}$$

עגול ברדיוס a ניצב ל $\hat{N}$ מרכזו ב-p

$$\iint_s\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{"\partial s"}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

כאשר "∂S" המעגל ב"קצה" של הגדרה פרמטרית

$$a\cos\theta\hat{I}+a\sin\theta\hat{J}+\overrightarrow{OP},0\leq\theta\leq2\pi$$

והניצב באינטגרל המשטחי במגמה של $\hat{N}$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s} &= \iint_{\{(u,v)|u^2+v^2\le a^2\}} \vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\gamma\left(u,v\right)\right)\cdot\left(\vec{\gamma_u'}\times\vec{\gamma_v'}\right)dudv\\ &= \iint_{\{(u,v)|u^2+v^2\le a^2\}} \vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\gamma\left(u,v\right)\right)\cdot\hat{N}dudv\end{aligned}$$

אזי

$$\lim_{a\to0}\frac{\iint_{\{(u,v)|u^2+v^2\le a^2\}}\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(\gamma\left(u,v\right)\right)\cdot\hat{N}dudv}{\pi a^2} = \vec{\nabla}\times\vec{F}\left(p\right)\cdot\hat{N}$$

במילים אחרות

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(p\right)\cdot\hat{N} = \lim_{a\to0}\frac{1}{\pi a^2}\int_{\Gamma_a}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

הערה

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma_a}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int\limits_0^{2\pi}\vec{F}\left(a\cos\theta\hat{I}+a\sin\theta\hat{J}+\overrightarrow{OP}\right)\cdot a\left(-\sin\theta\hat{I}+\cos\theta\hat{J}\right)d\theta\\ \left(\hat{T}\left(\theta\right)=\left(-\sin\theta\hat{I}+\cos\theta\hat{J}\right)\right)\Rightarrow &= a\int\limits_0^{2\pi}\vec{F}\left(a\cos\theta\hat{I}+a\sin\theta\hat{J}+\overrightarrow{OP}\right)\cdot\hat{T}\left(\theta\right)d\theta\end{aligned}$$

נדמין גלגל קטן ברדיוס a מרכזו ב-p. מסתובב על ציר מקביל של $\hat{N}$ במהירות זוויתית ω ז"א במהירות משיקית בקצה שלו ω_a סביר להניח

$$\begin{aligned}\omega_a &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{F}\left(a\cos\theta\hat{I}+a\sin\theta\hat{J}\right)\cdot\hat{T}\left(\theta\right)d\theta\\ 2\pi a^2\omega &= \int_{\Gamma_a}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint\vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot d\vec{s}\end{aligned}$$

ניחוש

$$\begin{aligned}\omega &= \lim_{a\to0}\frac{1}{2\pi a^2}\int_{\Gamma_a}\vec{F}\cdot d\vec{r}\\ &= \frac{1}{2}\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(p\right)\cdot\vec{N}\end{aligned}$$

5.2.3 שדה משמר

הגדרה עבור $n=2,3$, קבוצה פתוחה $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ נקראת קבוצה פשוטת קשר אם לכל עקום סגור $\Gamma\subset\Omega$ קיים משטח $S\subset\Omega$ כך ש Γ מהווה את השפה של S במקרה $\mathbb{R}^2$, או Γ מהווה את ה"קצה" של S במובן של משפט סטוקס במקרה $\mathbb{R}^3$.

דוגמה ב-$\mathbb{R}^2$ כל קבוצה פתוחה Ω "בלי חורים" היא פשוט קשר.

הגדרה נתונה קבוצה פתוחה ופשוטת קשר $\Omega\subset\mathbb{R}^3$. $\vec{G}:\Omega\mapsto\mathbb{R}^3$ נניח ש $\vec{G}\in C^1\left(\Omega\right)$ נניח ש

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \vec{0}$$

בכל נקודה של Ω. אזי עבור כל עקום סגור $\Gamma\subset W$ מתקיים $\oint_\Gamma\vec{G}\cdot\vec{dr}=0$ אזי

$$\oint_\Gamma\vec{G}\cdot d\vec{r} = \iint_S\vec{\nabla}\times\vec{G}\cdot d\vec{s}=0$$

דוגמה $\vec{F}=\frac{-y\hat{i}+x\hat{j}}{x^2+y^2}$

$$\forall\left(x,y,z\right)\in\Omega;\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$$

$$\Omega = \mathbb{R}^3\backslash\left\{\left(x,y,z\right)|x=y=0\right\}$$

אזי

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{\left(x,y,z\right)|x^2+y^2>0\right\}\\ \Gamma &= \left\{\left(a\cos\theta,a\sin\theta,b\right)|0\leq\theta\leq2\pi\right\}\end{aligned}$$

ומתקיים

$$\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi\neq0$$

משפט (תזכורת) קבוצה[21] $W\subset\mathbb{R}^d$ פתוחה קשירה היא פשוט קשר. אם לכל מצולע סגור Γ קיים משטח (של משולשים מודבקים) S כך ש Γ מהווה את ה"קצה" של S במובן של משפט סטוקס.
אם $\vec{F}:W\mapsto\mathbb{R}^3$ ב-$C^1\left(W\right)$ ואם $\vec{\nabla}\times\vec{F}\left(p\right)=\vec{0}$ לכל $p\in W$. אזי לכל $\Gamma\subset W$ שהוא מצולע סגור מתקיים

$$\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

שאלה האם ניתן ללכת בכיוון השני?

משפט השדה $C\left(W\right)\ni\vec{F}:W\mapsto\mathbb{R}^d$ מקיים התנאי $\Gamma\subset W$ שהוא מצולע סגור ומתקיים $\oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$ אם"ם לכל זוג של נקודות $p\in W$ ולכל שני עקומים שהם מצולעים Γ_1,Γ_2 אשר מחברים p_1 אל p_2 מתקיים

$$\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

משפט אם $\vec{F}:W\mapsto\mathbb{R}^3$ ב $C\left(W\right)$ ואם $\vec{F}$ מקיים את התנאי (במשפט האחרון). אז קיימת פונקציה

$$\varphi:W \mapsto \mathbb{R}$$

ב-$C^1\left(W\right)$ כך שלכל נקודה $p\in W$

$$\vec{F}\left(p\right) = \vec{\nabla}\varphi\left(p\right)$$

הוכחה נבחר $p_*\in W$ נחליט $\varphi\left(p_*\right)=0$. ולכל $p\in W$ נגדיר

$$\varphi\left(p\right) = \int_{\Gamma_{p,p^*}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

[21] הרצאה ב 26.1.2005

כאשר Γ_{p,p^*} עקום מצולע מ-p_* אל p. בגלל תנאי המשפט כל בחירה של Γ_{p,p^*} נותן אותו בחירה. להפך.
נבחר $p,p+h\hat{e_1},e_1=(1,0,0)$ אז נבחן את

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi\left(p+h\hat{e_1}\right)-\varphi\left(p\right)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{\Gamma_{p_*,p+h\hat{e_1}}}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int\limits_{\Gamma_{p_*,p}}\vec{F}\cdot d\vec{r}\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_{L_h}\vec{F}\cdot d\vec{r}\\
\left(0\leq t\leq h;\vec{\gamma}\left(t\right)=p+t\hat{e_1}\right)\Rightarrow &= \frac{1}{h}\int_0^h\vec{F}\left(p+te_1\right)\cdot e_1dt\\
&= \frac{1}{h}\int_0^hF_1\left(p+t\hat{i}\right)dt\\
&\xrightarrow[h\to0]{} F_1\left(p\right)
\end{aligned}$$

ניתן לבנות בין כל שני נקודות מסילה לפי X + מסילה לפי Y + מסילה לפי Z.

הערה אז נקבל שאם מתקיים

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$$

לכל $p,q\in W$ ולכל עקום Γ מ-p ל-q.

$$\begin{aligned}
\gamma\left(a\right) &= p\\
\gamma\left(b\right) &= q
\end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma\vec{\nabla}\varphi\cdot d\vec{r} &= \int_a^b\vec{\nabla}\varphi\left(\gamma\left(t\right)\right)\cdot\gamma^{'}dt\\
&= \int_a^b\frac{d}{dt}\varphi\left(\gamma\left(t\right)\right)dt\\
&= \varphi\left(q\right)-\varphi\left(p\right)
\end{aligned}$$

הערה בין שלוש בתנאים הקודמים לא היינו צריכים תחום פשוט קשר.

תרגיל אם $\varphi\in C^2\left(W\right)$ אזי

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\varphi\right) = 0$$

כלומר קבלנו שהתנאי בדבר קיום $\vec{F}=\nabla\varphi$ גורר $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$.