מד"ח – סיכום

1. פתרון בשיטת ההצבה (מד"ח ליניארית סדר 1)

$$\text{PDE:} \quad a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u = d(x,y)$$

א. פותרים מד"ר: $\frac{dy}{dx}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$ ← מקבלים פתרון מפורש $(y=f(x)+c)$ או פתרון סתום $(F(x,y)=c)$.

ב. בוחרים פונקציה $S(x,y)$ כלשהיא המקיימת: (1) $S(x,y(x)) = c$. (2) $S_y \neq 0$.

בדרך כלל נבחר: $S(x,y) = y-f(x)$

ג. בוחרים פונקציה $t(x,y)$ כלשהיא המקיימת: $J=\frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} S_x & S_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix}\neq 0$ (למשל $t=x$).

ד. מציבים את המשתנים החדשים S,t במד"ח לפי כלל השרשרת ← מקבלים מד"ר (לפי t) ! פותרים, ולבסוף חוזרים למשתנים המקוריים x,y.

2. פיתרון בשיטת הקווים האופייניים (מד"ח קוואזי-ליניארית סדר 1)

"בעיית קושי":

$$\text{PDE:} \quad a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$
$$\text{IV:} \quad u(x_o(s),y_o(s)) = u_o(s)$$

א. פותרים את המערכת הבאה עם תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} x_t = a(x,y,u) \\ y_t = b(x,y,u) \\ u_t = c(x,y,u) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t=0,s) = x_o(s) \\ y(t=0,s) = y_o(s) \\ u(t=0,s) = u_o(s) \end{cases} \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} x(t,s) \\ y(t,s) \\ u(t,s) \end{matrix}$$

"אוסף הקווים האופייניים"

ב. מבודדים את $t(x,y)$ ואת $s(x,y)$. $u(x,y) = u(x(t,s),y(t,s)) \rightarrow \hat{u}(t(x,y),s(x,y))$.

ג. מוצאים את הפיתרון ע"י הצבת $s(x,y),t(x,y)$ בפיתרון $u(t,s)$ מסעיף א' ($u(t,s) \rightarrow u(x,y)$).

(*) **<u>הערות</u>**:

(i) ע"מ למצוא את <u>היטל הקווים האופייניים</u> המישור xy פשוט נמצא את $y(x)$ לפי סעיף 1א'.

(ii) <u>יחידות הפתרון</u> עבור בעיית קושי תתקבל אם מתקיימים התנאים הבאים:

– a,b,c רציפות ובעלות נ"ח רציפות (במשתנים x,y,u).

– עקום ההתחלה $\Gamma(s)$ חלק.

– תנאי החיתוך ("תנאי הטרנסברסליות"), כלומר: $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}=\begin{vmatrix} x_{0s} & y_{0s} \\ x_t & y_t \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_{0s} & y_{0s} \\ a & b \end{vmatrix}\neq 0$

(iii) אם תנאי החיתוך לא מתקיים, אזי המשיך של Γ <u>משיק</u> להיטל הקווים האופייניים. נחלק ל-2 מקרים:

1. $(x_o',y_o',u_o') \parallel (a(x_o,y_o,u_o), b(x_o,y_o,u_o), c(x_o,y_o,u_o))$ ← יש אינסוף פתרונות, במקרה זה כל הקווים האופייניים משיקים ("שווים") לעקום ההתחלתי. עבור פתרון כלשהו מתוך ה-∞ נבחר עקום Γ_1 שיקיים את תנאי החיתוך וייפגש עם Γ בנקודה אחת, ונפתור איתו את הבעיה.

2. $(xo',yo') \parallel (a(x_o,y_o,u_o), b(x_o,y_o,u_o))$ ותנאי 1 הנ"ל לא מתקיים ← אין פתרון.

(מקבלים סתירה פנימית בבעיית קושי).

3. פיתרון בשיטת לגרנג' (מד"ח קוואזי-ליניארית סדר 1)

$$\text{PDE:}\quad a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

א. מוצאים שני שדות וקטוריים משמרים $\vec{p}_1,\vec{p}_2$ שמקיימים: $\vec{p}_2 \perp (a,b,c)$, $\vec{p}_1 \perp (a,b,c)$.
נסמן: $\vec{p}_2 \equiv \nabla\varphi$, $\vec{p}_1 \equiv \nabla\phi$ ← נמצא את "הפוטנציאלים" ϕ,φ ע"י אינטגרציה.
מציאת השדות או ע"י ניחוש או ע"י פיתרון המערכת: $\dfrac{dx}{a(x,y,u)}=\dfrac{dy}{b(x,y,u)}=\dfrac{du}{c(x,y,u)}$.

ב. לכל פונקציה $F\in C^1$ הפתרון הכללי (!) של המד"ח נתון ע"י: $F(\phi(x,y,u),\varphi(x,y,u))=0$ (צורה סתומה) או לחילופין $\phi(x,y,u)=f[\varphi(x,y,u)]$.

4. צורות קנוניות

$$L(u) = A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+\underbrace{D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u}_{\text{l.o.t}} = G(x,y)$$

א. הגדרת הדיסקרמיננטה: $\Delta(x,y) \equiv B^2-4AC$.
ה-Δ קובעת את טיפוס המשוואה, כלומר את תכונותיה ואת הדרך / השיטה לפיתרון. *ה-Δ יכולה להשתנות מנקודה לנקודה)*

ב. העברה לצורה קנונית:
נרצה לעבור לצורה קנונית (לפי משתנים חדשים q,r) כיוון שלרוב צורה זו תהיה פשוטה יותר לפיתרון.
המעבר יתבצע באופן הבא: $u(x,y) = u(x(q,r),y(q,r)) \rightarrow \hat{u}(q,r)$, $L(u)=0 \rightarrow \tilde{L}(\hat{u})=0$.
ניתן לפתח את המעבר הנ"ל ולהגיע לקשרים הבאים:

$$\begin{cases}\tilde{A}=Aq_x^2+Bq_xq_y+Cq_y^2\\ \tilde{B}=2Aq_xr_x+B(q_xr_y+q_yr_x)+2Cq_yr_y\\ \tilde{C}=Ar_x^2+Br_xr_y+Cr_y^2\end{cases}$$

חשוב! *סימן ה-Δ* נשמר ואינו משתנה לאחר חילוף המשתנים.

טיפוס המשוואה	Δ	משוואת הקווים האופייניים	← הפיתרון	הערות
היפרבולית	חיובית	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$	$q(x,y)=Const$ $r(x,y)=Const$	התקבלו 2 משפחות בשל ה-± במשוואת הקווים האופייניים.
פרבולית	0	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B}{2A}$	$q(x,y)=Const$	את $r(x,y)$ נבחר שרירותית כך שיעקוביאן הטרנס' שונה מאפס.
אליפטית	שלילית	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{B\pm i\cdot\sqrt{4AC-B^2}}{2A}$	$\varphi=q\pm i\cdot r$ $q(x,y)=\mathrm{Re}\{\varphi\}$ $r(x,y)=\mathrm{Im}\{\varphi\}$	התקבלו 2 משפחות בשל ה-± במשוואת הקווים האופייניים.

(*) באופן כללי נקבל הצגות קנוניות מהצורה:
1. הצגה קנונית עבור משוואה היפרבולית: $u_{pq}+M(u_p,u_q,u,p,q)=0$.
2. הצגה קנונית עבור משוואה פרבולית: $u_{pp}+M(u_p,u_q,u,p,q)=0$.
3. הצגה קנונית עבור משוואה אליפטית: $u_{pp}+u_{qq}+M(u_p,u_q,u,p,q)=0$.

5. משוואת הגלים (מד"ח ליניארית סדר 2)

א. צורה כללית: $u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = F(x,t)$.

ב. פיתרון כללי מהצורה: $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ (F,G גזירות פעמיים ברציפות).

גל נע ימינה במהירות c | גל נע שמאלה במהירות c | סופרפוזיציה (הזזה משו"מ)

ג. תנאי שפה (BC) ותנאי התחלה (IC):

תנאי שפה:
- מיתרן קשור (תנאי דריכלה) – בשני הקצוות: $u(0,t) = u(L,t) = 0$.
- מיתרן חופשי (תנאי נוימן) – מתיחות בקצוות: $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$.
- תנאי מעורב – בעיית שפה מסוג III, למשל: $u(0,t) + \alpha \cdot u_x(0,t) = 0$.

תנאי התחלה:
- צורת המיתר ב-t=0: $u(x,0) = f(x)$, $f(x) \in C2$.
- מהירות התחלתית ב-t=0: $u_t(x,0) = g(x)$, $g(x) \in C^1$.

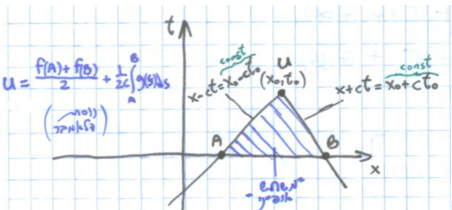
ד. מיתר אינסופי:

1. הבעיה ההומוגנית:
- צורה כללית: $u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

בעיית קושי:
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

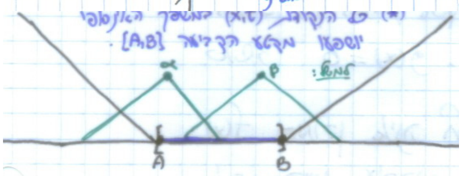
- פיתרון לפי נוסחת ד'לאמבר: $$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$.
- הבעיה מוצגת היטב, נוסחת ד'לאמבר מהווה למעשה הוכחה לקיום, ליחידות וליציבות הפיתרון.
- פתרונות מוכללים

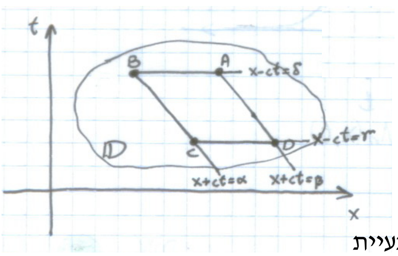
אם $f(x),g(x)$ אינן חלקות אלא רק רציפות וחסומות אזי אפשר למצוא סדרת פונקציות $f_n(x),g_n(x)$ חלקות המתכנסות במידה שווה ל-$f(x),g(x)$ בהתאמה. במקרה זה, פיתרון בעיית קושי $u_n(x,t)$ ("פיתרון קלאסי") יתכנס במ"ש לפיתרון ד'לאמבר $u(x,t)$ המתאים ל-$f(x),g(x)$. גבול במ"ש של פיתרונות קלאסיים לבעיית קושי של משוואת הגלים נקרא פתרון מוכלל .



- תחום השפעה

ערכי u בנקודה (x_o,t_o) נקבעים ע"י ערכי ההתחלה בקטע [A,B], אשר מהווה קטע קביעה עבור נקודה זו. אוסף הנקודות (x,t) המושפעות מהקטע [A,B] (כלומר שקטע הקביעה שלהן **חותך** את הקטע [A,B]) נקרא תחום ההשפעה של הקטע [A,B].





- כלל המקבילית

נניח כי נתון פיתרון בתחום D במישור עבור משוואת הגלים ההומוגנית: $u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$. אם נתבונן במקבילית הנוצרת ע"י קווים אופייניים, אזי בהינתן 3 נקודות ניתן למצוא את הרביעית לפי:

$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$.

כלל זה דורש ידע תיאורטי טוב. לרוב, נשתמש בו תוך יצירת מקבילית ש-3 מקדקודיה ניתנים למציאה מתנאי שפה-התחלה, משיקולי סימטריה ומשיקולי תחומי השפעה והרביעי הוא המבוקש.

2. הבעיה האי-הומוגנית:
- צורה כללית: $u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = F(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

בעיית קושי:
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = F(x,t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

- פיתרון ד'לאמבר "משופר": $$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c} \cdot \int_D F(x,t)dxdt$$.

אינטגרציה על המשולש האופייני

- הנוסחא הנ"ל מהווה סופרפוזיציה של פתרון כללי למשוואה ההומוגנית (נוסחת ד'לאמבר הרגילה) עם פתרון פרטי למשוואה האי-הומוגנית (עם תנאי התחלה 0).
- דוגמא:

$$\begin{cases} PDE: & u_{tt}-c^2u_{xx}=x \\ IC_1: & u(x,0)=0 \\ IC_2: & u_t(x,0)=0 \end{cases}$$

$$Solution: \ u(x,t)=0+0+\frac{1}{2c}\int_0^t dt \int_{x-ct}^{x+ct} xdx = \frac{1}{4c}\int_0^t (x+ct)^2-(x-ct)^2 \ dt = \frac{1}{2}t^2$$

ה. <u>מיתר חצי-אינסופי</u> ("בעיית התחלה-שפה"):

- צורה כללית:

$$\begin{cases} \text{PDE:} & u_{tt}-c^2\cdot u_{xx}=0 & , \ x\in\mathbb{R}, \ t>0 \\ \text{IC:} & u(x,0)=f(x) & , \ x\ge 0 \\ & u_t(x,0)=g(x) & , \ x\ge 0 \\ \text{BC:} & u(0,t)=h(t) & , \ t\ge 0 \end{cases}$$

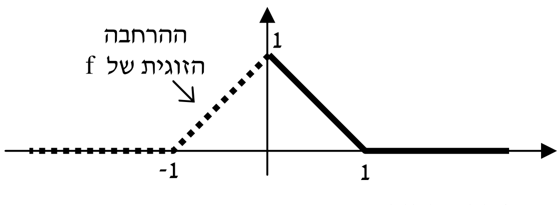
- נשים לב כי פיתרון לבעיה נדרש לקיים את **תנאי הקונסיסטנטיות**, כלומר: $\begin{cases} f(0)=h(0) \\ g(0)=h'(0) \end{cases}$.
- פיתרון לבעיה (נובע משימוש בכלל המקבילית):

$$u(x,t)=\begin{cases} \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\cdot\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds & , \ x-ct\ge 0 \\ h(t-\frac{x}{c})+\frac{f(x+ct)+f(ct-x)}{2}+\frac{1}{2c}\cdot\int_{ct-x}^{x+ct}g(s)ds & , \ x-ct<0 \end{cases}$$

- הבעיה מוצגת היטב, נוסחת הפיתרון הנ"ל מהווה למעשה הוכחה ל<u>קיום</u>, ל<u>יחידות</u> ול<u>יציבות</u> הפיתרון.
- <u>שיטת ההמשכה</u> (שיטה נוספת לפתרון):

רעיון שיטת ההמשכה הוא לפתור את בעיית המיתר החצי-אינסופי ע"י הרחבתו למיתר אינסופי. כך, ע"מ לפתור את בעיית ההתחלה-שפה על חצי המיתר, נרחיב את f,g לפונקציות זוגיות / אי-זוגיות $\tilde{f},\tilde{g}$ ונפתור את בעיית קושי המתאימה עבור הפונקציות המורחבות. נקבל פיתרון $\tilde{u}(x,t)$ לבעיה המורחבת ונתייחס רק לקטע הרלוונטי x>0.

- דוגמא:



ההרחבות הזוגיות של f,g:

$$\begin{cases} PDE: & u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & , & x,t>0 \\ IC_1: & u(x,0)=1-x & , & x>0 \\ IC_2: & u_t(x,0)=0 & , & x>0 \\ BC: & u_x(0,t)=0 & , & t\ge 0 \end{cases}$$

$$Solution: \quad \tilde{f}(x)=\begin{cases} 1-x & , & 0\le x\le 1 \\ 0 & , & |x|\ge 1 \\ 1+x & , & -1\le x\le 0 \end{cases} \quad , \quad \tilde{g}(x)=0$$

הפיתרון המורחב:

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{\tilde{f}(x+ct)+\tilde{f}(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\cdot 0 \quad , \quad x\in\mathbb{R}, \ t\ge 0$$

$$u(x,t)=\tilde{u}(x,t) \quad , \quad x>0, \ t\ge 0$$

ו. מיתר סופי :

- צורה כללית :

$$\begin{cases} \text{PDE:} & u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = F(x,t) \quad , \quad 0 < x < L \;,\; t > 0 \\ \text{IC:} & u(x,0) = f(x) \quad , \quad x \ge 0 \\ & u_t(x,0) = g(x) \quad , \quad x \ge 0 \\ \text{BC:} & u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

או לחילופין תנאי נוימן ⟶ BC

- הבעיה מוצגת היטב, ניתן להראות יחידות לפי "שיטת האנרגיה", וקיום ויציבות לפי שיטת הפרדת המשתנים (שיטה לפיתרון הבעיה).
- שיטת הפרדת המשתנים (שיטה לפתרון) :
מחפשים משפחה של פונקציות מהצורה $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ אשר מקיימת את המד"ח + תנאי השפה/התחלה, נגזור את $u(x,t)$ ונציב במשוואה המקורית. הדבר יוביל ל-2 מערכות מד"ר (מערכת אחת לפי x ומערכת שנייה לפי t), לרוב במקדמים קבועים. נפתור את המערכות, כלומר נמצא את $X(x)$ ואת $T(t)$ ובכך נמצא את הפיתרון שהצענו לפי: $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$.
- פיתרון משוואת הטלגרף :

$$\begin{cases} PDE: & u_{tt} = c^2 u_{xx} - hu & , & 0 < x < L \;,\; t > 0 \\ IC_1: & u(x,0) = f(x) & , & 0 \le x \le L \\ IC_2: & u_t(x,0) = g(x) & , & 0 \le x \le L \\ BC_{1,2}: & u(0,t) = u(L,t) = 0 & , & t \ge 0 \end{cases}$$

$$Solution: \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \sin\left(\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + h \right)^{1/2} \cdot t + \beta_n \cos\left(\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + h \right)^{1/2} \cdot t \right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right)$$

$$\alpha_n \triangleq \left[\frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx \right] \cdot \left(\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 + h \right)^{-1/2} \quad , \quad \beta_n \triangleq \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x \right) dx$$

6. משוואת החום (מד"ח ליניארית סדר 2)

א. **צורה כללית:**

$$\begin{cases} \text{PDE:} & u_t - k \cdot u_{xx} = F(x,t) \quad , \quad 0 < x < L \;,\; t, k > 0 \\ \text{IC:} & u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \ge x \ge 0 \\ \text{BC:} & u(0,t) = a(t) \quad , \quad t \ge 0 \\ & u(L,t) = b(t) \quad , \quad t \ge 0 \end{cases}$$

- פיתרון לבעיה $u(x,t)$ צריך להיות גזיר פעמיים ורציף בכל התחום (כולל בשפה), כמו-כן עליו לקיים את **תנאי הקונסיסטנטיות**, כלומר: $a(0)=b(0)$.
- הבעיה מוצגת היטב, ניתן להראות יחידות ויציבות לפי משפט המקסימום, וקיום ולפי שיטת הפרדת המשתנים (מתוך הגעה לפיתרון הבעיה).
- *המשך יבוא...*

ב. **המשך יבוא... :** המשך יבוא...