## מד"ח - סוגים

מד"ח ליניארי $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}\partial_i\partial_j u = f(x,y)$

עקרון הסופרפוזיציה אם $v,\omega$ פותרים מד"ח אז $u=\omega+v$ גם פותר את אותו המד"ח **עם תנאי התחלה ושפה מתאימים**

בעיית קושי למשוואה קוואזי-לינארית בהינתן קו התחלה קיים פתרון יחיד בסביבת הקו.

סדר שני $a(x,y)u_{xx}+b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+...=f$

סוגים היפרבולית $b^2-4ac>0$ $u_{qr}+l.o.t=G$

פרבולית $b^2=4ac$ $u_{qq}+l.o.t=G$

אליפטית $b^2-4ac<0$ $u_{qq}+u_{rr}+l.o.t=G$

ניתן להביא משוואה לצורתה הקנונית ע"י החלפת משתנים.

## תנאי שפה

| תנאים | דיריכלה | נוימן |
|---|---|---|
| רגיל | $u(0,t)=u(L,t)=0$ | $u_t(0,t)=u_t(L,0)=0$ |
| מעורב | $u(0,t)=u_t(L,0)=0$ | $u_t(0,t)=u(L,0)=0$ |
| ע"ע | $\lambda_n=\frac{\pi n}{L}$ ולתנאי מעורב $\lambda_n=\frac{(2n-1)\pi}{2L}$ | |
| פ"ע | $\tilde{X}_n=\sin\lambda_n x$ | $\tilde{X}_n=\cos\lambda_n x$ |

תנאים מחזוריים $u(a,t)=u(b,t)$ $u_t(a,t)=u_t(b,t)$ $\lambda_n=\frac{2\pi n}{b-a}$

$\tilde{X}_n=A_n\cos\lambda_n x+B_n\sin\lambda_n x$

## בעיית שטורם-ליוביל

צורה $(P(x)X'(x))'+q(x)X(x)+\lambda r(x)X(x)=0$

$B_a[x]=B_b[x]=0$

אופרטורים $L[u]=(P(x)u')'+q(x)u$

$L[u]+\lambda ru=0$

בעיה רגולרית $p,p',q,r\in C[a,b]$

בעיה מחזורית $u(a)=u(b)$ $u'(a)=u'(b)$

תכונות ערכים עצמיים סדרה ממשית עולה עם ריבוי 1 או יתכן ריבוי 2 בבעייה מחזורית

תכונות פונקציות עצמיות

(1 אורטוגונליות ביחס ל- $<u,v>=\int_a^b u(x)v(x)r(x)dx$

(2 אם $f(x)\in E$ אז הפיתוח $\sum_{n=1}^{\infty}<f,u_n>_r u_n(x)$ יתכנס בממוצע/בנורמה

(3 אם $f'(x)\in E$ אז יתכנס ל $f_\pm(x)=\frac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$

(4 אם $f(x)$ רציפה, גזירה למקוטעין **ומקיימת את תנאי השפה** אז הפיתוח יתכנס במידה-שווה

## משוואות גלים וחום

משוואת הגלים $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,y)$

תנאי התחלה $u(x,0)=f(x)$ $u_t(x,0)=g(x)$

מיתר אינסופי דלמבר $u(x,t)=H(x+ct)+W(x-ct)$

גל נסוג $H(x+ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}g(s)ds$

גל מתקדם $W(x-ct)=\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct}g(s)ds$

פתרון פרטי $v(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t d\tau\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(y,\tau)dy$

פתרון אמיתי $g\in C, f\in C^2$ פתרון מוכלל $g\in I, f\in E$

מיתר חצי-אינסופי מרחיבים את $f(x)$ ו- $g(x)$ אי-זוגית

מיתר סופי

ביטוי כללי ל-$T_n$ $T_n(t)=A_n\cos\lambda_n ct+B_n\sin\lambda_n ct$

משוואת החום $u_t-ku_{xx}=F(x,t)$ $0<x<L$ $t>0$

תנאי התחלה $u(x,0)=f(x)$

ביטוי כללי ל-$T_n$ $T_n(t)=A_n e^{-k\lambda_n t}$

עקרון המקסימום המקסימום של פונקציה המקיימת את המשוואה מתקבל על השפה הפרבולית (ללא הגג)

## משוואת לפלס/פואסון

משוואת לפלס/פואסון $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=F(x,y)$

במלבן ניתן לפתור רק למלבנים עם שתי שפות מקבילות הומוגניות. אחרת מפרידים את הבעייה לשניים

בעיגול $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$

תנאי התחלה $u(x,0)=f(x)$ $u(0,y)=g(y)$

תנאי שפה נוימן $\partial u_n=g(x,y)$ על $\partial D$ כאשר

תנאי ליציבות $\oint_{\partial D}\partial_n u\,dl=\iint_D F\,dxdy$

הפתרון הוא עד כדי קבוע

דיריכלה $u=f(x,y)$ על $\partial D$ הפתרון יחיד

פתרון בעיגול

$$u(r,\theta)=\frac{\alpha_0+\beta_0\ln r}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(\gamma^n\cos n\theta+\delta_n\sin n\theta)$$

עיגול $\beta_0=\gamma_n=\delta_n=0$ חוץ העיגול $\beta_0=\alpha_n=\beta_n=0$

פונקציית תיקון בקצוות $v(x,y)=a+bx+cy+dxy$

משפט המקסימום אם D פשוט קשר ו-u הרמונית, אז המקסימום והמינימום של u מתקבלים על שפת D

עקרון הממוצע אם u הרמונית ב-D אז לכל עיגול מוכל בתחום $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+R\cos\theta,y_0+R\sin\theta)d\theta$

## שיטות פתרון - מד"ח מסדר ראשון

קו התחלה $\Gamma = \{x(s), y(s), u(s) \mid a < s < b\}$ המקיים

**א)** גזיר **ב)** $y(x)$ לא חותך את עצמו **ג) הטרנסברסליות**

$$\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \\ a(x(s),y(s),u(s)) & b(x(s),y(s),u(s)) \end{vmatrix} \neq 0$$

לינארי $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u$

1) פותרים $\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$ ומקבלים $\psi(x,y) = c_1$

2) מחליפים משתנים ל- $t = x$ ו- $s = \psi(x,y)$

3) מציבים במשוואה ע"י כלל השרשרת ומקבלים את המד"ר $\omega_t + \frac{c}{a}\omega = \frac{d}{a}$ ופותרים אותו

4) מציבים בפתרון את המשתנים המקוריים. (הקבוע הוא מהצורה $f(s)$) ומקבלים פתרון כללי

5) מציבים את קו ההתחלה $u(x,y) = f$ לקבלת פתרון פרטי

קוואזי-לינארי $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$

שיטת לגרנז'

1) כותבים $\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} = dt$ ומקבלים משטחים בלתי תלויים $\Phi(x,y,u) = c_1$ ו- $\Psi(x,y,u) = c_2$

2) א) מתקיים $dt = \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma du}{\alpha a + \beta b + \gamma c}$

$\alpha dx + \beta dy + \gamma du = 0$ אמ"ם $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$

ב) אם אחד המשטחים תלוי בשני משתנים בלבד מציבים אותו בסט השני על-מנת להפתר ממשתנה

3) כותבים את הפתרון הכללי בצורה $h(\Psi, \Phi)$

4) מציבים את קו ההתחלה לקבלת פתרון פרטי

השיטה הפרמטרית

1) כותבים את אוסף המשטחים האינטגרליים ע"י פתרון $\frac{dx}{dt} = a \quad \frac{dy}{dt} = b \quad \frac{du}{dt} = c$

2) ע"י השוואת הפתרונות הפרמטריים עבור $x, y, u$ עם קו ההתחלה ב- $t = 0$ מקבלים ביטויים לקבועים של אוסף המשטחים כפונקציית פרמטר קו ההתחלה s

5) כותבים את המשטח בצורתו הקרטזית הסתומה ע"י היפטרות משני הפרמטרים.

## שיטות להוכחת יחידות הפתרון

- מגדירים $u = u_1 - u_2$ ומוכיחים $u \equiv 0$ ע"י

משפט המקסימום — בבעיית החום ובעיית לפלס ממשפט המקסימום ומהתאפסות u על קצה התחום

שיטת האנרגיה — $E(t) = \int_a^b u_t^2 + c^2 u_x^2 dx \geq 0$ ומראים כי $E(0) = 0$ ו- $\frac{dE}{dt} \leq 0$ ואז $E \equiv 0$

נוסחת גרין — הצבת הפונקציה u באחת מנוסחאות גרין.

## שיטות פתרון – הפרדת משתנים

1) מתקנים תנאי-שפה לא הומוגניים בעזרת פונקציית תיקון

דיריכלה/מעורב $v = a(t)x + b(t)$

נוימן $v = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$

**ניתן בתנאי נוימן לנסות לתקן את אי-הומוגניות המשוואה**

2) מציעים פתרון בצורה $u(x,t) = X(x)T(t)$ ומציבים

3) מפרידים את המשתנים לצורה $g(T) = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$

4) פותרים את בעיית שטורם-ליוביל המתאימה ומקבלים ע"ע $\lambda_n$ ופונקציות עצמיות (פ"ע) $\widetilde{X}_n$ עד כדי קבוע

אם המשוואה הומוגנית מקבלים ביטוי עבור $T_n(t)$ ועוברים ל-(8), אחרת.

5) מציבים במשוואה $u(x,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\widetilde{X}_n(x)$ ומשווים מקדמים עם הביטוי הלא הומוגני של המשוואה

6) פותרים את סט המד"ר ומקבלים ביטוי עבור $T_n(t)$

7) רושמים את הפתרון פורמלי $u(x,t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\widetilde{X}_n(x)$

8) מוצאים את המקדמים החופשיים בעזרת תנאי ההתחלה.

9) בודקים שהפתרון אמיתי ע"י

א) בדיקת התכנסות במ"ש שלו ושל נגזרותיו

ב) בדיקת קיום תנאי שפה והתחלה

## זהויות מתמטיות שימושיות

אינטגרציה בחלקים $\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$

פתרון מד"ר מסדר ראשון $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x) e^{\int p(x)dx}$$

זהויות טריגונומטריות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \qquad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4} \qquad \sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

נוסחאות גרין $\int vL[u] - uL[v] dx = 0$

$$\iint_D (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v) = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} dl$$

נורמה

$$\int \sin^2 ax \cdot dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$$

$$\int \cos^2 ax \cdot dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$$