מד"ח 104216 - תקציר

אינדקס:

הערת המחבר: הסיכום אינו מושלם ויכול להיות שנפלו בו טעויות, לכן צירפתי גם את הקובץ doc, תרגישו חופשי לשנות, לשכתב, להרחיב, ולעדכן את הפתק בהתאם (גם ללא ידיעתי).

פרק 1: מד"ח מסדר ראשון

1.1 הגדרות

סדר המשוואה

סדר הנגזרת הגבוהה ביותר

משוואה לינארית

לינארית בפונקציה הנעלמת ובנגזרותיה

משוואה קוואזי לינארית

לינארית בנגזרות מהסדר הגבוהה ביותר

משוואה סמי לינארית

לא לינארית רק בפונקציה הנעלמת (אבל לינארית בכל נגזרותיה)

אופרטור דיפרנציאלי

פעולה לינארית על פונקציה, כלומר מקיימת $L[\alpha u+\beta v]=\alpha L[u]+\beta L[v]$

דוגמה לאופרטור דיפרנציאלי: לפלסיאן: $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, מתקיים $\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

תנאי התחלה

אילוץ על הפתרון שמתקיים לכל x בזמן $t=0$, לדוגמה: $\begin{aligned}u(x,0)&=f(x)\\ u_t(x,0)&=g(x)\end{aligned}$

תנאי שפה

אילוץ על הפתרון שמתקיים לכל t על השפה ($x=0,L$), לדוגמה: $\begin{aligned}u(0,t)&=u_0(t)\\ u(L,t)&=u_1(t)\end{aligned}$

1.2 מד"ח לינארית

צורה: $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=d(x,y)$

1.2.1 דרך פתרון: שיטת ההצבה

1. מציבים בנוסחה: $\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$, ומקבלים פתרון כללי ל y: $y(x)=f(x)+c$
2. מגדירים משתנה חדש: $s(x,y(x))=y(x)-f(x)$, (מתקיים $s=c$ לכל x,y)
3. בוחרים משתנה נוסף t כך שהיעקביאן שונה מאפס, $J\left(\frac{s,t}{x,y}\right)=\begin{vmatrix}s_x & s_y\\ t_x & t_y\end{vmatrix}\neq 0$ (בדרך כלל מספיק לבחור $t=x$)

4. רושמים את המשוואה כאשר מחליפים $u(x,y) \quad \to \quad \tilde{u}(s,t)$
ומחליפים את הנגזרות לפי כלל השרשרת

$$\begin{aligned} u &\quad \to \quad \tilde{u} \\ u_x &\quad \to \quad \tilde{u}_s s_x + \tilde{u}_t t_x \\ u_y &\quad \to \quad \tilde{u}_s s_y + \tilde{u}_t t_y \end{aligned}$$

5. מתקבלת מד"ר, פותרים אותה ובסוף מציבים את $s(x,y), t(x,y)$ במקום s, t (קיימות פונקציות כאלה בגלל שהיעקביאן שונה מאפס)

1.3 מד"ח קוואזי לינארית

צורה: $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$

צורת תנאי ההתחלה: $u(f_1(s), f_2(s)) = f_3(s)$ (עקום עם פרמטר חופשי s)

1.3.1 קווים אופייניים

נכתוב את המשוואה בצורה

$$au_x + bu_y - c = 0 \quad \to \quad (u_x, u_y, -1)(a,b,c) = 0$$

אפשר לראות ששני הווקטורים ניצבים

הווקטור הראשון הוא הגרדיאנט של המשטח $u = u(x,y)$: $\nabla\big(u(x,y) - u\big) = (u_x, u_y, -1)$

ולכן הווקטור השני $(a,\ b,\ c)$ תמיד משיק למשטח u

הווקטור $(a,\ b,\ c)$ הוא המשיק לקווים האופייניים של u

1.3.2 דרך פתרון: שיטת הקווים האופייניים

1. פותרים את המערכת:

$$\begin{aligned} x_t(t,s) &= a(x,y,u) \\ y_t(t,s) &= b(x,y,u) \\ u_t(t,s) &= c(x,y,u) \end{aligned}$$

עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} x(0,s) &= f_1(s) \\ y(0,s) &= f_2(s) \\ u(0,s) &= f_3(s) \end{aligned}$$

2. מבטאים את t, s בעזרת x, y
בודקים מתי אפשר לעשות את זה, כלומר מתי היעקביאן שונה מאפס:

$$J\left(\frac{s,t}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} \neq 0$$

(מכאן יכולים להתקבל אילוצים על x, y שיבטיחו שהיעקביאן שונה מאפס)

3. מציבים את $t(x,y), s(x,y)$ בפתרון u: $u(x,y) \quad \to \quad \tilde{u}(t,s) = \tilde{u}(t(x,y), s(x,y))$

הערות

1. שים לב שלכל $s = c$ קבוע כלשהו שנבחר, המערכת מייצגת קו אופייני בפרמטר t.

2. היטל קו אופייני על מישור x-y הוא העקום $(x(t), y(t))$ כאשר $s = c$ קבוע כלשהו.

3. הדרישה שהיעקביאן יהיה שונה מאפס כאשר $t = 0$ נקראת תנאי הטרנסברסליות:

$$J\left(\frac{s,t}{x,y}\right) = \begin{vmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix}_{t=0} \neq 0$$

1.3.3 תנאי הטרנסברסליות

דרישה שההיטלים על מישור x-y של המשיקים לעקום האופייני ולעקום ההתחלה לא יהיו מקבלים:

משיק לעקום האופייני הוא: $\left(x_t(0,s), y_t(0,s), u_t(0,s)\right) = \left(a(0,s), b(0,s), c(0,s)\right)$

(עבור כל s מתקבל עקום אופייני אחר)

משיק לעקום ההתחלה הוא: $\left(f_1'(s),\ f_2'(s),\ f_3'(s)\right)$

לכן תנאי הטרנסברסליות הוא: $\left(f_1'(s),\ f_2'(s)\right) \nparallel \left(a(0,s), b(0,s)\right)$

כלומר $\begin{vmatrix} f_1'(s) & f_2'(s) \\ a(0,s) & b(0,s) \end{vmatrix} \neq 0$ (מתקיים אם הווקטורים בלתי תלויים)

מתקבל ביטוי שכולל את s, t צריך להציב את הביטויים שלהם $s(x,y), t(x,y)$ ולבדוק לאיזה x, y התנאי מתקיים

אם תנאי הטרנסברסליות אינו מתקיים, ולפי קיום ויחידות יש אינסוף פתרונות, אז יש שתי דרכים למציאת פתרונות:

א. מוצאים פתרון כללי, מציבים אותו בתנאי ההתחלה ומוצאים אילוץ על הפונקציה הנעלמת.

ב. עקום ההתחלה מוכל בקווים האופייניים, כלומר אם מציבים בקווים האופייניים t מסויים מקבלים את עקום ההתחלה, לכן אפשר לבחור כל עקום אחר ש:

1. חותך את עקום ההתחלה הנתון בנקודה אחת, $s = 0$ (בדרך כלל מהצורה $\Gamma_1 = \left(0, s, h(s)\right)$),

2. מקיים את תנאי הטרנסברסליות (ההיטלים של שני העקומים נחתכים).

והפתרון שיתקבל יהיה פתרון מתאים שיכיל גם את העקום ההתחלה הראשון.

1.3.4 קיום ויחידות

נסתכל על המשיקים לעקום ההתחלה, (f_1', f_2', f_3') ולקווים האופייניים, (a,b,c) ונגדיר שתי דטרמיננטות:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \qquad \tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} a & c \\ f_1' & f_3' \end{vmatrix}:$$

1. $\Delta \neq 0$ אם היטלי המשיקים לא מקבילים, $(f_1', f_2') \nparallel (a,b)$ אז יש <u>פתרון יחיד</u>
2. $\Delta = 0$ אם ההיטלים מקבילים, $(f_1', f_2') \parallel (a,b)$, אז:
   - $\tilde{\Delta} = 0$ אם המשיקים עצמם מקבילים, $(f_1', f_2', f_3') \parallel (a,b,c)$ אז יש <u>אינסוף פתרונות</u>
   - $\tilde{\Delta} \neq 0$ אם המשיקים עצמם לא מקבילים, $(f_1', f_2', f_3') \nparallel (a,b,c)$ אז <u>אין פתרונות</u>
3. יכולות להיות נקודות בהם תנאי הטרנסברסליות אינו מתקיים ולכן יכול להיות ש:
   א. הפתרון קיים וגזיר $(C1)$
   ב. הפתרון קיים ולא גזיר
   ג. הפתרון לא קיים

הערה: את הוקטור (a,b,c) מבטאים בעזרת (f_1, f_2, f_3) כלומר מציבים $x = f_1,\ y = f_2,\ u = f_3$

1.3.5 דרך פתרון: שיטת לגרנז'

שיטה למציאת פתרון כללי למד"ח קוואזי לינארית <u>ללא תנאי התחלה</u>

1. מנחשים שני שדות משמרים φ,ψ שהגרדיאנט שלהם מאונך ל (a,b,c):

$$\nabla\psi = P_2 \qquad \nabla\varphi = P_1$$
$$P_2 \perp (a,b,c) \qquad P_1 \perp (a,b,c)$$

2. הפתרון הוא כל פונקציה שמקיימת $\varphi = f(\psi) \quad \rightarrow \quad F(\varphi,\psi) = 0$
3. לפי תנאי ההתחלה מוצאים את $f(\alpha)$

פרק 2: מד"ח מסדר שני

2.1 מד"ח לינארית

צורה: $Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G$

2.1.1 סוגי משוואות

הדסקרימיננטה מוגדרת בצורה הבאה: $\Delta=B^2-4AC$, ויש 3 אפשרויות:

1. $\Delta>0$, המשוואה היא היפרבולית, צורה קנונית $u_{st}+f(u_s,u_t,u)=0$
2. $\Delta=0$, המשוואה היא פרבולית, צורה קנונית $u_{ss}+f(u_s,u_t,u)=0$
3. $\Delta<0$, המשוואה היא אליפטית, צורה קנונית $u_{ss}+u_{tt}+f(u_s,u_t,u)=0$

הערה: סוג המשוואה יכול להיות תלוי בתחום

2.1.2 סיבוב מערכת צירים

סיבוב מערכת צירים של מד"ח יתבצע על ידי החלפת המשתנים הבאה:

$$\begin{cases} s=x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ t=-x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases}$$

(שים לב שאת הנוסחה ל t אפשר לקבל על ידי "גזירה" של s לפי α)

המד"ח $u_{xx}+u_{yy}+ku=0$ לא משנה את צורתה אחרי החלפת המשתנים הנ"ל, כלומר היא עוברת ל $\tilde{u}_{ss}+\tilde{u}_{tt}+k\tilde{u}=0$.

כל מד"ח לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, שלא משנה את צורתה היא מד"ח מהצורה הזאת.

פרק 3: בעיית שטורם ליוביל

3.1 הגדרות

אופרטור שטורם ליוביל

אופרטור שטורם ליוביל הוא אופרטור מהצורה הבאה: $L[v]=(pv')'+qv$

ערך עצמי, פונקציה עצמית

פונקציה עצמית היא פונקציה v שעבורה קיים ערך עצמי λ (סקלר) כך שמתקיים $L[v]=-\lambda v$ (הפעלת האופרטור שקולה להכפלה בסקלר)

משוואת שטורם ליוביל

כל משוואה שיכולה להכתב כ $L[v]=-\lambda v$ כאשר λ הוא ערך עצמי ו L הוא אופרטור שטורם ליוביל עבור p, q כלשהם נקראת משוואת שטורם ליוביל

לדוגמה המשוואה $v''+\lambda v=0$ היא משוואת שטורם ליוביל עבור $p = 1, q = 0$

בעיית שטורם ליוביל

משוואת שטורם ליוביל בצירוף תנאי שפה (ללא תנאי התחלה)

צורת תנאי שפה כללית: $\begin{cases}\alpha v(a)+\beta v'(a)=0\\ \gamma v(b)+\delta v'(b)=0\end{cases}$ (שתי משוואות)

בבעיית שטורם ליוביל מחפשים פונקציות עצמיות v שמתאימות לערכים עצמיים λ

והצורה של משוואת שטורם ליוביל תהיה: $(pv')'+qv=-\lambda rv$

כאשר $r(x) > 0$ היא פונקצית משקל, צורת המשוואה קובעת את $r(x)$ באופן יחיד

(פונקצית המשקל מופיעה במכפלה הפנימית במרחב שנפרש על ידי הפונקציות העצמיות, מכפלה פנימית נראת מהצורה:

$(\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$

בעיית שטורם ליוביל רגולרית

משוואת שטורם ליוביל בצירוף תנאי שפה נפרדים לשני הקצוות (a ו- b), מהצורה: $\begin{cases}\alpha v(a)+\beta v'(a)=0\\ \gamma v(b)+\delta v'(b)=0\end{cases}$

בעיה לא רגולרית יכולה להיות למשל עם תנאי מהצורה $v(a)+v'(b)=0$

בעיית שטורם ליוביל מחזורית

משוואת שטורם ליוביל בצירוף תנאי שפה מחזוריים מהצורה: $\begin{cases}v(a)=v(b)\\ v'(a)=v'(b)\end{cases}$

בעיית שטורם ליוביל סינגולרית

...

תנאי התחלה דריכלה

תנאי התחלה על ערכי הפונקציה בקצוות, מהצורה $\begin{cases} v(a)=A \\ v(b)=B \end{cases}$

תנאי התחלה נוימן

תנאי התחלה על הנגזרת בקצוות, מהצורה $\begin{cases} v'(a)=A \\ v'(b)=B \end{cases}$

3.2.1 הצגת מד"ר כמשוואת שטורם ליוביל

כל מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני אפשר להציג כמשוואת שטורם ליוביל:

$$A(x)v''+B(x)v'+C(x)v=0$$

נגדיר

$$p(x)=e^{\int\frac{B(x)}{A(x)}dx}$$
$$p'(x)=\frac{B(x)}{A(x)}e^{\int\frac{B(x)}{A(x)}dx}=\frac{B(x)}{A(x)}p(x)$$

נכפול את המשוואה ב $\frac{p}{A}$ ונקבל:

$$\frac{p}{A}Av''+\frac{p}{A}Bv'+\frac{p}{A}Cv=0$$
$$pv''+p'v'+\frac{p}{A}Cv=0$$
$$(pv')'+\underbrace{\frac{p}{A}C}_{q}v=0$$

3.2.2 זהות לגרנז' $uL[v]-vL[u]=\left(p(uv'-u'v)\right)'$

קל לקבל את זהות לגרנז' על ידי הצבת האופרטורים באופן מפורש, $L[v]=(pv')'+qv$

3.2.3 נוסחת גרין (סימטריה) אם u, v מקיימות את אותם תנאי שפה, מתקיים: $\int_a^b uL[v]dx=\int_a^b vL[u]dx$

3.2.4 תכונות ערכים עצמיים ופולינומים עצמיים של בעיית שטורם ליוביל

1. כל הערכים העצמיים הם ממשיים

2. בבעיה רגולרית: כל הערכים העצמיים הם פשוטים (מריבוי 1)
בבעיה מחזורית: הערכים העצמיים הם לא בהכרח מריבוי 1

3. בבעיה רגולרית: יש אינסוף ערכים עצמיים והם מהווים סדרה מונוטונית עולה ממש לאינסוף
בבעיה מחזורית: יש ערכים עצמיים כפולים (ריבוי 2) ולכן הסדרה עולה אבל לא ממש

4. יש אינסוף פולינומים עצמיים והם מהווים בסיס אורתוגונלי למרחב מסויים
אם הערכים העצמיים λ_n, λ_m שונים אז הפונקציות העצמיות המתאימות v_n, v_m אורתוגונליות,
כלומר: $\langle v_n, v_m\rangle_r=\int_a^b v_n(x)v_m(x)r(x)dx=0$ (הוכחה על ידי נוסחת גרין)

3.2.5 פיתוח לטור במרחב הפולינומים האופייניים, משפט הילברט שמידט

אם f רציפה, גזירה למקוטעין, מקיימת את תנאי השפה, והפונקציות $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן הפולינומים העצמיים המנורמלים, כלומר הן מהוות בסיס אורתונורמלי, אז ניתן לכתוב את f כטור בצורה הבאה:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\phi_n$$

כאשר המקדמים c_n נקבעים על ידי:

$$c_n=\langle f,\phi_n\rangle=\int_a^b f(x)\phi_n r dx$$

הערות

1. הטור מתכנס במידה שווה ל f.
2. בפונקציות עצמיות של בעיה מחזורית הטור מחזורי, והוא בעצם טור פורייה.
3. אם ל f יש אי רציפות קפיצה אז הטור מתכנס לממוצע מימין ומשמאל.

3.2.6 דרך פתרון

כאשר מציבים פתרון בהפרדת משתנים במשוואות הגלים במיתר סופי או במשוואות החום מקבלים בעיית שטורם ליוביל על כל אחד מהמשתנים בנפרד

באופן כללי מקבלים בעיית שטורם ליוביל מהצורה: $v''+\lambda v=0$

זאת מד"ר עם משתנים קבועים, הפולינום האופייני שלה הוא $r^2+\lambda=0$ והשורשים הם $r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}$

מחלקים ל 3 אפשרויות פתרון:

$\underline{\lambda<0}$ הפתרון הוא $v=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$ או בצורה יותר נוחה $v=\tilde{A}\cosh(\sqrt{-\lambda}x)+\tilde{B}\sinh(\sqrt{-\lambda}x)$

$\underline{\lambda>0}$ השורשים הם $r_{1,2}=\pm i\sqrt{\lambda}$ ולכן הפתרון הוא $v=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$\underline{\lambda=0}$ המשוואה היא $v''=0$ ולכן הפתרון הוא $v=Ax+B$

מציבים כל אחת מהאפשרויות בתנאי השפה (דריכלה או נוימן) ומוצאים את הקבועים A,B,λ

הערה:

במשוואות גלים במיתר סופי בדרך כלל נתון תנאי שפה דריכלה, ואז התנאי $\lambda>0$ הוא היחיד שנותן פונקציות עצמיות שונות מאפס. אבל במקרה של תנאי שפה נוימן או מעורבים, צריך לבדוק את כל האפשרויות.

פרק 4: משוואת הגלים

משוואות הגלים מתחלקות לשלושה סוגים:

1. משוואות במיתר אינסופי, פתרון בעזרת נוסחת דלמבר
2. משוואות במיתר חצי אינסופי, הרחבה זוגית או אי זוגית למיתר אינסופי, ופתרון בעזרת נוסחת דלמבר
3. משוואות במיתר סופי, פתרון בהפרדת משתנים

4.1 משוואת הגלים ההומוגנית במיתר אינסופי

צורה: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

צורת תנאי התחלה: $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$

צורת הפתרון: $F(x+ct) + G(x-ct)$

4.1.1 סוגי פתרונות

פתרון אמיתי / מוכלל

אם $F, G \in C^2$ אז הפתרון הוא אמיתי אחרת הפתרון מוכלל

התנאי הוא בעצם על f, g כדי ש F, G יהיו גזירים פעמיים אז צריך להתקיים $f \in C^2, g \in C^1$

פתרון יציב

פתרון $u1$ שקרוב לפתרון $u2$ המתקבל כאשר משנים את תנאי ההתחלה ב δ

כלומר לכל ε קיים δ כך שאם משנים את תנאי ההתחלה ב δ ההפרש בין הפונקציות קטן מ ε

$$\begin{cases} |f_1(x) - f_2(x)| < \delta \\ |g_1(x) - g_2(x)| < \delta \end{cases} \quad \rightarrow \quad |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$$

לכל $-\infty < x < \infty, \ 0 < t < T$

4.1.2 קיום ויחידות

אם $f(x) \in C^2$ וגם $g(x) \in C^1$ אז לבעיה:

$$u_{tt} + c^2 u_{xx} = 0$$
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

קיים פתרון יחיד לכל $0 < t, \ -\infty < x < \infty$

ויציב לכל $0 < t < T, \ -\infty < x < \infty$

4.1.3 דרך פתרון: פתרון דלמבר

על ידי הצבת הפתרון הכללי $F(x+ct)+G(x-ct)$ בתנאי ההתחלה מקבלים:

$$u(x,0)=f(x)=F(x)+G(x)$$

$$u_t(x,0)=c\left(F'(x)-G'(x)\right)=g(x)\quad\rightarrow\quad F(x)-G(x)=\frac{1}{c}\int_0^x g(s)ds+C_0$$

$$\begin{cases}F(x)=\dfrac{f(x)}{2}+\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x g(s)ds+C_0\\ G(x)=\dfrac{f(x)}{2}-\dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^x g(s)ds-C_0\end{cases}$$

לכן הפתרון של המשוואה המקורית:

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds$$

(הפתרון יציב)

הפרדה לגל מתקדם וגל נסוג

$$u(x,t)=\left[\frac{f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}g(s)ds\right]+\left[\frac{f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}g(s)ds\right]$$

החלק הימני הוא גל מתקדם והחלק השמאלי הוא גל נסוג. (גל שמאלני?)
בשיטה הגרפית לפתרון, מציירים את שני הגלים:

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds$$

$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(s)ds$$

וכדי לקבל את הפתרון בזמן ct מזיזים את F ימינה ואת G שמאלה ב ct ומחברים את שתי הגרפים.

4.2 משוואת הגלים הלא הומוגנית במיתר אינסופי

צורה: $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$

צורת תנאי התחלה: $\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$

צורת הפתרון:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2c}\int_{\Delta}F(s,\tau)dsd\tau$$

כאשר Δ הוא המשולש שמתקבל מהנקודה בה מחושבת הפונקציה (x_0,t_0) ונקודות החיתוך עם ציר x של שני קווים אופייניים

שיוצאים ממנה $\begin{cases}x+ct=x_0+ct_0\\ x-ct=x_0-ct_0\end{cases}$

כלומר בין הנקודות $(x,t),(x-ct,0),(x+ct,0)$

את האינטגרל על המשולש רושמים בצורה:

$$\int_{\Delta}F(s,\tau)dsd\tau=\int_0^t d\tau\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(s,\tau)ds$$

(בתוך האינטגרל מציבים $F(x,t) \to F(s,\tau)$)

אפשר לזכור את הגבולות אם שמים לב שבבסיס המשולש, כאשר $\tau = 0$ הגבולות של s הם $[x-ct, x+ct]$ ובקודקוד המשולש כאשר $\tau = t$ הגבולות מצטמצמים לנקודה x

4.2.1 קיום ויחידות

כאשר $g, F \in C^1,\ \ f \in C^2$ הפתרון קיים, יחיד ויציב

4.2.2 תכונות

תכונת הפתרון u נקבעת לפי זוגיות / אי זוגיות / מחזוריות הפונקציות f, g, F

אם כל הפונקציות זוגיות / אי זוגיות, אז u זוגית / אי זוגית.

אם כל הפונקציות מחזוריות, אז u מחזורות.

4.3 משוואת גלים במיתר חצי אינסופי

צורה: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

צורת תנאי התחלה / שפה:
$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &u(x,0) = f(x) \\ &u_t(x,0) = g(x) \end{aligned}\right\} x > 0 \\ u(0,t) = 0 \qquad\quad t > 0 \end{cases}$$

(כאשר חייב להתקיים $f(0) = g(0)$)

הבעיה נובעת מזה שבפתרון דלמבר צריך לבצע אינטגרציה על הפונקציות f, g, F בתחומים בהם הן לא מוגדות, לכן צריך להגדיר אותן על כל הישר:

4.3.1 דרך פתרון: הרחבה זוגית / אי זוגית

נפתור בשיטת השיקוף, נגדיר בעיה דומה $\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = \tilde{F}(x,t)$, שמוגדרת <u>על כל הישר</u>

1. אם נתון תנאי שפה $u(0,t) = 0$ אז נבצע הרחבה <u>אי-זוגית</u>, תנאי ההתחלה החדשים יהיו:

$$\tilde{F}(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & x \ge 0 \\ -F(-x,t) & x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \ge 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$$
$$\tilde{u}_t(x,0) = \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \ge 0 \\ -g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

והפתרון של הבעיה החדשה יהיה אי זוגי יתאפס בראשית, ויקיים $\tilde{u}(0,t) = 0$.

2. אם נתון תנאי שפה $u_x(0,t) = 0$ (במקום $u(0,t) = 0$) אז נבצע הרחבה <u>זוגית</u>, תנאי ההתחלה החדשים יהיו:

$$\tilde{F}(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & x \ge 0 \\ F(-x,t) & x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \ge 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$
$$\tilde{u}_t(x,0) = \tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & x \ge 0 \\ g(-x) & x < 0 \end{cases}$$

והפתרון של הבעיה החדשה יהיה זוגי ויקיים $\tilde{u}_x(0,t) = 0$.

בסוף נסתכל על הפתרון רק בתחום $x > 0$ בו מתקיים $u(x,t) = \tilde{u}(x,t)$, וזה הפתרון למשוואה המקורית.

4.3.2 דרך פתרון: תנאי שפה לא הומוגני

1. בבעיה בה $u(0,t)=h(t)$ במקום $u(0,t)=0$ נגדיר פונקציה חדשה:

$$v(x,t)=u(x,t)-h(t)$$

כך שתנאי השפה של הפונקציה החדשה יהיה הומוגני:

$$v(0,t)=u(0,t)-h(t)=0$$

המשוואה ותנאי ההתחלה ישתנו:

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=F(x,y)-h_{tt}(t)$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} v(x,0)=f(x)-h(0) \\ v_t(x,0)=g(x)-h_t(0) \end{array}\right\} & x>0 \\ v(0,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

נמצא את v על ידי הרחבה <u>אי-זוגית</u> ובסוף נחזור לפונקציה המקורית: $u(x,t)=v(x,t)+h(t)$

2. בבעיה בה $u_x(0,t)=h(t)$ במקום $u_x(0,t)=0$ נגדיר פונקציה חדשה:

$$v(x,t)=u(x,t)-xh(t)$$

כך שתנאי השפה של הפונקציה החדשה יהיה הומוגני:

$$v_x(0,t)=u_x(0,t)-h(t)=0$$

המשוואה ותנאי ההתחלה ישתנו:

$$v_{tt}-c^2v_{xx}=F(x,y)-xh_{tt}(t)$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} v(x,0)=f(x)-xh(0) \\ v_t(x,0)=g(x)-xh_t(0) \end{array}\right\} & x>0 \\ v_x(0,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

נמצא את v על ידי הרחבה <u>זוגית</u> ובסוף נחזור לפונקציה המקורית: $u(x,t)=v(x,t)+xh(t)$

4.4 משוואת גלים הומוגנית במיתר סופי

צורה: $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$

צורת תנאי שפה: $u(0,t)=u(L,t)=0$ (תנאי שפה מסוג דריכלה)

צורת תנאי התחלה: $0\le x\le L$ $\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$

4.4.1 דרך פתרון: הרחבה מחזורית

הפונקציות f, g מוגדרות בקטע $[0,\ L]$, נבצע הרחבה אי זוגית בקטע $[-L,\ 0]$, והמשכה מחזורית על כל הישר, נקבל $\tilde{f},\tilde{g}$ אי זוגיות ומחזוריות $2L$

הפתרון היחיד לבעיית המיתר הסופי הוא הפתרון של המיתר האינסופי:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{f}(x+ct)-\tilde{f}(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\tilde{g}(s)ds$$

כאשר מסתכלים רק על הקטע $[0,\ L]$ בפונקציה u.

4.4.2 דרך פתרון: הצבה

1. מניחים שהפתרון הוא מהצורה $X(x)T(t)$, מציבים במשוואה ההומוגנית ובתנאי ההתחלה ומקבלים בעיית שטורם ליוביל עבור X ועבור T

$$XT''+c^2X''T=0 \qquad \to \qquad \frac{X''}{X}=-\lambda, \qquad \frac{T''}{c^2T}=-\lambda$$

2. פותרים את בעיית שטורם ליוביל עבור X, רק ל $\lambda>0$ קיים פתרון, והוא מהצורה:

$$X''+\lambda X=0 \quad \to \quad X=A\cos\left(x\sqrt{\lambda}\right)+B\sin\left(x\sqrt{\lambda}\right)$$

3. מציבים את הפתרון בשני תנאי השפה, מוצאים את הפוקציות העצמיות והערכים העצמיים:

$$u(0,t)=X(0)T(t)=\left[A\cos\left(0\sqrt{\lambda}\right)+B\sin\left(0\sqrt{\lambda}\right)\right]T(t)=\left[A\right]T(t)=0$$

$$\to \qquad A=0$$

$$u(L,t)=X(L)T(t)=\left[\cancel{A\cos\left(L\sqrt{\lambda}\right)}+B\sin\left(L\sqrt{\lambda}\right)\right]T(t)=\left[B\sin\left(L\sqrt{\lambda}\right)\right]T(t)=0$$

$$\to \qquad B\sin\left(L\sqrt{\lambda}\right)=0, \qquad L\sqrt{\lambda}=n\pi \qquad \to \qquad \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

הפונקציות העצמיות שמתאימות לערכים העצמיים λ_n הן $X_n=\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)$

4. המרחב הנפרש על ידי הפונקציות הוא אורתוגונלי, כדי להפוך אותו למרחב אורתונורמלי מנרמלים את הפונקציות, או מגדירים מכפלה פנימית בהן הנורמה שלהן היא 1.

נרמול:

$$\phi_n=\frac{X_n}{\|X_n\|}=\frac{X_n}{\sqrt{\langle X_n,X_n\rangle}}$$

הגדרת מכפלה פנימית:

$$\langle f,g\rangle=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)g(x)dx$$

ϕ_n הן הפונקציות שפורשות את המרחב האורתונורמלי, כל פונקציה עצמית Xn נכתוב בצורה:

$X_n=B_n\phi_n$ (אם הגדרנו מכפלה פנימית בה $\|X_n\|=1$ אז $B_n=1$)

5. פותרים את בעיית שטורם ליוביל עבור T, שוב רק ל $\lambda>0$ קיים פתרון, צורת הפתרון היא:

$$T''+c^2\lambda T=T''+c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2T \quad \to \quad T_n=C_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+D_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)$$

6. פתרונות שני החלקים הם:

$$X_n=B_n\phi_n(x) \qquad T_n=C_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+D_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)$$

עבור כל n קיים פתרון למשוואה המקורית $u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)$, הפתרון הכללי הוא צירוף לינארי של un :

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}X_nT_n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+D_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right]B_n\phi_n(x)$$

נצרף את B_n למקדמים C_n, D_n ונקבל:

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{C}_n\cos\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)+\tilde{D}_n\sin\left(t\frac{n\pi c}{L}\right)\right]\phi_n(x)$$

7. ונציב בתנאי ההתחלה

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{C}_n\right]\phi_n(x)=f(x)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\tilde{D}_n\frac{n\pi c}{L}\right]\phi_n(x)=g(x)$$

נפתח את *f, g* לטור סינוסים:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n, \qquad a_n=\left\langle f,\phi_n\right\rangle$$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\phi_n, \qquad b_n=\left\langle g,\phi_n\right\rangle$$

ועל ידי השוואת מקדמים עם $u(x,0),u_t(x,0)$ נמצא את המקדמים $\tilde{C}_n,\tilde{D}_n$ של הפתרון.

הערה: דרך פתרון בעיות עם תנאי שפה מסוג נוימן $\left(u_x(0,t)=u_x(L,t)=0\right)$ או תנאי שפה מעורבים $\left(u(0,t)=A(t),\quad u_x(L,t)=B(t)\right)$ מאוד דומה.

צריך לבדוק כל אפשרות של λ כלומר $\lambda<0,\ \lambda=0,\ \lambda>0$ יכולים להתקבל ערכים עצמיים שונים לכל אחת מהאפשרויות,

ולכל אחד מהם פונקציות עצמיות שונות ל X וגם ל T

4.5 משוואת גלים אי הומוגנית במיתר סופי

צורה: $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$

צורת תנאי שפה: $u(0,t)=u(L,t)=0$ (תנאי שפה מסוג דריכלה)

צורת תנאי התחלה: $0\le x\le L$ $\begin{cases}u(x,0)=f(x)\\u_t(x,0)=g(x)\end{cases}$

4.5.1 דרך פתרון

1. מתחילים לפתור את המשוואה <u>ההומוגנית</u>:

כמו ב **4.4.2** מוצאים את הערכים העצמיים, ואת הפונקציות העצמיות

במקרה של תנאי שפה דריכלה מתקבל:

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{L}, \qquad X_n=\sin\left(x\frac{n\pi}{L}\right)=B_n\phi_n(x)$$

2. הפתרון יהיה מהצורה: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\phi_n(x)T_n(t)$

נניח שהמקדם *Bn* מוכל בפונקציה *Tn*, לכן נרשם את הפתרון בצורה $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)T_n(t)$

3. מפתחים את *F(x, t)* לטור סינוסים, בצורה:

$$F(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)\phi_n \qquad F_n(t)=\left\langle F(x,t),\phi_n(x)\right\rangle$$

4. מציבים את הפתרון במשוואה המקורית ומקבלים מד"ר של T_n :

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n T_n'' - c^2 \phi_n'' T_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\phi_n$$

5. הפונקציות העצמיות ϕ_n מקיימות את המשוואה $X'' + \lambda X = 0$ לכן $\phi'' = -\lambda\phi$

את הפתרון נכתוב בצורה:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n T_n'' + \lambda_n c^2 \phi_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'' + \lambda_n c^2 T_n\right)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\phi_n$$

$$T_n'' + \lambda_n c^2 T_n = F_n(t)$$

כלומר קיבלנו מד"ר לא הומוגנית עבור T_n

6. הפתרון של T_n כסכום של פתרון הומוגני ופרטי הוא:

$$T_n(t) = T_{H,n}(t) + T_{P,n}(t) = \left(C_n \cos(t\sqrt{\lambda_n}) + D_n \sin(t\sqrt{\lambda_n})\right) + T_{P,n}(t)$$

א. אם החלק האי הומוגני של המשוואה המקורית הוא $F(x)$ כלומר לא תלוי ב t, אז גם המקדמים F_n לא תלויים ב t ולכן

הפתרון הפרטי הוא קבוע $\frac{F_n}{\lambda_n c^2}$

ב. אם המקדמים כן תלויים ב t פותרים בשיטת ווריאציית הפרמטר: מניחים שהפתרון הפרטי מורכב מקומבינציה לא לינארית של הפתרונות ההומוגניים $T_{H1}(t), T_{H2}(t)$ כלומר, $T_{P,n}(t) = A(t)T_{H1}(t) + B(t)T_{H2}(t)$ כאשר את המקדמים $A(t), B(t)$ מוצאים מהמערכת:

$$\begin{cases} A'(t)T_{H1}(t) + B'(t)T_{H2}(t) = 0 \\ A'(t)T_{H1}'(t) + B'(t)T_{H2}'(t) = F_n(t) \end{cases}$$

7. נציב את הפתרון בתנאי ההתחלה:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_n \cos(t\sqrt{\lambda_n}) + D_n \sin(t\sqrt{\lambda_n})\right) + T_{P,n}(t)\right]\phi_n(x)$$

$$\begin{cases} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(C_n\right) + T_{P,n}(0)\right]\phi_n(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\phi_n(x) \\ u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(D_n\sqrt{\lambda_n}\right) + T_{P,n}'(0)\right]\phi_n(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\phi_n(x) \end{cases}$$

כאשר α_n, β_n הם המקדמים של f, g בפיתוח לטור במרחב ϕn כלומר:

$$\alpha_n = \langle f, \phi_n \rangle, \quad \beta_n = \langle g, \phi_n \rangle$$

4.5.2 תנאי שפה לא הומוגניים

נסתכל על משוואת גלים אי הומוגנית במיתר סופי, מהצורה: $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$

כאשר תנאי השפה לא הומוגניים נבנה פונקציה w שתקיים את תנאי השפה, נגדיר $v=u-w$, נפתור את הבעיה

$v_{tt}-c^2v_{xx}=F(x,t)-\left(w_{tt}-c^2w_{xx}\right)$ עבורה תנאי השפה של v יהיו הומוגניים (גם תנאי ההתחלה ישתנו בהתאם), ובסוף

נחזור ל u: $v+w=u$

דוגמאות לתנאי שפה:

1. תנאי שפה מסוג דריכלה: $\begin{cases} u(0,t)=a(t) \\ u(\pi,t)=b(t) \end{cases}$, נבנה פונקציה מהצורה $w(x,t)=\frac{x}{\pi}\left(b(t)-a(t)\right)+a(t)$

2. תנאי שפה מעורבים: $\begin{cases} u(0,t)=a(t) \\ u_t(0,t)=b(t) \end{cases}$ נבנה פונקציה מהצורה $w(x,t)=xb(t)+a(t)$

3. תנאי שפה מסוג נוימן: $\begin{cases} u_x(0,t)=a(t) \\ u_x(\pi,t)=b(t) \end{cases}$ נבנה פונקציה מהצורה $w(x,t)=\frac{x^2}{2\pi}\left(b(t)-a(t)\right)+xa(t)$

באופן כללי אם לא רואים איזה פונקציה w צריך להגדיר פשוט מציבים $v=u-w$ בתנאי השפה דורשים שוויון לאפס

ומוצאים את התנאים ל w, לדוגמה בתנאי שפה מעורבים:

$$\begin{cases} v(0,t)=u(0,t)-w(0,t)=0 \\ v_x(0,t)=u_x(0,t)-w_x(0,t)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w(0,t)=a(t) \\ w_x(0,t)=b(t) \end{cases} \rightarrow w(x,t)=xb(t)+a(t)$$

בדרך כלל אחרי החסרת הפונקציה w מקבלים חלק אי הומוגני פשוט יותר

פרק 5: משוואת החום

5.1 משוואת חום הומוגנית

צורה: $u_t - ku_{xx} = 0$, $\begin{cases} 0 < x < L \\ 0 < t \end{cases}$

צורת תנאי ההתחלה: $u(x,0) = f(x)$

צורת תנאי שפה (דריכלה): $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$

צורת הפתרון: $u(x,t) = X(x)T(t)$

5.1.1 דרך פתרון

1. מציבים את הפתרון הכללי במשוואה המקורית ובתנאי השפה, ומקבלים בעיית שטורם ליוביל
2. מוצאים את כל הפונקציות העצמיות והערכים העצמיים
3. כל פתרון מהצורה $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ פותר את המשוואה ואת תנאי השפה
4. מפתחים את תנאי ההתחלה $f(x)$ לטור במרחב שנפרש על ידי הפונקציות העצמיות X_n ועל ידי השוואת מקדמים מוצאים את המקדמים של הטור $u(x,t) = \sum_n X_n(x)T_n(t)$

המקדמים של הטור יהיו: $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)X_{n,\sin}(x)$ $\qquad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)X_{n,\cos}(x),$

5.1.2 הוכחת יחידות פתרון: שיטת האנרגיה

שיטת האנרגיה (אינטגרל לפי x)

1. נניח שאת המשוואה $L[u] = u_t - ku_{xx} = F(x,t)$ עם תנאי ההתחלה והשפה:

$$u(x,0) = f(x) \qquad \begin{cases} u(0,t) = a(t) \\ u(L,t) = b(t) \end{cases}$$

מקיימים שני פתרונות שונים, כלומר:

$$u \neq v,\ \ L[u] = F(x,t),\ \ L[v] = F(x,t)$$

2. נגדיר $w = u - v$, מתקיים:

$$L[w] = L[u-v] = L[u] - L[v] = 0$$

וכל תנאי ההתחלה גם מתאפסים:

$$w(x,0) = 0 \qquad \begin{cases} w(0,t) = 0 \\ w(L,t) = 0 \end{cases}$$

3. נגדיר את האינטגרל הבא: $E(t) = \int_0^L w^2(x,t)dx$, מתקיים $E(0) = \int_0^L w^2(x,0)dx = 0$

(במשוואת הגלים נגדיר $E(t) = \int_0^L (w_t^2 + c^2 w_x^2)dx = 0$)

4. נגזור לפי t:

$$E'(t) = \int_0^L 2ww_t dx = \int_0^L 2w\left(kw_{xx}\right)dx$$

נפרק את האינטגרל לפי אינטגרציה בחלקים:

$$= 2k\left[ww_x\Big|_0^L - \int_0^L w_x^2 dx \right] = 2k\left[0 - \int_0^L w_x^2 dx \right] = \underbrace{-2k \underbrace{\int_0^L w_x^2 dx}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

5. קיבלנו ש $E'(t) \leq 0$, מונוטונית יורדת (לא ממש), וגם $E(0)=0,\ \ E(t) \geq 0$ מתחילה באפס וחיובית, לכן $E(t)=0$ לכל t.

מכאן שהאינטגרנד $w^2(x,t)$ (החיובי תמיד) של $E(t)$ הוא אפס זהותית ולכן $w=0$

5.1.3 פתרון אמיתי

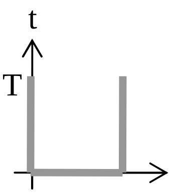
פתרון מהצורה $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ הוא פתרון אמיתי אם הטור u ונגזרותיו ($u_{xx},\ u_t$ בבעיית החום או $u_{xx},\ u_{tt}$ בבעיית הגלים), מתכנסים במידה שווה, בדיקת התכנסות במ"ש של הטור אפשר לעשות על ידי מבחן ה-M של ווירשטראס (המריונטה של ווירשטראס), כלומר צריך למצוא חסם Mn לכל $u_n(x,t)$ כך ש $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס.

פתרון אמיתי יתקבל כאשר $g \in C^1,\ \ f \in C^2$

פתרון לא אמיתי הוא מוכלל.

5.1.4 עקרון המקסימום במשוואת חום הומוגנית

פונקציה שמקיימת את $u_t - ku_{xx} = 0$ מקבלת מקסימום במלבן $0 \leq x \leq L,\ 0 \leq t \leq T$ באחד הקטעים הבאים:



$$\begin{cases} (x,0) & 0 \leq x \leq L \\ (0,t) & 0 \leq t \leq T \\ (L,t) & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

(צירוף שלושת הקטעים נקרא שפה פרבולית)

5.1.5 הוכחת יציבות במשוואות חום הומוגניות

u_1, u_2 שני פתרונות של הבעיות הבאות:

$$\begin{cases} u_{1t} - ku_{1xx} = 0 \\ u_1(0,t) = a_1(t) \\ u_1(L,t) = b_1(t) \\ u_1(x,0) = f_1(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{2t} - ku_{2xx} = 0 \\ u_2(0,t) = a_2(t) \\ u_2(L,t) = b_2(t) \\ u_2(x,0) = f_2(t) \end{cases}$$

הבעיות קרובות, כלומר

$$\begin{aligned} &|a_1(t) - a_2(t)| < \varepsilon \\ &|b_1(t) - b_2(t)| < \varepsilon \quad 0 \le t \le T \\ &|f_1(x) - f_2(x)| < \varepsilon \quad 0 \le x \le L \end{aligned}$$

נוכיח שבהכרח מתקיים

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$$

נסמן $w = u_1 - u_2$, w היא פתרון של המשוואה: $w_t - kw_{xx} = 0$, ולפי עקרון המקסימום w מקבלת מקסימום במלבן $0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T$ בקטעים הבאים:

$$\begin{cases} w(0,t) = | a_1(t) - a_2(t) | < \varepsilon \\ w(L,t) = | b_1(t) - b_2(t) | < \varepsilon \\ w(x,0) = | f_1(t) - f_2(t) | < \varepsilon \end{cases}$$

כל הקטעים חסומים ולכן לפי עקרון המקסימום גם $w(x,t)$ חסומה, כלומר $|w| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$

הערה: הפתרון אמיתי עד מרחק ε משפת המלבן

פרק 6: משוואת לפלס

6.1 משוואת לפלס כללית

צורה: $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ בתחום Ω

צורת תנאי שפה: עבור $(x,y) \in \partial\Omega$ (נקודות על השפה):

תנאי שפה של משוואות דריכלה: $u(x,y) = f(x,y)$

תנאי שפה של משוואות נוימן: $\frac{\partial u(x,y)}{\partial\Omega} = g(x,y)$ (נגזרת בכיוון ניצב לשפת התחום)

צורת פתרון: $u(x,y) = X(x)Y(y)$

6.1.1 דרך פתרון

1. מציבים את הפתרון הכללי במשוואה ומקבלים בעיית שטורם ליוביל ל X ול Y
2. מוצאים ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות
3. מציבים את הפתרון המוכלל $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$ בתנאי השפה

הערה: כדי להשוות עם תנאי שפה שתלוי במשתנה אחד, מציגים אותו כטור במרחב של הפונקציות העצמיות המתאימות (Xn או Yn), אחרי <u>שמנרמלים</u> אותן.

6.1.2 איפוס ערכי שפה לא הומוגניים בקודקודי מלבן

כשנתונה בעיית לפלס עם תנאי שפה, שבקודקודי התחום שונים מאפס, כלומר:

$$\begin{cases} u(0,0)=\alpha & u(0,b)=\gamma \\ u(a,0)=\beta & u(a,b)=\delta \end{cases}$$

מגדירים את הפונקציה: $v = A + Bx + Cy + Dxy$, ואת הפונקציה: $w = u - v$

מציבים את w בתנאי השפה ומוצאים את המקדמים A,B,C,D שעבורם תנאי השפה של w יהיו הומוגנים בקודקודי התחום.

פותרים את המשוואה עבור w ובסוף חוזרים ל u: $u = w + v$

הערה: לפעמים צריך להגדיר איבר נוסף ב v: $E(x^2 - y^2)$

6.2 משוואת לפלס בעיגול

נעבור לקואורדינטות מעגליות: $u(x,y) \to w(r,\theta)$

צורה: $\nabla^2 w = w_{rr} + \frac{1}{r}w_r + \frac{1}{r^2}w_{\theta\theta}$ בתחום $a \le r \le b$

צורת תנאי שפה: $\begin{cases} w(a,\theta) = f(\theta) \\ w(b,\theta) = g(\theta) \end{cases}$

תנאי המחזוריות: $\begin{cases} w(r,\theta) = w(r,\theta+2\pi) \\ w_\theta(r,\theta) = w_\theta(r,\theta+2\pi) \end{cases}$

צורת הפתרון: $w(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$

6.2.1 דרך פתרון

1. מציבים את הפתרון הכללי במשוואה ומקבלים:

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0 \qquad /\frac{r^2}{R\Theta}$$

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}=0$$

2. מציבים גם בתנאי המחזוריות:

$$\begin{cases}\Theta(\theta)R(r)=\Theta(\theta+2\pi)R(r)\\ \Theta'(\theta)R(r)=\Theta'(\theta+2\pi)R(r)\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)\\ \Theta'(\theta)=\Theta'(\theta+2\pi)\end{cases}$$

הערה: כדאי להציב במקרה הפרטי $\begin{cases}\Theta(-\pi)=\Theta(\pi)\\ \Theta'(-\pi)=\Theta'(\pi)\end{cases}$ במקום בתנאי המחזוריות, כדי להשתמש בזוגיות / אי-זוגיות של הפונקציות $\sin,\cos$.

3. קיבלנו בעיות שטורם ליוביל:

א. $\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=-\lambda$, מתנאי המחזוריות נובע ש λ לא שלילי (אחרת הפתרון לא מורכב מפונקציות מחזוריות) ומהפתרון במקרה הזה: $\Theta(\theta)=A\cos(\theta\sqrt{\lambda})+B\sin(\theta\sqrt{\lambda})$ נובע ש $\sqrt{\lambda}$ צריך להיות מספר שלם כדי לקיים את תנאי המחזוריות כלומר $\lambda=n^2$ לכן הפתרון הוא:

$$\Theta_n(\theta)=\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)$$

הערה: λ יכול להיות גם *0* ולכן $0\le n$

ב. $\frac{r^2R''+rR'}{R}=\lambda=n^2$, זאת משוואת אוילר: $r^2R''+rR'-n^2R=0$ והפתרונות הם:

$$\{1,\ln(r)\}\rightarrow R_0(r)=a_0+b_0\ln(r) \qquad /n=0$$

$$\{r^n,r^{-n}\}\rightarrow R_n(r)=a_nr^n+b_nr^{-n} \qquad /n>0$$

4. הפתרון הכללי הוא:

$$w(r,\theta)=\alpha_0\left(a_0+b_0\ln(r)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)\right)\left(a_nr^n+b_nr^{-n}\right)$$

5. מפתחים את $a(\theta),b(\theta)$ לטור פורייה, בצורה:

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(n\theta)+a_n\sin(n\theta) \qquad \begin{cases}a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos(n\theta)d\theta\\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin(n\theta)d\theta\end{cases}$$

ומוצאים את המקדמים α_n,β_n,a_n,b_n ב $w(r,\theta)$

הערות

1. הפתרון אמיתי עד מרחק ε מהשפה

2. בבעיות לפלס בעיגול בדרך כלל מתחילים מצורת הפתרון הכללי כאשר

א. בטבעת הפתרון הוא הפתרון המלא

$$w(r,\theta)=\alpha_0\left(a_0+b_0\ln(r)\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)\right)\left(a_nr^n+b_nr^{-n}\right)$$

תנאי שתי השפות נותנים את ארבעת המקדמים α_n,β_n,a_n,b_n

ב. בתוך עיגול, כאשר $0\le r\le b$, בגלל רציפות הפתרון, דורשים שלא יופיע בפתרון הכללי איברים שלא מוגדרים ב 0, כלומר שהמקדמים b_n יתאפסו, הפתרון מהצורה

$$w(r,\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)\right)$$

ג. מחוץ לעיגול, כאשר $b\le r$ דורשים שלא יופיע בפתרון הכללי איברים שלא מתכנסים באינסוף, כלומר שהמקדמים $a_{n>0},b_0$ יתאפסו, הפתרון מהצורה

$$w(r,\theta)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\left(\alpha_n\cos(n\theta)+\beta_n\sin(n\theta)\right)$$

6.3.1 נוסחת פואסון

נוסחת פואסון לפתרון בעייה מהצורה: $\nabla^2u=0$ בתחום $0<r<R$

עם תנאי השפה: $u(d,\theta)=f(\theta)$ (בעיית דריכלה)

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

מכאן נובע שערך נקודה הוא ממוצע הנקודות על שפת מעגל שמקיף אותה:

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi$$

6.3.2 זהות גרין

$$\iint_{\Omega}u\nabla^2v\,dxdy=-\iint_{\Omega}\nabla u\nabla v\,dxdy+\oint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}ds$$

בעזרת זהות גרין מוכיחים שלבעיית לפלס עם תנאי שפה דריכלה או נוימן יש פתרון יחיד או עד כדי קבוע כאשר Ω חסום.

רעיון ההוכחה, מציבים $v=u_1-u_2$ הפרש של שתי פתרונות בזהות, (בתור u ו v) ומקבלים שההפרש הוא אפס, (או קבוע במקרה של תנאי שפה נוימן).

(שים לב לדמיון עם אינטגרציה בחלקים: $\iint uv''=\int uv'\Big|-\iint u'v'$)

6.3.3 תנאי הכרחי לקיום פתרון

למשוואה $\nabla^2 u = F(x,y)$ עם תנאי נוימן $\frac{\partial u}{\partial n} = g(x,y)$ יש פתרון אם אינטגרל של u על שפת התחום שווה לאינטגרל של F

על כל התחום: $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_{\partial\Omega} g(x,y)\, ds = \int_{\Omega} F(x,y) dxdy$

(במשוואה הומוגנית התנאי הוא $\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_{\partial\Omega} g(x,y)\, ds = 0$).

6.3.4 עקרון הממוצע

ערך של פונקציה שמקיימת את משוואת לפלס $\nabla^2 u = 0$ בתחום Ω (פונקציה הרמונית)

בנקודה $(x_0, y_0) \in \Omega$ (ולא על השפה), הוא ממוצע ערכי הפונקציה במעגל שמקיף את הנקודה ומוכל בתחום, כלומר:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_R u(x,y) ds = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) R d\theta$$

6.3.5 עקרון המקסימום / מינימום

מקסימום ומינימום של פונקציה הרמונית u בתחום חסום Ω מתקבלים על השפה של התחום

ואם u מקבלת מקסימום גם בנקודה פנימית אז u קבועה

נספח - הוכחות

ערכים עצמיים פשוטים (ריבוי 1)

לבעיית שטורם ליוביל רגולרית (תנאי שפה נפרדים לשני הקצוות) יש ערכים עצמיים פשוטים:

לוקחים שתי פונקציות u, v עצמיות המתאימות לאותו ערך עצמי λ ומראים שהן שוות (עד כדי כפל בסקלר A), רושמים:

$$L[v] = -r\lambda v$$
$$L[u] = -r\lambda u$$

מכפילים את המשוואות ב v,u מחסרים ומקבלים

$$uL[v] - vL[u] = 0$$

לפי לגרנז' מתקיים

$$uL[v] - vL[u] = \left(p(uv' - u'v)\right)' = 0 \qquad \Rightarrow p(uv' - u'v) = const$$

לפי תנאי השפה, בנקודה a מתקיים $u(a)v'(a) = u'(a)v(a)$ ולכן

$$p(a)(u(a)v'(a) - u'(a)v(a)) = const = 0$$

$$uv' - u'v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{uv' - u'v}{u^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = Au$$

ערכים עצמיים ממשיים

לבעיית שטורם ליוביל רגולרית יש ערכים עצמיים ממשיים:

לוקחים v פונקציה עצמית עם ערך עצמי λ

מראים שלפונקציה העצמית $\bar{v}$ מתאים הערך העצמי $\bar{\lambda}$ (מתקיים $\overline{L[v]} = \overline{-r\lambda v} \Rightarrow L[\bar{v}] = -r\bar{\lambda}\bar{v}$)

רושמים

$$L[v] = -r\lambda v$$
$$L[\bar{v}] = -r\bar{\lambda}\bar{v}$$

מכפילים את המשוואות ב $v,\bar{v}$ מחסרים ומקבלים

$$\bar{v}L[v] - vL[\bar{v}] = \left(\bar{\lambda} - \lambda\right) rv\bar{v}$$

לפי זהות גרין

$$\int_a^b \bar{v}L[v] - vL[\bar{v}] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\bar{\lambda} - \lambda\right)\int_a^b rv\bar{v} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\lambda} = \lambda$$

ערכים עצמיים אי שליליים

לבעיית שטורם ליוביל רגולרית או מחזורית, כאשר מתקיים <u>קריטריון אי שליליות</u>:

1. $q \le 0$
2. $puu'\big|_a^b \le 0 \quad \Leftarrow \quad p\left(u(b)u'(b) - u(a)u'(a)\right) \le 0$

יש ערכים עצמיים אי שליליים:

רושמים

$$L[v] = -r\lambda v$$

מכפילים ב v ומבצעים אינטגרציה על שני האגפים

$$vL[v] = -r\lambda v^2 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b vL[v] = -\int_a^b r\lambda v^2$$

לפי אינטגרציה בחלקים מקבלים

$$\int_a^b vL[v] = \int_a^b v\left((pv')' + qv\right) = \int_a^b v(pv')' + \int_a^b qv^2 = v(pv')\big|_a^b - \int_a^b p(v')^2 + \int_a^b qv^2 \le 0$$

לכן $\lambda \ge 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda\int_a^b rv^2 \le 0$

פונקציות עצמיות אורתוגונליות

לבעיית שטורם ליוביל רגולרית או מחזורית פונקציות עצמיות אורתוגונליות:

לוקחים שתי פונקציות v_n, v_m עם ערכים עצמיים מתאימים λ_n, λ_m

רושמים

$$L[v_n] = -r\lambda_n v_n$$
$$L[v_m] = -r\lambda_m v_m$$

מכפילים את המשוואות ב v_n, v_m מחסרים ומקבלים

$$v_m L[v_n] - v_n L[v_m] = -rv_n v_m\left(\lambda_n - \lambda_m\right)$$

לפי זהות גרין

$$\int_a^b v_m L[v_n] - v_n L[v_m] = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\lambda_n - \lambda_m\right)\int_a^b rv_n v_m = 0$$

הערכים העצמיים שונים ולכן האינטגרל הוא אפס, כלומר הפונקציות העצמיות אורתוגונליות

$$\int_a^b rv_n v_m = 0 = \left\langle v_n, v_m \right\rangle$$

קיום מקסימום למשוואת חום אי הומוגנית

במשוואה מהצורה $u_t - ku_{xx} = F(x,t) < 0$ בתחום $a \le x \le b,\ 0 \le t \le T$ המקסימום מתקבל על השפה:

אם המקסימום מתקבל בנקודה פנימית, אז $u_x, u_t = 0,\ u_{xx}, u_{tt} < 0$, ולכן $u_t - ku_{xx} \ge 0$ בסתירה לנתון

אם המקסימום מתקבל על הצלע העליונה של המלבן $(t = T,\ a \le x \le b)$, אז $u_t > 0,\ u_{xx}, u_{tt} < 0$ ושוב $u_t - ku_{xx} \ge 0$ בסתירה לנתון

קיום מקסימום למשוואת חום הומוגנית

במשוואה מהצורה $u_t - ku_{xx} = 0$ בתחום $a \le x \le b,\ 0 \le t \le T$ המקסימום מתקבל על השפה:

מגדירים $v = u + \varepsilon x^2$ מתקיים:

$$v_t - kv_{xx} = (u + \varepsilon x^2)_t - k(u + \varepsilon x^2)_{xx} = u_t - k(u_{xx} + 2\varepsilon) = -2k\varepsilon < 0$$

לכן מתקיים עקרון המקסימום למשוואת חום אי הומוגנית, $v = u + \varepsilon x^2 \ge u$, מכאן

$$\begin{aligned}\max_{\bar{D}}\{u\} &\le \max_{\bar{D}}\{v\} = \max_{\partial D}\{v\} = \max_{\partial D}\{u + \varepsilon x^2\}\\ &\le \max_{\partial D}\{u\} + \max_{\partial D}\{\varepsilon x^2\} \le \max_{\partial D}\{u\} + \varepsilon M \quad \Rightarrow \quad \max_{\bar{D}}\{u\} \le \max_{\partial D}\{u\} + \varepsilon M\end{aligned}$$

בגלל שבחרנו קבוע שרירותי ε מתקיים $\max_{\bar{D}}\{u\} \le \max_{\partial D}\{u\}$

אבל בגלל שהתחום הסגור מכיל גם את השפה מתקיים $\max_{\bar{D}}\{u\} \ge \max_{\partial D}\{u\}$

ולכן יש שוויון $\max_{\bar{D}}\{u\} = \max_{\partial D}\{u\}$

הערה: המקסימום כאן הוא חלש, כלומר יכול להיות שהוא מתקבל גם בנקודה פנימית חוץ מהשפה

קיום מקסימום במשוואה הרמונית הומוגנית

במשוואה מהצורה $u_{xx} + u_{yy} = 0$ בתחום D המקסימום מתקבל על השפה ∂D

מגדירים $v = u + \varepsilon(x^2 + y^2)$ כך שמתקיים $v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0$

אם ל v היה מקסימום מקומי בתוך D אז היה מתקיים $v_{xx}, v_{yy} < 0$ ואז $v_{xx} + v_{yy} < 0$ בסתירה להגדרה

לכן המקסימום של v מתקבל על השפה, מכאן

$$\begin{aligned}\max_{\bar{D}}\{u\} &\le \max_{\bar{D}}\{v\} = \max_{\partial D}\{v\} = \max_{\partial D}\{u + \varepsilon(x^2 + y^2)\} \le \max_{\partial D}\{u\} + \max\{\varepsilon(x^2 + y^2)\}\\ &\le \max_{\partial D}\{u\} + M\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \max_{\bar{D}}\{u\} \le \max_{\partial D}\{u\} + M\varepsilon\end{aligned}$$

בגלל שבחרנו קבוע שרירותי ε מתקיים $\max_{\bar{D}}\{u\} \le \max_{\partial D}\{u\}$

אבל בגלל שהתחום הסגור מכיל גם את השפה מתקיים $\max_{\bar{D}}\{u\} \ge \max_{\partial D}\{u\}$

ולכן יש שוויון $\max_{\bar{D}}\{u\} = \max_{\partial D}\{u\}$

הערות:

1. אפשר להגדיר $w = -u$ ולהוכיח שהמינימום של u גם מתקבל על השפה (כי הוא המקסימום של w)
2. המקסימום כאן הוא חלש, אם הפונקציה קבועה המקסימום שלה מתקבל גם בתחום

נקודת מקסימום פנימית במשוואה הרמונית הומוגנית גוררת פונקציה קבועה

נקח את נקודת המקסימום בתוך התחום (x_0, y_0) (אותו מקסימום מתקבל גם על שפת התחום, לפי משפט המקסימום, אבל זה לא מפריע)

לפי פואסון, אם נקח עיגול ברדיוס R סביב (x_0, y_0) שמוכל בתחום (ויכול לגעת בשפה) יתקיים

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta)d\theta$$

כלומר ערך המקסימום הוא ממוצע הנקודות במעגל סביבו

אם כל נקודה $u(x, y)$ במעגל מקיימת $u(x, y) < u(x_0, y_0)$ אז השוויון לפי פואסון לא יכול להתקיים, וזאת סתירה

לכן בהכרח לכל נקודה בעיגול מתקיים $u(x, y) = u(x_0, y_0)$

לכל נקודה בתחום אפשר להגיע על ידי סדרת עיגולים קטנים מ (x_0, y_0) לנקודה, כך שהמרכז של אחד מוכל במרכז של העיגול שלפניו, וכולם מוכלים בתחום (נראה כמו שרשרת)

יחידות בעיה הומוגנית

התנאי הוא שהתחום חסום, אחרת יכול להיות יותר מפתרון אחד

נקח שתי פונקציות u_1, u_2 שמקיימות $\begin{cases} \Delta u = F & \in D \\ u + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial n} = f & \in \partial D \end{cases}$ נסמן את ההפרש שלהן ב $v = u_1 - u_2$

ההפרש מקיים $\begin{cases} \Delta v = 0 & \in D \\ v + \alpha\dfrac{\partial v}{\partial n} = 0 & \in \partial D \end{cases}$

מתקיים לפי משפט גרין

$$0 \le \iint_D \Big(\nabla v \nabla v + \underbrace{\Delta v}_{=0}\Big) = \iint_D (\nabla v)^2\, dA = \oint_{\partial D} v\frac{\partial v}{\partial n}ds = \oint_{\partial D}\left(-\alpha\frac{\partial v}{\partial n}\right)\frac{\partial v}{\partial n}ds = -\alpha\oint_{\partial D}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 ds \le 0$$

מקבלים:

$$0 \le -\alpha\oint_{\partial D}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 ds \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

$$0 \le \iint_D (\nabla v)^2\, dA \le 0 \qquad \Rightarrow \qquad \nabla v = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = const$$

כלומר הפונקציה קבועה, ומתאפסת בשפה (לפי תנאי השפה), ולכן היא אפס זהותית