פונקציות מרוכבות – 104215

מחבר: עודד בן דב

גרסא ראשונה – יתכן וישנן טעויות בסיכום...

מספרים מרוכבים

$$z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta}$$

- צמוד

$$z = a + ib, \overline{z} = a - ib$$
$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

- מודולו

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = r$$

- ארגומנט פונקציה עם אינסוף ענפים. אנליטית (רציפה) במישור פחות חריץ, לכל ענף k.

$$\arg\left(z\right) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \theta + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$$

- כפל

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

- בחילוק, מכפילים בצמוד מונה ומכנה ונשאר מכנה ממשי.
- אי שיוויון המשולש

$$\left||a| - |b|\right| \le |a + b| \le |a| + |b|;\ a, b \in \mathbb{C}$$

- שורש – יש n ענפים שונים לשורש מסדר n. הם מתקבלים ע"י הצבת $k = 0,1,2...,n-1$:

$$\sqrt[n]{z} = \left[r\left(\cos\left(\theta + 2\pi k\right) + i\sin\left(\theta + 2\pi k\right)\right)\right]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

חשבון דיפרנציאלי של מספרים מרוכבים

- גבול נשאר אותו דבר. שקול לשני גבולות – אחד ממשי ואחד מדומה.
- רציפות גם אותו דבר. שקולה לרציפות בחלק הממשי ורציפות בחלק המדומה.

$$\lim_{z \to z_0} f\left(z\right) = f\left(z_0\right)$$

- גזירה גם מוגדרת באותו אופן.

$$f'\left(z\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(z + h\right) - f\left(z\right)}{h}$$

- משוואות קושי-רימן.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$$

משוואות קושי רימן הן תנאי הכרחי לגזירות בנק' z_0.

סימון משוואות קושי רימן C-R

טופולוגיה

- סביבה של נקודה z_0 היא עיגול פתוח סביב הנקודה.
- נקודה היא פנימית בתחום S אם סביבה שלה גם מוכלת ב S.
- קבוצה נקראת פתוחה אם כל נקודה שלה היא פנימית.
- קבוצה נקראת קשירה אם ניתן לחבר כל שתי נקודות שלה ע"י עקום המוכל בקבוצה.
- תחום הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

אנליטיות

- $f(z)$ נקראת אנליטית ב z_0 אם יש לה נגזרת ב z_0 ובסביבה מסויימת שלה.

אם $f(z)$ אנליטית ב z_0, אזי אם $f = U + iV$ אז יש ל U,V נגזרות חלקיות רציפות בסביבת z_0.

- $f(z)$ נקראת שלמה אם היא אנליטית בכל המישור.
- משפט: $f(z)$ אנליטית ב z_0 אמ"מ היא מקימת את משוואות קושי-רימן בסביבה מסויימת של z_0.
- מתקבל ממשוואות קושי-רימן:

$$f'(z) = U_x + iV_x = V_y + iV_x = V_y - iU_y = U_x - iU_y$$

- אם בייצוג של $f(z)$ ע"י z ו- $\bar{z}$ לא מופיע כלל $\bar{z}$, אזי $f(z)$ אנליטית.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

- משוואת לפלס

$$\Delta U = U_{xx} + U_{yy} = 0$$

- פונקציות המקיימות את משוואת לפלס (בעצם פתרונות של המשוואה) נקראות פונקציות הרמוניות.
- עבור פונקציה אנליטית $f(z) = U + iV$, ממשוואות קושי-רימן מתקבל כי

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$

$$V_{xx} + V_{yy} = 0$$

- בהינתן פונקציה U הרמונית, הפונקציה ההרמונית הצמודה V תהיה פונקציה הרמונית המקיימת כי $U + iV$ היא אנליטית.
- משפט: אם V צמוד הרמונית ל U, אז $-U$ צמוד הרמונית ל V.
- שיטה למצוא פונקציה צמודה הרמונית ל $U = f(x,y)$:

$$\begin{cases} V_x = -U_y \\ V_y = U_x \end{cases} \Rightarrow V = \int -U_y dx = g(x,y) + \overbrace{h(y)}^{"const"} \Rightarrow V_y = g_y(x,y) + h'(y) \Rightarrow V = g(x,y) + h(y)$$

מיפויים בעזרת פונקציות אנליטיות

- עבור $f(z)$ אנליטית ו $f'(z_0) \neq 0$, ההעתקה היא קונפורמית ב z_0 – שומרת על זוויות חיתוך עקומים.
- העתקה קונפורמית בסביבה קטנה שומרת על זווית ההעתקה, וגם מנפחת/מכווצת את הסביבה ביחס קבוע.
- מישור קומפלקסי מורחב - $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

כל נק' האינסוף הן אותה נקודה. ניתן לייצג גם כספירת רימן שהיא הטלה של כדור על מישור ללא הקוטב הצפוני (ניתן למתוח ישר בין הקוטב הצפוני לכל נק' על הספירה ולמצוא את ההעתקה על המישור. רק עבור הקוטב הצפוני זה נותן אינסוף.

- $w = z + C$ - הזזה
- $w = Az + B$ - $|A|$ מנפח/מכווץ, $\arg(A)$ מסובב, ו B מזיז.

- $w=\frac{1}{z}$ - מעתיק מעגלים וישרים למעגלים וישרים. יועתק לישר כשהעקום עובר דרך ה 0.

במקרה שהתמונה היא ישר, ניתן להעתיק שני נקודות נוחות בשביל לקבוע את הישר, ונק' פנימית לקבוע לאן עובר הפנים.

- $w=\frac{az+b}{cz+d},\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$ - העתקת מביוס.

תנאי הדטרמיננט קובע שהישרים לא פרופורציונלים.
גם העתקת מביוס מעבירה מעגלים וישרים למעגלים וישרים.
בהעתקת מביוס יש 3 דרגות חופש. על מנת לבנות העתקה כרצוננו ניתן לקבוע 3 נקודות ומתקיים:

$$f(z_1)=w_1, f(z_2)=w_2, f(z_3)=w_3$$

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\Big/\frac{z_2-z_2}{z_2-z_3}=\frac{w-w_1}{w-w_3}\Big/\frac{w_2-w_2}{w_2-w_3}$$

ונחלץ את w.

- <u>נקודות אינברסיות</u> – נקודות שיקוף בעיגול. עבור עיגול מורחב לישר הנק' סימטריות לישר. נקודות אינברסיות מוגדרות ע"י:

$$|z_1-a||z_2-a|=R^2$$

- משפט: אם z_1,z_2 נקודות אינברסיות לגבי מעגל או ישר, ו T היא טרנספורמצית מביוס אז $T(z_1),T(z_2)$ אינברסיות לגבי התמונה של המעגל או הישר.

עוזר לבחור נקודות לבנות את טרנס' מביוס.

- $w=z^{\frac{1}{2}}$ - קיימים שני ענפים $n=0,1$. הזוויות מתכווצות ב- 2. כלומר חצי מישור עליון יתכווץ לרביע הראשון.
- $w=e^z$ - מוגדר להלן

$$\exp(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

ההעתקה מקיימת:
אנליטיות – מקיימת את משוואות C-R
גזירה -

$$\left(e^z\right)'=e^z$$

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$

כפל -

צמוד -

$$\overline{\left(e^z\right)}=e^{\bar{z}}$$

ערך מוחלט -

$$\left|e^z\right|=e^x$$

מחזוריות - $2\pi i$ מחזור של e^z

$$e^{z+i2\pi n}=e^z$$

בתור מיפוי e^x קובע את הרדיוס ו $(\cos y+i\sin y)$ קובע את הזווית.

- $\log z$ - מוגדר כך:

$$\log z=\log|z|+i\arg(z)$$

$\log z$ הקומפלקסי פונקציה רב-ערכית. יש לה אינסוף ענפים שונים.
הפונקציה אנליטית. גזירה מקיימת כרצוי:

$$(\log z)'=\frac{1}{z}$$

הקשר בין אקספוננט מרוכב ללוגריתם מרוכב –

$$e^{\log z}=z$$

שים לב שרק אחד הענפים של $\log$ מחזיר את z.

$$\log\left(e^z\right)=z+i2\pi n$$

מתקיים כי $\log(z_1\cdot z_2)=\log(z_1)+\log(z_2)$ רק אם $\arg(z_1\cdot z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$.

להימנע מ $\log\left(z^2\right)=2\log z$ ראינו דוגמה שזה נותן פחות ענפים.

- $w=\sin(z), w=\cos(z)$ -

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

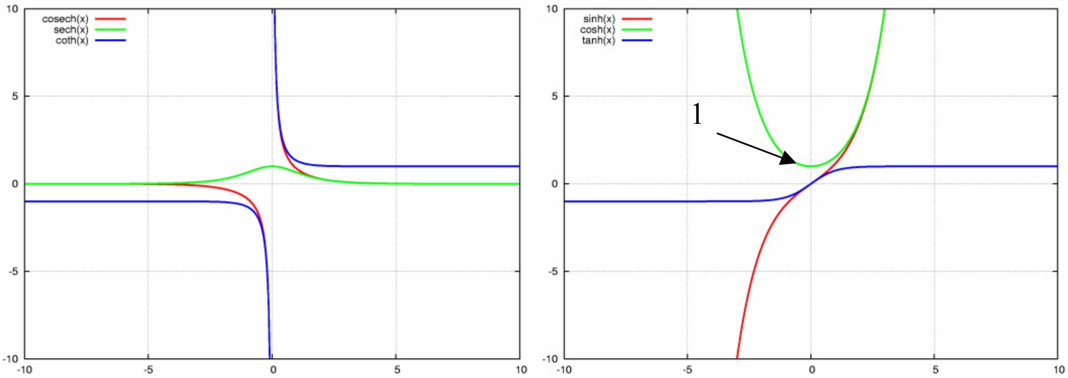
הפונקציות אנליטיות. גזירות כמו שאנחנו מכירים כבר.
זהויות מתקיימות כמו שאנחנו מכירים.

נגדיר <u>קוסינוס וסינוס היפרבולים</u> –

$$\cosh(y)=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$$
$$\sinh(y)=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

אז מתקיים

$$\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$$



$\sin(z)$ מעביר ישרים אנכיים להיפרבולות, וישרים אופקיים לאליפסות.

הפונקציה ההפוכה

$$\arcsin(w)=\frac{1}{2}\log\left[iw\pm\left(1-w^{2}\right)^{1/2}\right]$$

- $w=z^{a};a\in\mathbb{C}$

$$z^{a}=e^{a\log(z)}$$

אם a לא שלם מקבלים פונקציה עם איסוף ענפים שונים.

אינטגרציה

- אי שוויון המשולש –

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\le\int_a^b\left|f(t)\,dt\right|$$

- אינטגרל עם משתנה ממשי ו $f=u(t)+iv(t)$ מורכב

$$\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$$

- אינטגרל עם משתנה מרוכב ו f מרוכב לאורך עקום $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$

$$L_{\gamma}=\int_a^b\sqrt{x^{2}+y^{2}}\,dt=\int_a^b\left|\gamma'(t)\right|dt$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$

משפט ההערכה – אם γ חלק למקוטעין ו f רציפה עליו אז
כש $l(\gamma)$ הוא אורך העקום.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\le\max_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot l(\gamma)$$

- אינטגרל על פונקציה אנליטית

משפט קושי – אם $f(z)$ אנליטית על עקום פשוט סגור C, ובפנים שלו D אז $\int_C f(z)\,dz=0$.

אם התחום אינו פשוט-קשר (יש בו חורים) אזי ניתן לחתוך חתכים אל החורים ולהקיף אותם.
עבור תחום עם מספר איים, נבחר C_1 יקיף את התחום החיצוני ו $C_2,C_3,\ldots$ יקיפו את האיים ונקבל

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz-\int_{C_2} f(z)\,dz-\int_{C_3} f(z)\,dz\ldots$$

משפט יסודי של חדו"א לאינגטרל לאורך מסלול – אם f אנליטית בתחום D ו
$\gamma:[a,b]\to D$ מסילה חלקה בתחום אז

$$\int_\gamma f'(z)\,dz=f(\gamma(b))-f(\gamma(a))$$

משפט מוררה - D תחום פשוט קשר. אם $\oint f(s)\,ds=0$ על כל מסלול סגור C בתחום D אז f אנליטי בתחום.

נוסחת קושי – אם $f(z)$ אנליטית על עקום סגור פשוט C ובפנים שלו,
ו z_0 נקודה קבועה בפנים שלו, אז
ובפרט מתקיים כי כל הנגזרות קיימות ואנליטיות.

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

תכונת הממוצע – אם $f(z)$ אנליטית ב z_0 ובתחום המכיל אותו אז $f(z_0)$ שווה לממוצע של ערכי f על כל מעגל שמרכזו ב z_0.

עקרון המקסימום – אם D תחום חסום ו $f(z)$ אנליטית ב D ורציפה על שפתו אז $\max_{z\in D}|f(z)|$ מתקבל בנקודה או נקודות על השפה.

חסם ל $\left|f^{(n)}(z)\right|$ - אם $f(z)$ אנליטית בתחום D ונתון $|f(z)|\le M$ בתחום, אז
כש r הוא הרדיוס הגדול ביותר האפשרי בתחום סביב z_0.

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!M}{r^n}$$

משפט לואיביל – תהא $f(z)$ אנליטית בכל המישור $\mathbb{C}$. אם $f(z)$ חסומה בכל המישור אז היא קבוע.

משפט – אם $|f(z)|\equiv const$ אז גם $f(z)\equiv const$.

סדרות וטורי פונקציות

- חזרה על סדרות וטורי פונקציות מחדו"א. לא מפרט כאן.
- משפט: אם $f_n(z)\to f(z)$ במ"ש על עקום C במישור המרוכב אז

$$\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz=\int_C\left(\lim_{n\to\infty}f_n(z)\right)dz=\int_C f(z)\,dz$$

- משפט: אם $\left\{f_n(z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ אנליטיות בתחום משותף D ובסביבת נקודה z ו $f_n(z)$ מתכנסות במ"ש ל $f(z)$ אז $f(z)$ אנליטי.
- משפט: תחת אותם תנאים מתקיים $f_n'(z)\to f'(z)$.
- <u>טור חזקות קומפלקסי</u> –

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots$$

- לטור חזקות קיים <u>רדיוס התכנסות</u> R כך שהטור מתכנס עבור $|z-z_0|<R$ ולא מתכנס עבור $|z-z_0|>R$.

נוסחה לרדיוס התכנסות:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

- טור חזקות מרוכב מתכנס בהחלט, ובמ"ש ברדיוס ההתכנסות.
- ברדיוס ההתכנסות מותרת גזירה ואינטגרציה איבר איבר.
- <u>טור טיילור</u> מרוכב עבור $f(z)$ אנליטית בסביבה של z_0

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+\ldots$$

הטור מתכנס במ"ש לפונקציה בכל עגול $|z-z_0|\le r<r_0$. אז לכל f אנליטית בתחום D ונקודה פנימית z_0 יש טור טיילור המתכנס במ"ש בעיגול המקסימלי בתחום סביב z_0.

- משפט היחידות – אם f אנליטית בתחום D, וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות (לא מנוונת) $\left\{z_n\right\}_{n=0}^{\infty}\subseteq D$ שהגבול שלה ב D, כך שלכל n מתקיים $f(z_n)=0$ אז $f\equiv 0$ ב D.
- ניסוח אחר – אם f,g אנליטיות בתחום D, וקיימת סדרה מתכנסת של נקודות (לא מנוונת) $\left\{z_n\right\}_{n=0}^{\infty}\subseteq D$ שהגבול שלה ב D, כך שלכל n מתקיים $f(z_n)=g(z_n)$ אז $f\equiv g$ ב D.
- z_0 נקרא <u>אפס מכפילות</u> m של $f(z)$ כאשר $f(z_0)=\ldots=f^{(m-1)}(z_0)=0$ ו $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

אז מתקיים כי $g(z_0)\neq 0$, $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$.

האפסים של פונקציות אנליטיות הם מבודדים. אין עוד אפס בסביבה של אפס אחר.

- <u>נקודות סינגולריות</u> – נניח $f(z)$ ב z_0 לא אנליטית, אבל בסביבה שלה כן. אז הנקודות מתחלקות ל-3 סוגים:
  - נקודה סינגולרית <u>סליקה</u> - $\lim_{z\to z_0}f(z)=A$. אפשר להשלים את הפונקציה עם הערך A ולקבל פונקציה אנליטית. בעצם לא ממש נקודה סינגולרית.
  - <u>קוטב</u> מסדר m - $\lim_{z\to z_0}f(z)=\infty$. ל $g=\dfrac{1}{f}$ יש בנקודה אפס מסדר m, אזי

    $f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}h(z)$.
  - נקודה סינגולרית מבודדת של f אנליטי, שהיא לא סליקה ולא קוטב נקראת <u>נקודה סינגולרית עיקרית</u>.

- <u>טור לורן</u> – כמו טור טיילור אבל עם חזקות חיוביות ושליליות

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left(z-z_0\right)^n = \ldots + a_{-1}\left(z-z_0\right)^{-1} + a_0 + a_1\left(z-z_0\right) + \ldots$$

התכנסות בטבעת $R_2 < \left|z-z_0\right| < R_1$ (גם $R_2 = 0$ זה סוג של טבעת – עיגול נקוב).

פיתוח טור לורן עבור $f\left(z\right)$ סביב נקודה z_0 -

$$f\left(z\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\left(z-z_0\right)^k$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f\left(s\right)}{\left(s-z_0\right)^{k+1}} ds$$

בד"כ נמצא את הטור ע"י הפיכת הפונקציה לייצוג של $\frac{1}{1-q}$ כש $\left|q\right| < 1$, ואז הטור הוא $\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^k$.

אם f אנליטית ב z_0 מקדמי החזקות השליליות יהיו 0 ונקבל טור טיילור.

טור לורן הוא יחיד.

בקוטב מסדר m טור לורן מכיל בדיוק m חזקות שליליות. בנקודה סינגולרית עיקרית טור לורן מכיל אינסוף חזקות שליליות.

טור החזקות השליליות $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n\left(z-z_0\right)^n$ נקרא <u>החלק העיקרי של</u> f.

אם ל f יש נק' סינגולרית עיקרית ב z_0 אז לכל מספר מרוכב $a+ib$ מתקיים כי יש סדרת נקודות $z_n \to z_0$ כך ש $\lim_{n\to\infty} f\left(z_n\right) = a+ib$.

שים לב! אופי הפונקציה f בנקודה z_0 ניתן לגלות רק בפיתוח טור לורן בסביבתו המיידית של z_0.

- <u>רזידום</u> – אם z_0 נקודה סינגולרית מבודדת של $f\left(z\right)$, ו f אנליטי בסביבתה אז מגדירים את השארית:

$\mathrm{Res}\left(f, z_0\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f\left(s\right) ds$, כש C מסלול מקיף את z_0.

מתקיים כי $\mathrm{Res}\left(f, z_0\right) = a_{-1}$ כש a_{-1} הוא מקדם לורן של $\left(z-z_0\right)^{-1}$ בפתוח בסביבתו המיידית של z_0.

- חישוב רזידום

$$f\left(z\right) = \frac{p\left(z\right)}{q\left(z\right)}, \mathrm{Res}\left(f, z_0\right) = \frac{p\left(z_0\right)}{q'\left(z_0\right)}$$

עבור קוטב מסדר m מתקיים

$$\mathrm{Res}\left(f, z_0\right) = \lim_{z\to z_0}\left(\frac{\left(z-z_0\right)^m f\left(z\right)}{\left(m-1\right)!}\right)^{\left(m-1\right)}$$

- משפט הרזידום – אם ל $f\left(z\right)$ יש m נקודות סינגולריות מבודדות בפנים של עקום סגור פשוט C, אז

$\oint_C f\left(z\right) dz = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}\left(f, z_i\right)$.

- שימושי רזידום

חישוב אינטגרל מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p\left(x\right)}{q\left(x\right)} dx$ כש דרגת q גדולה לפחות ב 2 מזו של p -

מגדירים $f\left(z\right)$ זהה (z במקום x) ועושים אינטגרל על חצי עיגול היושב מעל הציר הממשי. חצי העיגול מתאפס כש $R \to \infty$, והחלק של הקוטר שווה למה שמחפשים. את ערך האינטגרל על המסלול מוצאים ע"י משפט הרזידום.

אם האינטגרל נראה כך $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\cos(x)dx$, אז מציבים $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}e^{iz}$, עושים אותו דבר ובסוף משווים מקדמים.
(כאן האינטגרל על חצי העיגול מתאפס גם בגלל ש $y>0$ - זה לא היה חשוב בסוג הקודם).

אינטגרל מהצורה $\int_{0}^{2\pi} f(\sin(\theta),\cos(\theta))d\theta$ נפתור ע"י הצבת $z=e^{i\theta},\bar{z}=e^{-i\theta}=\frac{1}{z},dz=ie^{i\theta}d\theta$. נקבל אינטגרל ממשי ב z . ואת האינטגרל המתקבל פותרים בעזרת משפט הרזידום. כדאי לוודא בסוף שיצא ממשי.