הגדרה: מד"ח היא משוואה שפתרונה הוא משוואה במספר נעלמים. לרוב נסמן את המשוואה באות u ואת הנעלמים באותיות x, y. בקורס זה נעסוק לרוב בפונקציות של שני נעלמים.

המד"ח היא פונקציה של u ושל נגזרותיה החלקיות. באופן כללי, פותרים את הבעיה עם **תנאים נלווים** – תנאי התחלה או תנאי שפה.

סדר המד"ח: סדר הנגזרת הגבוהה ביותר.

מד"ח לינארית: לינארית בפונקציה הנעלמת ובנגזרותיה.

לינארית הומוגנית: מד"ח תקרא לינראית הומוגנית אם: 1. היא לינארית. 2. כל איבר שלה תלוי ב- u ובנגזרותיה.

מד"ח קוואזי-לינארית: מד"ח תקרא קוואזי-לינארית אם ניתן לכתוב אותה כפולינום מסדר ראשון בנגזרות הגבוהות ביותר המופיעות בתוך המד"ח. למשל, אם החזקה הגבוהה ביותר היא k, אזי כל הנגזרות מדרגה k מופיעות כפולינום מסדר ראשון (אין מכפלה של נגזרת מדרגה k בנגזרת מדרגה k). ייתכן שהמקדמים יהיו תלויים ב- x, y, u ובנגזרות מסדר נמוך יותר של u.

הגדרה: u תקרא **פתרון של המד"ח** אם u וכל נגזרותיה המופיעות בתוך המד"ח:

1. מוגדרות.
2. מקיימות את המד"ח.

- **פתרונות של מד"ח לינארית הומוגנית** מקיימים: אם u_1, u_2 פתרונות, אזי כל צירוף לינארי שלהם יהווה פתרון אף הוא.
- u תקרא **פתרון אמיתי** או **פתרון קלאסי** אם:
  - u מהווה פתרון למד"ח.
  - כל הנגזרות של u המופיעות במד"ח הן רציפות.
- **מיון בעיות** לפי תנאים נלווים:
  - בעיה הכוללת מד"ח + תנאי התחלה נקראת **בעית קושי**.
  - בעיה הכוללת מד"ח + תנאי שפה נקראת **בעית התחלה**.
  - בעיה הכוללת מד"ח + תנאי התחלה + תנאי שפה נקראת **בעיה מעורבת**.
- בעיה תקרא **מוצגת היטב** (well posed) אם מתקיים:

  (1) לבעיה **קיים** פתרון.

  (2) הפתרון **יחיד**.

  (3) הפתרון **יציב** (נקודת ש"מ), כלומר תלוי באופן רציף בפרמטר הבעיה ובתנאים הנלווים.

פתרון באמצעות מד"ר

שלבי הפתרון:

1. **מגדירים פונקציה חדשה**, כך שאם מציבים אותה במשוואה המקורית מקבלים מד"ר.
2. **פותרים את המשוואה** לפי הפונקציה החדשה (לא לשכוח – כאשר מבצעים אינטגרציה יש להוסיף פונקציה התלויה במשתנים לפיהם **לא** בצענו את האינטגרציה!).
3. **חוזרים למשתנה המקורי**: מציבים ומקבלים שוב מד"ר במשתנה המקורי.
4. **מקבלים פתרון כללי**. במידת האפשר, מציבים את התנאים הנלווים על מנת לקבל פתרון פרטי.

למשל: $u_{xy}(x,y)+u_x(x,y)=0$. מגדירים: $v(x,y)=u_x(x,y)$ ומקבלים את המד"ר: $v_y+v=0$. פותרים ומציבים במשוואה המקורית.

להערות והארות: rotaminbar@yahoo.com

מד"ח קוואזי-לינארית מסדר ראשון

צורה כללית: $\boxed{a(x,y,u)\cdot u_x + b(x,y,u)\cdot u_y = c(x,y,u)}$

שיטת האופיינים (הפרמטריזציה)

תיאוריה כללית:

הפתרון שאנחנו מחפשים הינו פונקציה ב- 2 משתנים $u(x,y)$ = משטח. מצאנו את הפתרון כתוצאה מאינטגרציה, לכן נקרא לו "משטח אינטגרלי".

הנורמל למשטח בנקודה (x,y,u) יהיה $\vec{N}=(u_x,u_y,-1)$.

המד"ח הנתונה: $a(x,y,u)\cdot u_x + b(x,y,u)\cdot u_y = c(x,y,u)$.

$$\Leftrightarrow a(x,y,u)\cdot u_x + b(x,y,u)\cdot u_y + c(x,y,u)\cdot(-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a(x,y,u),b(x,y,u),c(x,y,u))\cdot(u_x,u_y,-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(a,b,c)\cdot\vec{N}=0}$$

נגדיר כעת: $\vec{A}(x,y,u)=(a(x,y,u),b(x,y,u),c(x,y,u))$. אז מתקיים: $\vec{A}\cdot\vec{N}=0$, כלומר $\vec{A}$ **משיק ליריעה** בכל נקודה.

אם נתחיל לנוע מנקודה כלשהי על פני היריעה לאורך מסלול שכיוונו $\vec{A}$, נוכל לסמן את המסלול שלנו על פני היריעה על ידי $\vec{r}(t)=(x(t),y(t),u(t))$ (מסלול = תיאור חד פרמטרי). ואז, השינוי במסלול בכל נקודה יהיה:

$\vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t),u'(t))$. נזכור שהשינוי במסלול פירושו

המהירות שלנו בכל נקודה במסלול = המשיק למסלול. כלומר:

$$\vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t),u'(t))=\vec{A}$$

בעצם קיבלנו:

$$\vec{r}\,'(t)=(x'(t),y'(t),u'(t))=\vec{A}(t)=$$
$$(a(x(t),y(t),u(t)),b(x(t),y(t),u(t)),u(x(t),y(t),u(t)))$$

ונקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\boxed{(1)\begin{cases} x'(t)=a(x(t),y(t),u(t)) \\ y'(t)=b(x(t),y(t),u(t)) \\ u'(t)=c(x(t),y(t),u(t)) \end{cases}}$$

המערכת הזו נקראת **מערכת משוואות האופיינים**.

נרצה לשלב בפתרון את תנאי ההתחלה: יהא $\gamma_0(s)$ עקום התחלתי כלשהו (=עקום המקיים את המשוואה + תנאי התחלה).

תיאור פרמטרי כללי שלו: $\boxed{\gamma_0(s)=(x_0(s),y_0(s),u_0(s))}\ (2)$

כל אחת ממערכת המשוואות (1), (2) מתארת עקום. השילוב שלהם ייתן לנו משטח, שהוא משוואה התלויה בשני פרמטרים.

כלומר, תיאור של המשטח: $u(t,s)=(x(t,s),y(t,s))$.

להערות והארות: rotеminbar@yahoo.com

לאחר פתירת המערכת (1) כמד"ר נזכור שהיא מד"ח, ונציב בה את המערכת (2).

תנאי החיתוך: אנו רוצים שהעקום ההתחלתי (הנתון לנו על ידי (2)) אכן יחתוך את המשטח האינטגרלי (הנתון לנו על ידי (1)). מחדו"א, אנחנו יודעים ששני עקומים במרחב נחתכים אמ"מ היעקוביאן של הנורמלים שלהם לא מתאפס. כלומר:

$$J\Big|_{\gamma_0(s)} = \begin{vmatrix} a\left(x_0(s), y_0(s), u_0(s)\right) & \frac{d}{ds}x_0(s) \\ b\left(x_0(s), y_0(s), u_0(s)\right) & \frac{d}{ds}y_0(s) \end{vmatrix} = \boxed{a \cdot y_0{}' - b \cdot x_0{}' \neq 0}$$

וזהו **תנאי החיתוך**.

טענה: קיום תנאי החיתוך הוא **תנאי מספיק** לקיום **פתרון אמיתי** (קלאסי).

- **עבור** $J=0$ בקטע מסויים, או שאין פתרון אמיתי או שיש אינסוף.

מקרה ראשון: **המקרה המקביל**: כאשר $(a,b,c) = (x_t, y_t, u_t) \| \left(x_0{}'(s), y_0{}'(s), u_0{}'(s)\right)$.

במקרה זה, נחפש באופן מלאכותי עקום התחלתי $\Gamma'(s)$. זהו עקום שרירותי, כאשר הדרישות ממנו:

1. רכיביו גזירים ברציפות.
2. תנאי החיתוך כן מתקיים עליו.
3. לא סותר את העקום ההתחלתי – בעל נקודה אחת משותפת.

בפועל, נקבל משפחה של עקומים $\left\{\Gamma_\alpha{}'(s)\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$ שיתנו לנו **אינסוף פתרונות**.

מקרה שני: **המקרה לא מקביל**: במקרה זה, $J=0$ (כלומר $(x_t, y_t) \| \left(x_0{}'(s), y_0{}'(s)\right)$) אבל $(x_t, y_t, u_t) \nparallel \left(x_0{}'(s), y_0{}'(s), u_0{}'(s)\right)$. במקרה זה **אין פתרון**.

← **סיכום התהליך בפועל**:

1. משיק ל**עקום האופייני**: $\left(x'(t), y'(t), u'(t)\right) = (a,b,c)$. = מערכת משוואות בנעלם אחד הנקראת **ממ"א** (=מערכת משוואות האופייניים). פתירת **מד"ר** ב- t ומציאת פתרון כללי.
2. כתיבת **העקום ההתחלתי** בצורה פרמטרית: $\left(x_0(s), y_0(s), u_0(s)\right)$.
3. משיק לעקום ההתחלתי: $\left(x_0{}'(s), y_0{}'(s), u_0{}'(s)\right)$. בדיקת **תנאי החיתוך** עם העקום האופייני.
4. הצבת העקום ההתחלתי בפתרון הכללי (לאחר שבדקנו שתנאי החיתוך אכן מתקיים) ומציאת **פתרון פרטי בצורה פרמטרית**: $x = x(t,s)$, $y = y(t,s)$, $u = u(t,s)$.
5. **מעבר** מהפתרון הנתון בצורה פרמטרית ל**פתרון מפורש** מהצורה: $u = u(x,y)$. אפשרי רק אם מתקיים **תנאי החיתוך**. אם הוא לא מתקיים – מוצאים אינסוף פתרונות (בעזרת פרמטר מסויים, נניח α, היכול לקבל אינסוף ערכים) או שמראים שאין פתרון כלל.

הגדרה: **משוואת ההיטלים** היא המשוואה עבור היטלי הקווים האופייניים על מישור xy. מתקבלת באופן הבא:

$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u)$, $\frac{dy}{dt} = b(x,y,u)$. נשחק עם המשוואות כאילו אנחנו פיזיקאים ונקבל:

להערות והארות: roteminbar@yahoo.com

$\frac{b(x,y,u)}{a(x,y,u)} = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$. כלומר: $\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y,u)}{a(x,y,u)}$.

שיטת החלפת המשתנים

תיאוריה כללית:

נניח שנתונה לנו משוואה קוואזי-לינארית מהצורה: $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y,u)$, כלומר $\boxed{a = a(x,y)\ ,\ b = b(x,y)}$., נרצה לבצע **החלפת משתנים** $(x,y) \to (s,t)$.

נמצא את **היטלי הקווים האופייניים**: כזכור $\frac{b(x,y)}{a(x,y)} = \frac{y_t}{x_t} = y_x$. מכאן **נחלץ**: $f(x,y) = const$ ונגדיר את המשתנה החדש: $s = f(x,y)$. (למען הנוחות נכתוב $s = s(x,y)$.

את המשתנה השני t נבחר באופן הבא: אם $a \neq 0$ נבחר $t = x$, אחרת אם $b \neq 0$ נבחר $t = y$ (אם שניהם שווים לאפס אין לנו משוואה).

נעבור כעת **לפונקציה במשתנים החדשים**: $u(x,y) = u(x(s,t), y(s,y)) = w(s,t)$. **נגזור**:

$u_x = w_s \cdot s_x + w_t \cdot t_x$, $u_y = w_s \cdot s_y + w_t \cdot t_y$. עבור בחירה נכונה של משתנים t,s נקבל מד"ר, אותה נוכל לפתור להנאתנו.

מד"ח לינארית מסדר שני

צורה כללית:

$L[u] = a(x,y)u_{xx} + 2 \cdot b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)$ מגדירים את

הדסקרמיננטה: $\boxed{\delta[L](x,y) = b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y)}$. δ תלויה רק בשלושת המקדמים a,b,c, לכן מסמנים:

$L_0[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$ = **החלק העיקרי** של L.

מיון המשוואות מתבסס על הדסקרימיננטה, באופן הבא:

$\delta[L] > 0$ - **המקרה ההיפרבולי**: נקבל **משוואת גלים**: $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$\delta[L] = 0$ - **המקרה הפרבולי**: **נקבל משוואת חום**: $u_t = k \cdot u_{xx}$

$\delta[L] < 0$ - **המקרה האליפטי**: נקבל **משוואת לפלס**: $u_{xx} + u_{yy} = 0$

על מנת לפתור את המד"ח נרצה להעבירה ל**צורה קנונית**. לשם כך, נבצע **החלפת משתנים** $(x,y) \leftrightarrow (s,t)$ ונעבור לפונקציה חדשה $u(x,y) \leftrightarrow w(s,t)$.

צורה קנונית:

$\delta[L] > 0$ - **המקרה ההיפרבולי**: $w_{st} + G(s,t,w,w_s,w_t) = 0$

$\delta[L] = 0$ - **המקרה הפרבולי**: $w_{ss} + G(s,t,w,w_s,w_t) = 0$

$\delta[L] < 0$ - **המקרה האליפטי**: $w_{ss} + w_{tt} + G(s,t,w,w_s,w_t) = 0$

להערות והארות: roteminbar@yahoo.com

כאשר בכל המקרים $G(s,t,w,w_s,w_t)$ היא פונקציה אפינית (לינארית + הזזה) במשתניה.

למה: תהא $u(x,y)$ פונקציה המהווה פתרון למשוואה היפרבולית (או פרבולית, או אליפטית) לכל $(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$.

אזי: כל החלפת משתנים **חח"ע ועל** $(x,y)\leftrightarrow(s,t)$ תיתן $w(s,t)$ המהווה פתרון למשוואה היפרבולית (או פרבולית, או אליפטית) לכל $(s,t)\in D'\subseteq\mathbb{R}^2$.

במילים אחרות: החלפת משתנים **חח"ע ועל שומרת על סוג המשוואה**.

המעבר לצורה הקנונית מתבצע באמצעות **החלפת משתנים**, באופן הבא:

המקרה ההיפרבולי: נבצע את החלפת המשתנים הבאה: היטלי האופיינים: $y_x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$. מכאן מחלצים את הפונקציה $f_\pm(x,y)=c$. והחלפת המשתנים: $f_\pm(x,y)=c$, $s=f_+(x,y)$, $t=f_-(x,y)$.

המקרה הפרבולי: היטלי האופנים במקרה זה: $y_x=-\frac{b}{a}$. מכאן נמצא $f(x,y)=c$ ונבחר: $t=f(x,y)$, $s=x$.

המקרה האליפטי: היטלי האופנים במקרה זה: $y_x=\frac{b\pm i\sqrt{ac-b^2}}{a}$. מחלצים וכולי.

משוואת הגלים

ההומוגנית: בעית קושי עבור משוואת הגלים ההומוגנית:

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} & t>0\ ,\ x\in\mathbb{R} \\ u(x,0)=f(x) & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- מיון המשוואה: **היפרבולית**.
- **החלפת משתנים**: $\alpha(x,t)=x-ct$, $\beta(x,t)=x+ct$.
- **פתרון כללי** זו משוואה מהצורה: $u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)$
- נוסחת דלמבר עבור משוואת הגלים ההומוגנית: **הפתרון הפרטי** (עבור התנאים הנתונים למעלה) נראה כך:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\tau)d\tau}$$

הבעיה **מוצגת היטב** אם: $f(s)\in c^2(\mathbb{R})$, $g(s)\in c^1(\mathbb{R})$, t סופי.

משוואת הגלים הלא-הומוגנית:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t) & x\in\mathbb{R},t>0 \\ u(x,0)=f(x) & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

טענה: אם קיים לבעיה **פתרון אמיתי**, אזי: הוא **יחיד**.

נוסחת דלמבר (הנותנת **פתרון פרטי**) עבור משוואת הגלים הלא הומוגנית:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x-ct)+f(x+ct)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{\tau=0}^{t}\int_{s=x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(s,\tau)dsd\tau}$$

משוואת החום, שטורם-ליוביל, בעיות התחלה-שפה

תקציר תיאוריה:

נתונה **משוואת החום**: $u_t-ku_{xx}=0$ (1) עבור $0\le x\le L$, $t>0$ $(k>0)$.

נוסיף **תנאי התחלה**: $(2)\ u(x,0)=f(x)$

ו**תנאי שפה** מסוג ראשון: $(3)\ u(0,t)=b_0(t),\ u(L,t)=b_L(t)$

שלושת אלה מהווים את **בעית דיריכלה**.

עבור **תנאי שפה הומוגנים** נחפש פתרון בעזרת **הפרדת משתנים**, כלומר נחפש פתרון מהצורה:

$$(*)\ \boxed{u(x,t)=X(x)\cdot T(t)}$$

נציב ובסופו של דבר נקבל שתי מד"ר: $T'(t)+k\lambda T(t)=0\ (6)$, $X''(x)+\lambda X(x)=0\ (5)$. עבור המשוואה (5) נקבל גם תנאי שפה: $X(0)=X(L)=0\ (7)$ (שנובעים מהתנאים המקוריים). המשוואה (5) ביחד עם תנאי השפה (7) נותנים לנו מקרה פרטי וחשוב של **משוואת שטורם-ליוביל**.

פתרון משוואת שטורם-ליוביל: בודקים עבור אלו ערכי λ **קיים פתרון לא טריוויאלי**. ערכים כאלה נקראים, באופן מפתיע משהו, **ערכים עצמיים**, והפונקציות המתאימות להם נקראות (שוב, באופן מפתיע משהו) **פונקציות עצמיות**.

למשל, במקרה דנן,כלומר: $\begin{cases}X''(x)+\lambda X(x)=0\\X(0)=X(L)=0\end{cases}$, הפתרון קיים רק עבור $\lambda>0$. והע"ע + פ"ע יהיו:

$$\left\{\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,X_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi\lambda}{L}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

נזכור: התחלנו ממשוואת החום! נרצה לפתור אותה עד סופה: מצויידים בערכי הע"ע λ_n נוכל לפתור את (6):

$T'_n(t)+k\lambda_nT_n(t)=0$ זוהי מד"ר פשוטה, ופתרונה (לאחר הצבת λ_n: $T_n(t)=e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}$. קיבלנו אינסוף פתרונות:

$$\boxed{u_n(x,t)=a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}}$$

עקרון הסופרפוזיציה: מכיוון שמדובר בפתרונות של המשוואה ההומוגנית, כל צ"ל שלהם יהווה אף הוא פתרון של המשוואה המקורית, (1)... זוכרים?)

טענה: **הפתרון הכללי** של המשוואה נתון על ידי הסכום האינסופי של כל הפתרונות, כלומר:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cdot e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}}$$

על מנת למצואת פתרון פרטי נציב את תנאי ההתחלה $u(x,0)=f(x)$ (2). נקבל:

$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)=f(x)$. זהו טור פוריה של סינוסים, ואת המקדמים A_n נמצא באופן הבא:

$\boxed{A_m=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)}$.

סיכום – דרך הפתרון (עבור משוואת החום ההומוגנית עם תנאים הומוגניים):

1. הפרדת משתנים: מציבים $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ במשוואה.
2. מקבלים שתי מד"ר: אחת עבור $T(t)$, אחת עבור $X(x)$.
3. מציבים את התנאים הנלווים של הפונ' המקורית על מנת לקבל תנאי שפה עבור המשוואה שקיבלנו עבור $X(x)$.
4. מתחילים עם המשוואה שקיבלנו עבור $X(x)$ (משוואת ש-ל): מוצאים אילו ערכי λ מקיימים את המשוואה.
5. מוצאים עבורם פ"ע מתאימות $X_n(x)$.
6. את ערכי ה- λ_n שמצאנו בסעיף 4 מציבים במשוואה שקיבלנו עבור $T(t)$. מוצאים פ"ע מתאימות $T_n(t)$.
7. מוצאים אינסוף פתרונות בדידים: : $u_n(x,t)=X_n(x)\cdot T_n(t)$.
8. הפתרון הכללי הוא צ"ל של הפתרונות הבדידים: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nX_n(x)\cdot T_n(t)$
9. מציבים את תנאי ההתחלה (עד כאן השתמשנו רק בתנאי שפה).
10. מחלצים את המקדמים A_n ומוצאים פתרון פרטי.

הכללה של שטורם-ליוביל

צורה כללית של המשוואה: $\left[p(x)\cdot v'(x)\right]'+q(x)v(x)+\lambda r(x)v(x)=0$ (1), $a<x<b$

+ **תנאי שפה**: $(2)\ \begin{cases}B_a[v]=\alpha\cdot v(a)+\beta\cdot v'(a)=0 & |\alpha|+|\beta|\neq 0\\ B_b[v]=\gamma\cdot v(b)+\lambda\cdot v'(b)=0 & |\gamma|+|\lambda|\neq 0\end{cases}$

כאשר: $p(x),p'(x),q(x),r(x)$ רציפות.

הפונקציה $r(x)$ נקראת **פונקצית משקל** (נראה בהמשך למה).

סוגי תנאי שפה:

$\alpha\neq 0$, $\beta=0$ - סוג ראשון (דיריכלה).

$\alpha=0$, $\beta\neq 0$ - סוג שני (נוימן).

$\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ - סוג שלישי.

להערות והארות: roteminbar@yahoo.com

<u>מיון בעיות ש-ל</u>:

1. **רגולרית**: $p,r>0$ לכל $x\in[a,b]$.
2. **סינגולרית**:

א. $p,r>0$, לכל $x\in(a,b)$, $r(x)=0$ או $p(x)=0$ עבור $x=a, x=b$.

ב. $p,r>0$, לכל $x\in(a,b)$, $p,r\in c(a,b)$, p או r לא רציפות בקצוות.

ג. $a=-\infty$, $b<\infty$ או $a>-\infty$, $b=\infty$.

- **<u>טענה</u>**: נתונה בעית **ש-ל רגולרית** $(1)+(2)$. ויהא $\lambda\in\mathbb{R}$ כך שהפונקציות $v_\lambda(x)$, $u_\lambda(x)$ מהוות בסיס למרחב הפתרונות של (1).

אזי: λ מהווה ע״ע של $(1)+(2)$ **אם ורק אם** $\begin{vmatrix} B_a[u_\lambda] & B_a[v_\lambda] \\ B_b[u_\lambda] & B_b[v_\lambda] \end{vmatrix}=0$

תכונות כלליות של ע״ע, פ״ע של ש-ל.

1) תהיינה $X_n(x)$, $X_m(x)$ **פונקציות עצמיות** של ש-ל רגולרית המתאימות לע״ע λ_n, λ_m בהתאמה ($\lambda_m\neq\lambda_n$).

אזי: $\int_a^b r(x)X_n(x)X_m(x)dx=\langle x_n,x_m\rangle_{r(x)}=0$ (הע״ע **אורתוגונלים** לפי המכ״פ עם **פונ' המשקל**).

2) **<u>זהות לגרנז'</u>**: תהיינה $u(x), v(x)$ פ״ע של בעית ש-ל עם ע״ע מתאימים.

אזי: $\boxed{\int_a^b u\cdot L[v]-v\cdot L[u]dx=0}$

3) כל ה**ע״ע** של בעית **ש-ל רגולרית** הם **ממשיים**.

4) כל ה**ע״ע** של בעית **ש-ל רגולרית** הם **פשוטים** (ר״א=ר״ג=1).

5) כל ה**פ״ע** של בעית **ש-ל רגולרית** ניתנות לכתיבה בתור: $v(x)=c\cdot u(x)$, כאשר $u(x)$ פונקציה **ממשית** ו- $c\in\mathbb{C}$.

6) לבעית **ש-ל רגולרית** קיימים **אינסוף ע״ע ממשיים** המקיימים: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n$, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$.

<u>מסקנה</u>: לבעית ש-ל רגולרית/מחזורית קיימת **סדרה** של **פ״ע ממשיות א״נ** ביחס למכ״פ $\langle v_n,v_m\rangle_r$

<u>הגדרה</u>: $E[a,b]$ = מרחב הפונקציות **הרציפות למקוטעין** בקטע $[a,b]$.

$E_r[a,b]$ = המרחב לעיל המכיל את ה**מכ״פ** $\boxed{\langle v,u\rangle_{r(x)}=\int_a^b r(x)v(x)u(x)dx}$.

7) ה**מערכת** הא״נ **של הפ״ע** $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ השייכת לסדרה עולה של ערכים $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, היא **שלמה** במרחב $E_r[a,b]$ (שלמה = בסיס למרחב אינסופי).

8) תהא $f(x)\in C[a,b]$.

אזי: לכל $x\in[a,b]$, **הפיתוח** של $f(x)$ **לפי פ״ע** של בעית ש-ל רגולרית/מחזורית מתכנס לערך הבא: $\boxed{\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}}$

משוואת החום: הפתרון האמיתי ויחידותו

סיכום עד כה: נתונה משוואת החום + תנאים נלווים:

משי החום: (1) (א) $u_t = k\cdot u_{xx}$ $\quad 0<t<T<\infty,\ 0<x<L$

ת. שפה: (1) (ב) $u(0,t)=u(L,t)=0$ $\quad 0<t<T$

ת. התחלה: (1) (ג) $u(x,0)=f(x)$ $\quad 0\le x\le L$

נסמן את כל אלה ב- (1).

פתרון המשוואה נראה כך: $\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$

טור פוריה המוכלל מתקבל עבור תנאי ההתחלה: $(2)\ u(x,0)=\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$

טור פורייה המוכלל (2) **מתכנס** ל- $f(x)$ בהחלט ובמ"ש בקטע $[0,L]$. את המקדמים ניתן למצוא באופן הבא:

$B_n=\frac{2}{L}\left\langle f(x),\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\rangle$, כאשר **המכ"פ** מוגדרת כך (במקרה שלנו פונקצית המשקל של ש-ל $r(x)=1$):

$$\langle u,v\rangle=\int_a^b u(x)v(x)dx$$

<u>**הגדרה**</u>: נאמר כי $u(x,t)$ מהווה **פתרון אמיתי** (פתרון קלאסי) של (1), אם $u(x,t)$:

1. גזירה **פעמיים ברציפות** לפי x **ופעם ברציפות** לפי t בתחום $(x,t)\in(0,L)\times(0,T)$ (**בתחום הפתוח**).
2. גזירה **ברציפות לפי** x בתחום $(x,t)\in[0,L]\times(0,T)$.
3. **רציפה בתחום הסגור** $(x,t)\in[0,L]\times[0,T]$ (עבור $T=\infty$ עלולה להיות בעיה, לכן לא כותבים תחום סגור לחלוטין).
4. **מקיימת את** המשוואה + תנאי שפה + תנאי התחלה (1).

<u>**טענה**</u>: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ **מהווה פתרון אמיתי**.

<u>**טענה**</u>: עבור הבעיות (1) + (2) לעיל קיים לכל היותר **פתרון אמיתי יחיד**.

<u>משוואת חום/גלים עם תנאי שפה לא הומוגנים</u>

אפשרויות:

$(1)\ u(0,t)=a(t)\ ,\ u(L,t)=b(t)$ $\qquad (2)\ u_x(0,t)=a(t)\ ,\ u_x(L,t)=b(t)$

$(3)\ u_x(0,t)=a(t)\ ,\ u(L,t)=b(t)$ $\qquad (4)\ u(0,t)=a(t)\ ,\ u_x(L,t)=b(t)$

איפוס ת. שפה: נגדיר פונ' תיקון $v(x,t)$. ונגדיר פונ' נוספת: $w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$.

פונקצית התיקון: עבור $(1),(3),(4)$ נבחר: $v(x,t)=A(t)\cdot x+b(t)$

להערות והארות: roteminbar@yahoo.com

עבור (2) נבחר: $v(x,t)=A(t)\cdot x+b(t)$

פותרים עבור $w(x,t)$ ובסוף מציבים.