פונקציות מורכבות

מרצה: אמיל סוקאן

23 בספטמבר 2004

$Id: complex.lyx,v 1.15 2004/09/23 12:51:05 itay Exp $

תוכן עניינים

1 מבוא

1.1 מספרים מורכבים

$z=x+iy, \overline{z}=x-iy, (i^2=-1, i^4=1)$ כאשר

$$x=Re\{z\}=\frac{z+\overline{z}}{2}, y=Im\{z\}=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

. ניתן גם להגדיר $z=x+iy+jz+kt$.

ניתן להציג מספר מדומה כ $z=(x,y), z=x+iy, z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ כאשר $\sqrt{x^2+y^2}=|Z|=\rho$ הוא המרחק מ-z ל 0 וגם $Argz=\theta$ (הזוית הקטנה ביותר). ניתן גם לכתוב $z\overline{z}=|z|^2$ בנוסף $\forall i\in\mathbb{Z}, argz=Argz+i2\pi$ וגם $Argz\in[-\pi,\pi)$. מכאן הפונקציה $z\mapsto|z|$ וגם הפונקציה הרב ערכית (לא פונקציה)

$$z\mapsto argz=\{Argz+2n\pi\,|n\in\mathbb{Z}\}$$

. עבור כל n_0 מגדירים ענף ($branch$) של $argz$. אפשר לחשוב על קו $\mathbb{R}^-$ עבור כל arg כחתך עליון וחתך תחתון. כדי לעצור תנועה סיבובית יש להוציא חריץ מ 0 ל ∞.

דוגמאות

- $X_1=\{z||z|<1\}$ העיגול הפתוח. מסומן גם ב Δ.
- העיגול הסגור $\overline{\Delta}=\{z||z|\leq 1\}$.
- טבעת $X_2=\{z|1<|z|<2\}$
- לדוגמא מישור קרוב יותר ל a : $X_3=\{|\frac{z-a}{z-b}|<1\}$. כאן לוקחים את האנך המרכזי ומשם מוצאים את חצי המישור הקרוב ל a.

1.1.1 משוואות אוילר ($Euler$)

נתון $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}, \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$ ואז למשל $e^i=1+i-\frac{1}{2!}-\frac{i}{3!}+\frac{1}{4!}...=(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-...)+(1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-...)$ ובאופן כללי צורת אוילר : $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.
בפרט $e^{i\pi}+1=0$

1.2 הספירה של $Gauss$ (הטלה סטריאוגרפית)

נטיל ספירה ברדיוס של 1 כך שהחלק התחתון שלו על המישור. נמרכב את המישור (הקומפלקסי) על הספירה. כך שקו בין הנקודה במישור ל $(0,0,2)$. אז ה ∞ נמצא בנק' העליונה כי מישור מקביל למישור הקומפלקסים נפגש באין סוף. (ראה איור 1) באותו אופן ניתן גם למרכב ספירה שחותכת את המישור בחציו. ואז בחלק של המישור שבתוך הספירה ממורכב בחלק התחתון של הספירה. והמישור מחוץ לספירה בחלק העליון של הספירה. (ראה איור 2)

חישוב הטלות נסמן נק בספירה $p=(x_1,x_2,x_3)$ ונסמן $p^*=z=(x_1,x_2,0)$, אז כדי לקבוע את z כאשר $z=\pi(p)$ יש לקבוע את x,y. נכתוב את משוואת הישר העובר דרך N ו- P ($N=(0,0,1), P=(x_1,x_2,x_3)$) נקבל:

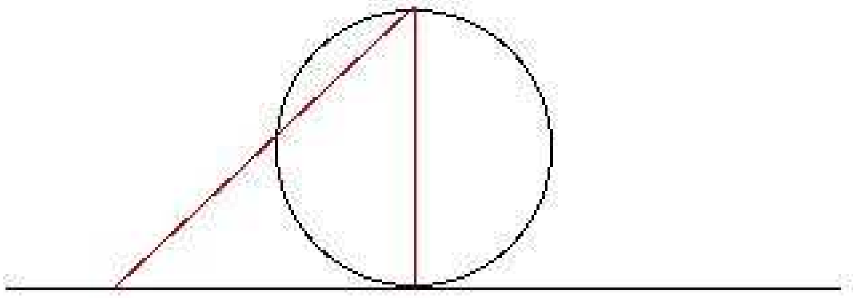
$$(L), \frac{x-0}{x_1+0}=\frac{y-0}{x_2-0}=\frac{z-1}{x_3-1}$$

אז $p^*=L\cup\mathbb{C}$ מתקבל עבור $z=0$ כלומר

$$P^*\equiv z\in\mathbb{C}, z=\frac{x_1}{1-x_3}+i\frac{x_2}{1-x_3}$$

.

איור 1: מירכוב



חישוב הטלה הפוכה אם $z = x + iy$ אזי $\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2} = |\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}|^2 = |z|^2$ וכן זאת ספירת יחידה ולכן $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ נציב ונקבל $\frac{1+x_3}{1-x_3} = \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} = \frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-x_3^2}{(1-x_3)^2}$ מכאן נקבל $x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$ צריך לבטא את x_1, x_2 בעזרת z:

$$\begin{aligned} x &= \frac{z-\overline{z}}{2} \\ y &= \frac{z-\overline{z}}{2i} \\ 1-x_1 &= \frac{z}{1+|z|^2} \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2} \\ x_2 &= \frac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)} \\ x_3 &= \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \end{aligned}$$

משפט ישר או מעגל = $\Pi(circule)$ (כלומר כל מעגל על הספירה מתרגם למעגל או ישר על הקומפלקסים)

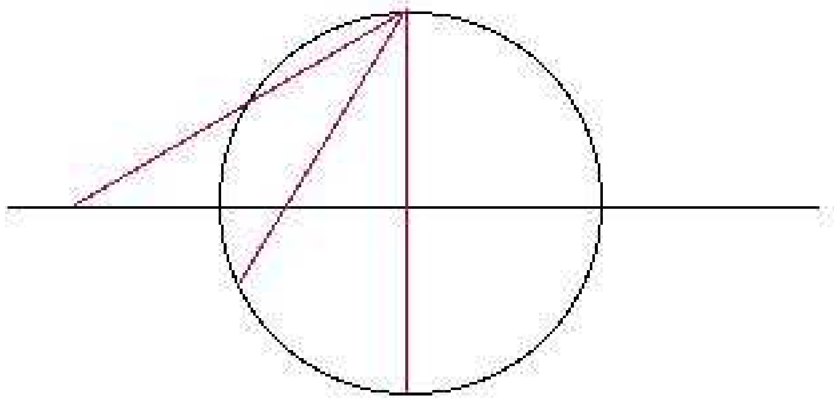
הוכחה אם γ מעגל על ספירה היחידה s^2, אז קיים מישור α כך ש $\gamma = \alpha \cap s^2$. נראה עבור חצי כדור דרומי $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_4$, $0 \le \alpha_4 \le 1$ בנוסף $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ נקבל (ע"י חישוב ושימוש ב-z)

$$\begin{aligned} \gamma : \alpha_1(z+\overline{z}) + \alpha_2(z-\overline{z}) + \alpha_3(|z|^2-1) &= \alpha_4(|z|^2+1) \\ \Rightarrow (\alpha_4-\alpha_3)(x^2+y^2) - \alpha_1 x - 2\alpha_2 y + (\alpha_4+\alpha_3) &= 0 \end{aligned}$$

כלומר

1. אם $\alpha_4 = \alpha_3$ אז $\Pi(\gamma)$ ישר: $N(0,0,1) \in \gamma$

איור 2: מירכוב שני



2. אם $\alpha_3 \neq \alpha_4$ אז $\Pi(\gamma)$ מעגל

■

משפט πשומר על זוויות (ללא הוכחה)

1.3 פונקציות

$$f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$$
$$f(z, \overline{z}) = f(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{2i}) = f(x, y) = f(x + iy) = f(z)$$

כלומר בעצם יש לכתוב $f(z, \overline{z})$.

$$\begin{aligned} w &= f(z) \Rightarrow f(z) = w = u + iv, u = Ref, v = Imf \\ \Rightarrow f(x + iy) &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

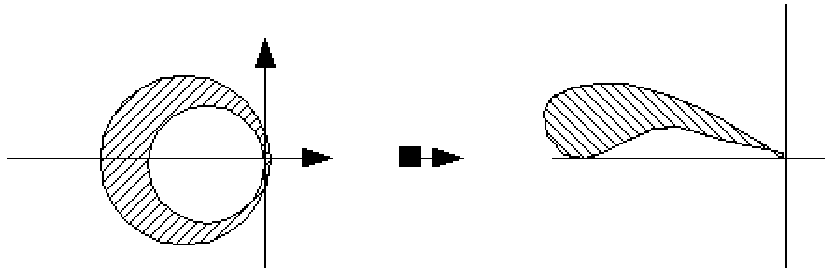
הערה $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R} \Leftrightarrow Imf = 0$

דוגמאות

1. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, f(z) = z = x + iy$
2. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}^+, f(z) = |z| = x^2 + y^2$
3. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - iy^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$
לכן הרבה יותר יפה לכתוב אם z.
4. $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{C}, f(z) = z + \frac{1}{z}$ זהו העתקת $jukowsky$ לחתך של כנף של מטוס עבור העתקה לשני חלקי מעגל(ראה איור 3).
(א) עבור $\rho = 1$ נקבל

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta \\ \Rightarrow f(\rho^1) &= \mathbb{R}[-2, 2] \end{aligned}$$

איור 3: העתקת ג'יקובסקי



(ב) עבור $\rho > 1$ נקבל

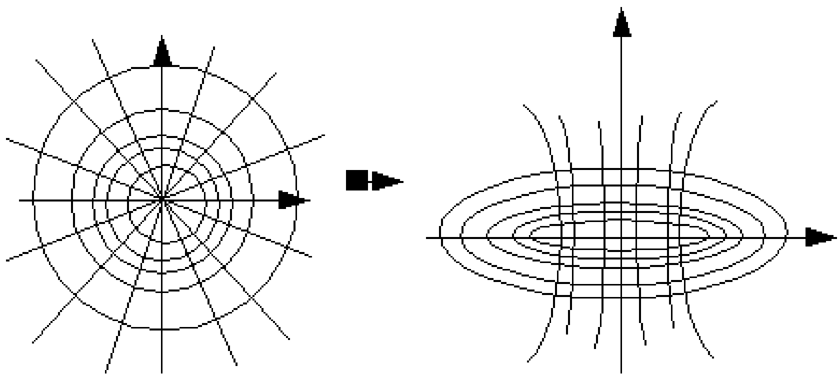
$$\begin{aligned} f(z) &= f(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= (\rho + \frac{1}{\rho})\cos\theta + i(\rho - \frac{1}{\rho})\sin\theta \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} f(z) &= a\cos\theta + ib\sin\theta \\ &= (acos\theta, b\sin\theta) \end{aligned}$$

לכן אפשר לצורך חקירה לחתוך את המישור $\mathbb{C}$ למעגלי יחידה וגם לחתכים ניצבים (קרני-ים).(ראה איור 4) ניתן לבטא זאת ע"י $\theta = const$

איור 4: חקירת המרחב ע"י θ קבוע וע"י ρ



$$u + iv = f(z) = (\rho + \frac{1}{\rho})\cos\theta + i(\rho - \frac{1}{\rho})\sin\theta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = (\rho + \frac{1}{\rho})\cos\theta \\ v = (\rho - \frac{1}{\rho})\sin\theta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{u^2}{\cos^2} = \rho^2 + 2 + \frac{1}{\rho^2} \\ \frac{v^2}{\sin^2} = \rho^2 - 2 + \frac{1}{\rho^2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2\theta} - \frac{v^2}{\sin^2\theta} = 4$$

ואילו היפרבולות שלא במקרה ניצבות לאליפסות שחלק הראשון.

1.4 טופולוגיה במישור

גבולות

1. $z \to z_0$, $|f(z)-z_0|<\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\begin{cases}\forall z\in\mathbb{C}\\ 0<|z-z_0|<\delta\end{cases}$
2. $|z|\to\infty \Leftrightarrow z\to\infty$ כי $\begin{matrix} x=\frac{x_1}{1-x_3}\to\infty\\ \wedge y=\frac{x_2}{1-x_3}\to\infty\end{matrix}$ $\Rightarrow x_3\to 1 \Leftrightarrow p\to N$ כלומר הטלה סטריוגרפית מתכנסת לנק'

אזי התכנסות לאין סוף ולנק' זה אותו דבר על הספירה.

הערה $f(z)\to w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} Ref(z)\to Rew_0\\ Imf(z)\to Imw_0\end{cases}$

הערה $f(z)\to\infty \Leftrightarrow |f(z)|\to\infty$ לכן, נוכל להשתמש בגרף של $|f(z)|:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{R}_+$

הגדרה $X\subseteq\mathbb{C}$ נקראת פתוחה אס"ם $\forall z_0\in X,\exists r>0,\{z||z-z_0|<r\}\subseteq X$

הגדרה $X\subseteq\mathbb{C}$ נקראת סגורה אס"ם $\{z||z-z_0|<r\}\cap X\neq\phi$, $\begin{cases}\forall z_0\in X\\ \vee\forall r>0\end{cases}$

הגדרה בהינתן $X\subseteq\mathbb{C}$ אזי $\overline{X}\subseteq\mathbb{C}$ הקב' הסגורה הקטנה ביותר כך ש $X\subseteq\overline{X}$

מסקנות

1. $\overline{X}=X\cup\partial X$
2. $\overline{X}=X\cup X'$ כאשר X' קב' נק' ההצטברות

דוגמא $X=[0,1)\cup\{2\},X'=[0,1]\Rightarrow\overline{X}=[0,1]\cup\{2\}$

דוגמא $X=\{\frac{1}{n}|n\in\mathbb{N}\},X'=\{0\},\overline{X}=X\cup\{0\}$

טענה אנפי' מלא עושים על קב' פתוחות (ניתן לעשות גבולות,נגזרות חד צדדים)

הערה התגדרה אנפי' מלא מתקיים הקטע

דוגמא $\forall x\in D,f'(x)=0$, $f:(-\infty,0)\cup(0,\infty)\to\mathbb{R},f(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ -1 & x>0\end{cases}$ וגם הפונקציה לא קבוע לכן צריך את ההגדרה הבאה

הגדרה $X\subseteq\mathbb{C}$ קשירה אס"ם לא קיימות $X_1,X_2,...,X_n$ פתוחות זרות כך ש-$X=\cup_{n=1}^{n}X_n$ (קבוצה לא קשירה פולינומלית)

משפט $D\subseteq\mathbb{C}$ פתוחה אזי D קשירה אס"ם קשירה ע"י מסלול של מספר סופי ישרים למקוטעין

2 פונקציות אנליטיות

2.1 גזירות קומפלקסים

הגדרה יהי $D\subseteq\mathbb{C},z_0\in D,f:D\mapsto\mathbb{C}$ אז $f(x)$גזירה ב z_0

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\exists f'(z) &= \lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\\ \Leftrightarrow\exists f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\end{aligned}$$

(כאשר $h\in\mathbb{C}$!)

הערה אם $f'(z)$ קיים אז הגבול לא תלוי בכיוון.

הערה $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{R}$ אז

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+x)-f(z_0)}{x}\in\mathbb{R} \\ f'(z_0) &= \lim_{\substack{y\to 0\\ iy\in i\mathbb{R}}} \frac{f(z_0+iy)-f(z_0)}{iy}\in i\mathbb{R} \\ \Rightarrow \forall z_0\in D, f'(z_0) &= 0 \end{aligned}$$

לכן כל פונקציה מהקומפלקסים לממשיים מתקיים $f'\equiv 0$

דוגמא $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{R}$, $f(z)=|z|^2$ אז

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(z+h)\overline{(z+h)}-z\overline{z}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{z\overline{z}+\overline{z}h+z\overline{h}+h\overline{h}-z\overline{z}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\overline{z}h+z\overline{h}}{h}+\overline{h}\right) \\ &= \overline{z}+z\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h} \end{aligned}$$

כלומר $f'(z)$ קיים אס"ם $z=0$

הגדרה יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ ותהי $f:D\mapsto\mathbb{C}$, f אנליטית (הולומורפית) ב $z_0\in D$ אס"ם- f גזירה ב- z_0 וגם f גזירה בסביבה של z_0

הערה f אנליטית ב-z_0 אס"ם f אנליטית בסביבה (מלא) של z_0 (הגזירות נק', האנליטיות הנה סביבתית, לכן אנליטיות היא על תחום)

הערות

1. כלל אצבע: $\overline{z}$, $|z|$ יהיו לא אנליטיות בתחום
2. כלל אצבע: הגזירה הפורמלית היא כמו במקרה הממשי

דוגמא $(z^3)'=3z^2$, $(z+z^{17})=1+17z^{16}$, $|z|^2=(z\overline{z})'=\overline{z}$ מסקנה $|z|^2$ גזיר רק ב-0.

הגדרה אם $D\equiv\mathbb{C}$ אזי f נקראת שלמה. (אנליטית גורר גזירה אבל לא להפך).

ברצוננו לאפיין את הפונקציות הגזירות האנליטיות

הגדרה (1) $f:D\mapsto\mathbb{C}$, $z_0\in D$ נראית $\mathbb{C}$-דיפרציאבילית ב z_0 אס"ם קיים $\alpha\in\mathbb{C}$ וקיימת

$$\begin{aligned} \omega: D-\{z_0\} &\mapsto \mathbb{C} \\ \lim_{z\to z_0}\omega(z) &= 0 \end{aligned}$$

כך שמתקיים

$$f(z) = f(z_0)+\alpha(z-z_0)+\omega(z)(z-z_0)$$

מסקנה f דיפ' ב z_0 אם f רציפה ב z_0 כי

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha &= \omega(z)\\ \tilde{\omega} &= \begin{cases}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\alpha & z\neq z_0\\ 0 & z=z_0\end{cases}\end{aligned}$$

נכתוב

מסקנה אם f דיפ' אז f גזירה ב-z_0 (כאשר $f'(z_0)=\alpha$)

הגדרה (2) $f:D\mapsto\mathbb{C}$ אזי f נקראת $\mathbb{R}$-דיפרציאבילית ב-z_0 אם"ם קיימים $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0),\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ כך שקיימים a,b כך ש

$$z=x+iy, f(z) = f(z_0)+a(x-x_0)+b(y-y_0)+O(z)|z-z_0|$$

הערה $\mathbb{C}$-דיפ' $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\mathbb{R}$-דיפ'

דוגמא נגדית ל$f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ $f(z)=|z|^{\frac{3}{2}}$

הערה f גזירה ב z_0 $\Leftarrow$ $\mathbb{C}$-דיפ' ב z_0

הערה עבור מעבר ל-$\mathbb{R}$-דיפ'

$$\begin{aligned}a &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\\ b &= \frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}$$

נניח ש f גזירה ב-z_0 ($f:D\mapsto\mathbb{C}$) אז

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\\ &= \lim_{y\to y_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{x-x_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) && (1)\\ =f'(y) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{iy-iy_0}=-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) && (2)\end{aligned}$$

אבל (1) שווה ל (2) לכן

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= -i\frac{\partial f}{\partial y}\\ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} &= -i(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})\\ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} && (3)\\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} && (4)\end{aligned}$$

זוג המשוואות (3),(4) נקראות משוואות קושי-רימן ז"א הוכחנו כי מתקיימת הטענה הבא

משפט f גזירה $\Leftarrow$ f מקיימת קושי-רימן

הערה f מקיימת קושי-רימן $\not\Leftarrow$ f גזירה

דוגמא נגדית $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ וגם $f(z)=\begin{cases}\frac{z^4}{|z|^3} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$

משפט f מקיימת קושי-רימן וכן $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$ רציפות אז f דיפ' (גזירה)

הוכחה ראה אינפי/חדו"א 2.

מסקנה (1) אם $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{R}\Rightarrow f=const$

הוכחה $f(z)\in\mathbb{R}$, לכל z $\Leftrightarrow 0=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}\Leftarrow v=0$ אך f גזירה , לכן מקיימת קושי-רימן

$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \Rightarrow u &= u_0\end{aligned}$$

כלומר $f\equiv u_0+i0$

תרגיל $f:D\mapsto\mathbb{S}'$ וגם f גזירה $\Leftarrow f=const$ ($\mathbb{S}'=\{z||z|=1\}$)

מסקנה (2) $f:D\mapsto\mathbb{C}$ גזירה $f'\equiv 0\Leftarrow f=const$

מסקנה (1') $f:D\mapsto\mathbb{C}$ גזירה כך ש $|f|\equiv const$ אזי $f\equiv const$.

הוכחה אם $|f|\equiv 0$ אזי $f\equiv 0$. אם $|f|=c\neq 0$ אז

$$\begin{aligned}|f|^2 &= c^2\\ u^2+v^2 &= c^2\end{aligned}\tag{5}$$

נבדוק אם (5) לפי X ולפי Y

$$\begin{cases}u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}\tag{6}$$

אבל (6) הנה מע' לינארית והומוגנית במשתנים u,v לכן (6) יש פתרון לא טריוואלי אם"ם

$$\begin{aligned}\Delta(6) &= 0\\ \Leftrightarrow\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix} &= 0\\ \Leftrightarrow\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

אבל f גזירה ולכן מקימת קושי רימן כלומר

$$\begin{aligned}(7)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 &\equiv 0\\ \Leftrightarrow\frac{\partial u}{\partial x} &= 0\\ \vee\frac{\partial u}{\partial y} &= 0\\ \Leftrightarrow u &= const\end{aligned}$$

וע"פ קושי רימן $v\equiv 0$

■

תרגיל $f:D\mapsto\mathbb{C}$ $Argf=const\Leftarrow f=const$

הערה ראינו בהוכחת הטענה הקודמת ש

$$|f'|^2 = |\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}|^2 = (\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$$

ע"פ קושי רימן

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J(u,v) \end{aligned}$$

אזי גם

$$\begin{aligned} f' &= \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}(=\frac{\partial f}{\partial x}) \\ &= \frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}(=\frac{\partial f}{\partial y}) \end{aligned}$$

הערה

$$\begin{aligned} f &= x+iy \\ \Leftrightarrow x &= \frac{z+\overline{z}}{2} \\ y &= \frac{z-\overline{z}}{2i} = -i\frac{z-\overline{z}}{2} \end{aligned}$$

עבור $f(z,\overline{z})$ מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \end{aligned}$$

אך $\begin{matrix} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{-i}{2} & \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \\ \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{i}{2} & \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2} \end{matrix}$ לכן

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{-i}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})-\frac{i}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{i}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}) \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})+i(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y})+\frac{i}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}) \end{aligned}$$

וע"פ קושי רימן קיבלנו $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

לסיכום קיבלנו f גזירה $\Leftarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

תרגיל $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ לכן $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = z$ לכן הפונקציה גזירה רק ב 0

2.2 פונקציות הרמוניות

תרגיל $f : D \mapsto \mathbb{C}$ אנליטית $f = u + iv$ (f מקיימת קושי רימן)

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})\\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\\ &= 0\\ \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

הגדרה תהי $\alpha : D \mapsto \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^2$) α נקראת הרמונית אם"ם $\Delta\alpha \equiv 0$. ז"א שהוכחנו שאם $f : D \mapsto \mathbb{C}$ אנליטית אז u, v הרמוניות.

הגדרה $u = u(x,y) \in \mathbb{R}, v = v(x,y) \in \mathbb{R}$ אם f, u, v כנ"ל אז u, v נקראות הרמוניות צמודות (ז"א f אנליטית $(u = Ref, v = Imf$)

שאלה בהינתן u הרמונית האם תמיד קיימת v הרמונית צמודה?(האם קיימת v כך ש $f = u+iv$ אנליטית?) ז"א האם קיימת v הרמונית כך ש (קושי-רימן)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

תשובה לא! לא תמיד ניתן למצוא v הרמונית צמודה ל u, בתחום D

דוגמא נגדית $D = \mathbb{C} - \{0\}$ וגם $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), v = \arctan\frac{y}{x}$ אזי

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

ז"א הם מקיימות קושי רימן והרמוניות אבל לא קיימת f אנליטית ב $D = \mathbb{C} - \{0\}$ כך ש $f = u + iv$.
נניח שקיימת f כזאת.

$$\begin{aligned}f &= u + iv\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\arctan\frac{y}{x}\\ &= \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\frac{y}{x}\end{aligned}$$

אבל זאת פונקציה רב-ערכית ולכן $f = u + iv$ איננה פונקציה ובפרט איננה פונקציה אנליטית. אבל אם נצטמצם לתחום שלא מקיף את 0 אזי ל u קיימת הרמונית צמודה. ניתן לרשום גם

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \ln|z| + i\arg Z \\
f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{\overline{z}}{|z|} = \frac{1}{z}
\end{aligned}
$$

הגדרה $f(z)$ קיימת אז $f'(z) = \frac{1}{z}$ לכן $f(z) \triangleq \ln z = \ln|z| + i\arg z$ הגדרנו פונקציה $\ln$ כפונקציה רב ערכית.

משפט אם D תחום פשוט קשר ואם $u : D \mapsto \mathbb{R}$ הרמונית, אז ל-u קיימת הרמונית צמודה ב-D.

הוכחה (בערך) אם D פשוט קשר אז $\int_c \frac{\partial u}{\partial x}$ איננו תלוי במסלול כי קושי רימן גורר שדה משמר (תבנית סגורה $p_y = q_x$)

משפט מוכלל $u : D \mapsto \mathbb{R}$ אז u הרמונית $\Leftrightarrow$ לכל עיגול $\Delta_0 \subseteq D$ קיימת f אנליטית ב- Δ_0כך ש $u|_{\Delta_0} = \Re f|_{\Delta_0}$ כלומר אם בכל תחום פשוט קשר היא הרמונית וקיימות פונקציה אנליטית f אז באיחוד התחומים יש f אנליטית אחת כזאת.

נתון פונקציה $f : D \mapsto \mathbb{C}$ ושני עקומים α_1, α_2 על D שעוברים דרך נק' z_0 ואז $f(\alpha_1) = \gamma_1, f(\alpha_2) = \gamma_2$

2.3 זוויות וקונפורמיות

שאלה מתמשכת איך למדוד את $\measuredangle(\alpha_1, \alpha_2)$ ואת $\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2)$ ואם הם נשמרים

נשים לב ש-

$$
\begin{aligned}
z &= z(t) \\
w(z) &= w(z(t)) \\
w_0' = w'(z) &= (f(z_0(t_0))) = f'(z_0)z'(t_0)
\end{aligned}
$$

בפרט

$$
\begin{aligned}
|w'(z_0)| &= |f'(z_0)||z'(t_0)| \\
\arg w'(z_0) &= \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)
\end{aligned}
$$

לכן $w'(z) \neq 0$ (כלומר ניתן למדוד את הזוית) אם"ם $f'(z_0) \neq 0$.

$\theta = \measuredangle(z_1^{'}(t_0), z_2^{'}(t_0))$ איננה מוגדרת כאשר $z_i^{'}(t_0) = 0$;$i = 1, 2$.

כמוכן $\varphi = \measuredangle(\gamma_1^{'}(w_0), \gamma_2^{'}(w_0))$ ז"א

$$
\begin{aligned}
\theta &= \arg z_2^{'}(t_0) - \arg z_1^{'}(t_0) \\
\varphi &= \arg w_2^{'}(z_0) - \arg w_1^{'}(z_0)
\end{aligned}
$$

הגדרה $f : D \mapsto \mathbb{C}$ נקראים קונפורמיות אם"ם f שומרת זוויות+מגמה (אם המגנה מהפכת - אנטי קונפורמית ניתן לקבל קונפורמית ע"י $f(\overline{z})$)

משפט תהי $f : D \mapsto \mathbb{C}$ כך ש $f^{'}(z_0) \neq 0$ ($z_0 \in D$) אז f קונפורמית ב- z_0.

הוכחה נתון

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg w_2'(z_0) - \arg w_1'(z_0)\\ &= \left(\arg f' + \arg z_2'\right) - \left(\arg f' + \arg z_1'\right)\\ &= \arg f' + \arg z_2' - \arg f' - \arg z_1'\\ &= \arg z_2' - \arg z_1'\\ &= \theta\end{aligned}$$

דוגמא $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}, f(z)=z^2$ אז $f'(z)=2z$ שונה מאפס לכל $z\neq 0$. לכן f קונפורמית בכל נק' בה $z\neq 0$. כמובן

$$f=\rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

לכן עבור $z=0$ הפונקציה לא קונפורמית.

דוגמא $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}, f(z)=z+\frac{1}{z}$ נחשב נגזרת $f'(z)=1-\frac{1}{z^2}$ לכן בפרט f קונפורמית עבור $|z|\neq 1$.

הערה $\left|f'(z_0)\right|^2\neq 0 \Leftrightarrow f'(z_0)\neq 0$ אך $J(u,v)=\left|f'(z_0)\right|^2 \Leftrightarrow$ (ע"פ Implicite function Thourem) f^{-1} קיימת בסביבה של $z_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ אנליטית (וקונפורמית) בסביבה של w_0.

"מסקנה" קונפורמיות בתחום$\Leftrightarrow$אנליטיות (בנק' בעייתיות צריך לבדוק בנפרד)

הערה $f'(z)\neq 0 \not\Rightarrow f$ חח"ע.

דוגמא נגדית $f(z)=z^2$ אז $i^2=1$ אז $f(z)$ איננה חח"ע.אבל בתחום לדוגמא $\Im z>0$ כן חח"ע

משפט (Invatiance of Dowain) $f:D\mapsto\mathbb{C}$ אנליטית ו-$f'(z)\neq 0$ לכל $z\in D$ אז

$$\Omega = f(D)$$

(כלומר תחומים הולכים לתחומים לא נוצרים שפות)

משפט $f(D)=\Omega$ ואם f חח"ע אזי $f(\partial D)=\partial\Omega$

2.4 העתקות אלמנטריות

1. $w:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}, w(z)=z^n$ אז

$$w'(z)=nz^{n-1}, z\neq 0$$

כלומר קונפורמית ב-$\mathbb{C}-\{0\}$. איננה קונפורמית ב $z_0=0$ ליתר דיוק θ היא זווית עם קדקוד בראשית אזי $w(\theta)=n\theta$. תחום (מוכלל) יסודי יהיה $\theta\in[0,\frac{2\pi}{n}), R>0$ (שומר על חח"ע).
כלומר $w(z)=z^n$ הנה $1\mapsto n$. וגם $\sqrt[n]{z}$ הנה $1\le t_0\le n$.

2. פונקציה מאריכית קומפלקסית ראינו ש $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. ניתן להכליל את ההגדרה ל-

$$e^z = e^{\Re z+i\Im z}=e^{\Re z}\left(\sin\Im z+i\cos\Im z\right)$$

הערה: $\Re z=0$ זה זהות אוילר ו$\Im z=0$ זה פונקציה מאריכית רגילה.
הגדרנו $\exp:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ ע"י

$$\exp(z) = e^z=e^{\Re z}\left(\sin\Im z+i\cos\Im z\right)$$

הערה:

$$|e^z|=e^{\Re z}, \arg e^z=\Im z+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

תכונות של $\exp$

(א) $\exp|_{\mathbb{R}} = e^x$
(ב) $e^{z+w} = e^z e^w$
(ג) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$
(ד) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$
(ה) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$
(ו) $\exp$ שלמה, כלומר אנליטית בכל המישור.
(ז) $\exp(z + i2\pi) = \exp(z) \Rightarrow \exp(z + 2k\pi i) = \exp(z)$
(ח) תחום יסודי מתאים $\{z|0 \leq \Im z < 1\}$

הערה עבור $e^{x_0+iy_0}$ לכל y_0 בעצם מכסים חלק מהמרחב והיות ו y_0 היא ה-$\arg$ אז באמת 2π היא התחום היסודי כי הרי מחזור 2π מעתיק לאותה נקודה.

ואם ניקח x_0 קבוע ו-y משתנה

$$\exp(x_0 + iy) = e^{x_0}(\cos y + i \sin y)$$

וקיבלנו נקודות משתנות על מעגל ברדיוס e^{x_0} קבוע. זה מסתדר עם שימור זוויות: העתקה קונ-פורמית, הישרים $L_1 \perp L_2$ ולכן גם העתקה שלהם משמרת זווית.

שאלה מה נצפה מהפונקציה האקספונציונלית?

(א) שלמה
(ב) $z, w \in \mathbb{C}, f(z+w) = f(z) f(w)$
(ג) $f|_{\mathbb{R}} = e^x$

אזי ניתן להוכיח $f(x) = \exp(z)$

בפרט נניח שהוכחנו את התכונות הללו

$$\begin{aligned} f(\overline{z}) &= \overline{f(z)} \\ |f(z)| &= \sqrt{f(z)\overline{f(z)}} = \sqrt{f(z) f(\overline{z})} =^{(2)} \sqrt{f(z+\overline{z})} = \sqrt{f(2\Re z)} \\ &=^{(3)} \sqrt{e^{2\Re z}} = e^x \\ \Rightarrow f(x+iy) &= e^x(\cos\theta + i \sin\theta) \end{aligned}$$

צ"ל $\theta = y$ ע"י שימוש בקושי רימן

3. פונקציות טריגונומטריות

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}, e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x + i \sin x \\ \Rightarrow \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned}$$

נגדיר את $\cos z, \sin z$

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ e^{iz} &= e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) \end{aligned}$$

תכונות

(א) $\cos z|_{\mathbb{R}} = \cos x, \sin z|_{\mathbb{R}} = \sin x$

(ב) $\sin z, \cos z$ שלמות

(ג) $\cos z$ זוגית, $\sin z$ אי-זוגית

(ד) $2\pi k$ מחזוריות

(ה) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(ו) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

נראה ש $-\frac{\pi}{2} \le x < \frac{\pi}{2}, w = x+iy$ אז $f(w)$ פורש את כל $\mathbb{C}$. נשתמש באי-זוגיות $\sin(-z) = -\sin(z)$ וגם $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos(z)$ אז בקו $x = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \sin(w) &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\cos(iy) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{2} + iy\right) = \frac{e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+iy\right)} - e^{-i\left(-\frac{\pi}{2}+iy\right)}}{2i} = \frac{e^{-y}e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{y}e^{i\frac{\pi}{2}}}{2i} \ge 1 \in R \end{aligned}$$

באותו אופן בקו $x = \frac{\pi}{2}$ נקבל ערכים על $x < 1$ ממשים נבחר נקודה באמצע $z = i$ ונגלה שהוא בתחום העליון של המישור ובגלל את החצי השני נקבל מאי-הזוגיות בפונקציה ומהסימטריה שלה נקבל: שבתחום שמסומן $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$ בעל תחום יסודי.

הערה בהמשך בציר x נקבל אינסוף מכפילים של המישור.

קונפורמיות יש לזכור כי הקונפורמיות בנקודה ש $f^{'}(z) = \sin^{'} z = 0$ כלומר $\cos z = 0$ ב$x = \pm\frac{\pi}{2}$ ובאמת בקצוות התחום שהגדרנו לא נשמרות זוויות.

הערה קיבלנו

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\sin x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\cos x \\ &= \cosh y \sin x + i \sinh y \cos x \\ \cos z &= \frac{e^y + e^{-y}}{2}\cos x + i\frac{e^y - e^{-y}}{2}\sin x \\ &= \cosh y \cos x - i \sinh y \sin x \end{aligned}$$

הערה $\cosh, \sinh$ אינן חסומות $\Leftarrow$ $\sin z, \cos z$ אינן חסומות. בפרט ל $\sin z = z$ יש אינסוף פתרונות. (בגלל שיש אינסוף תחומים חופפים במישור)

הערה

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \\ \cosh t &= 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \\ \sin t &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \\ \sinh t &= t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \end{aligned}$$

הערה

$$\begin{aligned} \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \Rightarrow \cosh z &= \cosh iz \\ \sinh z &= -\sinh iz \end{aligned}$$

2.5 העתקות אלמנטריות הפוכות

1. $\sqrt[n]{z}=(z^n)^{-1}$ פונקציה רב-ערכית (מולטי-פנקשן) n ערכית

$$
\begin{aligned}
z &= \rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\\
z &= e^{\rho}e^{i\theta}\\
\Rightarrow \sqrt[n]{z} &= \left\{\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)|k\in\mathbb{Z}\right\}
\end{aligned}
$$

לדוגמא $z=1,\sqrt{z}=\{1,-1\}$ כאשר $\sqrt{z}=1$ הענף $k=0$ ולכן אם נבחר את הענף הראשי אז יש רק פתרון אחד למשל

$$
\begin{aligned}
az^2+bz+c &= 0\\
z &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

כאן יש z אחד בלבד ע"פ הגדרה וזו פונקציה דו-ערכית

הערה $-\pi<Argz\leq\pi$ כך הגדרנו את הטווח כדי שנוכל לבחור בשורש את הענף החיובי. לו היינו מגדירים למשל $0\leq Argz<2\pi$ אז $\sqrt{1}=-1$

2. $w=\log z$ כאשר

$$
\begin{aligned}
\log z &= \ln|z|+i\arg z\\
&= \ln|z|+i\left(Argz+2k\pi\right)
\end{aligned}
$$

לכן זאת פונקציה רב(∞) ערכית. עבור $k=0$ כלומר עבור הענף העיקרי של $\arg z$ נקבל את הענף העיקרי של $\log z$ ונסמן אותו ב- $Logz$.

הערה $e^{\log z}=z$

דוגמא

$$
\begin{aligned}
\log 1 &= \log|1|+i\left(Arg1+2k\pi\right)\\
&= 0+i2k\pi;k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

(כאן $k=0$ ולכן $Log1=\ln 1$)

הערה

$$
Log\left(z\zeta\right) \neq Logz+Log\zeta
$$

דוגמא נגדית יהיו $z=-1,\zeta=i$ אז

$$
\begin{aligned}
Logz &= ln\left|-1\right|+iArg\left(-1\right)\\
&= +\pi i\\
Logi &= ln\left|i\right|+iArg\left(i\right)\\
&= i\frac{\pi}{2}\\
\Rightarrow Logz+Log\zeta &= \frac{3\pi i}{2}\\
z\zeta &= -i\\
Log\left(z+\zeta\right) &= \ln\left|-i\right|+iArg\left(-i\right)\\
&= -i\frac{\pi}{2}\neq\frac{3\pi i}{2}=Logz+Log\zeta
\end{aligned}
$$

אבל

$$\forall z,\zeta\in\mathbb{C},\log\left(z\zeta\right) = \log z+\log\zeta$$

הערה בכל תחום של חד-ערכיות $\left(\log z\right)^{'}=\frac{1}{z}$

3. **פונקציה חזקה** $\alpha\in\mathbb{C},z^{\alpha}=\left(e^{\log z}\right)^{\alpha}=e^{\alpha\log z}$

דוגמא $i^{i}=e^{i\log i}=e^{i(ln|i|+iargi)}=e^{i\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$

4. $z=\arcsin w$ אז

$$\begin{aligned}\sin z &= w\\ w &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\ \Leftrightarrow w &= \frac{e^{iz}-\frac{1}{e^{iz}}}{2i}\\ e^{2iz}-2iwe^{iz}-1 &= 0\\ e^{iz} &= \zeta\\ \zeta^{2}-2iw\zeta-1 &= 0\end{aligned}$$

ומכאן ש-

$$\zeta = iw+\sqrt{1-w^{2}}$$

כאשר $\sqrt{1-w^{2}}$ פונקציה מורכבת ולכן דו-ערכית

$$\begin{aligned}e^{iz} &= iw+\sqrt{1-w^{2}}\\ iz &= \log\left(iw+\sqrt{1-w^{2}}\right)\\ z &= -i\log\left(iw+\sqrt{1-w^{2}}\right)\end{aligned}$$

ה$\log$ הוא פונקציה רב ערכית כלומר יש שתי משפחות של פתרונות (לפי השורש)

3 העתקות Mobius

העתקת Mobius (בי-ליניארית) היינה העתקה מהצורה $w=\frac{az+b}{cz+d}$, $\begin{cases}\forall z\in\mathbb{C}\\ z\neq-\frac{d}{c}\end{cases}$, $\begin{cases}a,b,c,d\in\mathbb{C}\\ ab-bc\neq0\end{cases}$

הערה $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=A_{w}$ $w\leftrightarrow$ ז"א $detA_{w}\neq0$ וגם $w_{2}w_{1}\Leftrightarrow A_{w_{1}}A_{w_{2}}$

הערה $w^{'}\left(z\right)=\frac{ab-bc}{(cz+d)}$ ז"א העתקת Mobuis היא קונפורמית.

הערה w היא Mobuis $\Leftrightarrow w$ חח"ע

הוכחה נניח ש

$$\begin{aligned}w\left(z\right) &= w\left(\zeta\right)\\ \Leftrightarrow\frac{az+b}{cz+d} &= \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}\\ \Leftrightarrow\left(az+b\right)\left(c\zeta+d\right) &= \left(a\zeta+b\right)\left(cz+d\right)\\ \Leftrightarrow bc\zeta+adz &= bcz+ad\zeta\\ \Leftrightarrow\left(ab-cd\right)z &= \left(ab-cd\right)\zeta\\ \left(ab-cd\right)\neq0\Rightarrow z &= \zeta\end{aligned}$$

ז"א w חח"ע

מסקנה w^{-1} קיימת $A_w^{-1} \leftarrow w^{-1}$

מסקנה w היא על $\zeta = \frac{az+b}{cz+d}$

הערה $\infty \rightarrow_{z\rightarrow -\frac{d}{c}} w(z)$ וגם $\begin{cases} \frac{a}{c} & c\neq 0 \\ \infty & c=0 \end{cases} \rightarrow_{z\rightarrow\infty} w(z)$ ואז נגדיר על הספירה $w(-\frac{d}{c}) = \infty$, $w(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & c\neq 0 \\ \infty & c=0 \end{cases}$

מסקנה העתקת Mebuis על הספירה

$$w : \hat{\mathbb{C}} \mapsto \hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

מסקנה w העתקה חח"ע+על של $\hat{\mathbb{C}}$ על $\hat{\mathbb{C}}$+קונפורמית (בכל הנקודות הסופיות)

הערה לכל העתקת Mobius יש לכל היותר 2 נקודות שבת

הוכחה

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= z \\ \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b &= 0 \end{aligned}$$

הערה ניתן להציג את ההעתקה כך

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)} \\ w_1 &= z + \frac{d}{c} \\ w_2 &= c^2 w_1 \\ w_3 &= \frac{1}{w_2} \\ w_4 &= (bc-ad)\, w_3 \\ w_5 &= \frac{a}{c} + w_4 \end{aligned}$$

אזי $w = w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1$. w_5, w_1 הם הזזות. w_4, w_5 מתיחה וסיבוב. w_3 שיקוף למעגל היחידה+היפוך או שיקוף בספירה. לכן יש מסקנה שהיא משפט

משפט העתקת Mobius מעתיקה ישרים+ומעגלים על ישרים+מעגלים.

הערה ניתן להוכיח זאת גם ע"י חישוב ישיר. כלומר לרשום מעגל מוכלל בעזרת המשוואה

$$(B\in\mathbb{C}; A, C\in\mathbb{R}) \Rightarrow Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0$$

ולחשב את $w(\gamma)$

היחס הכפול בהינתן הנקודות z, z_1, z_2, z_3 בסדר זה היחס הכפול (Cross-ratio) שלהן מוגדר ע"י

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

אז $w(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ הנה העתקת Mobius כך ש

$$\begin{aligned} w(z_1) &= 0 \\ w(z_2) &= 1 \\ w(z_3) &= \infty \end{aligned}$$

משפט (הוכחנו) קיימת העתקת Mobius המעתיקה את הנקודות z_1, z_2, z_3 בסדר זה על $0, 1, \infty$ בהתאמה. כלומר ניתן להעתיק כל מעגל על כך ש-3 נקודות נתונות יעברו ל ∞

הערה העתקת Mobius המעתיקה z_1, z_2, z_3 בהתאמה על $0, 1, \infty$ הנה יחידה

הוכחה נניח בשלילה שקיימות v, w Mobius כך ש

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) &\mapsto^V (0, 1, \infty) \\ (z_1, z_2, z_3) &\mapsto^w (0, 1, \infty) \end{aligned}$$

אזי $u = w^{-1} \circ v$ הנה Mobius ובנוסף

$$\begin{aligned} u(z_1) &= z_1 \\ u(z_2) &= z_2 \\ u(z_3) &= z_3 \end{aligned}$$

ז"א ל-u 3 נקודות שבט $\Leftrightarrow u = I$

דוגמאות מצא את כל העתקות Mobius המעתיקות את $\mathbb{H}_+ \mapsto \mathbb{H}_+$ כאשר $\mathbb{H}_+ = \{z | \Im z > 0\}$ בתחום אנליטי נדרוש שהשפה והמגמה ישמרו. לכן מספיק $\partial\mathbb{H}_+ = \mathbb{R}$ ישמר והמגמה תישמר. מספיק למצוא את העתקות Mobius כך ש $x_1, x_2, x_3 \mapsto 0, 1, \infty$ וגם $x_1 < x_2 < x_3$ אז

$$\begin{aligned} w &= \frac{z - x_1}{z - x_3} \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} \\ w(z) &= \frac{(x_2 - x_3) z - x_1 (x_2 - x_3)}{(x_2 - x_1) z - x_3 (x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

כלומר w הנה מהצורה

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

כאשר

1. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$
2. נחשב דטרמיננטה

$$\begin{aligned} \Delta(w) &= -x_3 (x_2 - x_3)(x_2 - x_1) + x_1 (x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \\ &= (x_2 - x_3)(x_2 - x_1)(x_1 - x_3) > 0 \end{aligned}$$

כלומר נדרוש $\Delta > 0$

הערה אם $\Delta(\omega) < 0$ אזי $w(\mathbb{H}_+) = \mathbb{H}_-$

הערה ניתן להחליף את התנאי השני בכך ש $\Im w(i) > 0$

הערות (לגבי היחס בכפול)

1. קיימת העתקת Mobius אחת ויחידה w, כך ש $(z_1, z_2, z_3) \mapsto (w_1, w_2, w_3)$ אפשר למצוא את w ע"י

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

2. יחס כפול $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ אם"ם z_1, z_2, z_3, z_4 על ישר או מעגל
3. העתקות Mobius שומרות על היחס הכפול.
4. אזי Mobius מעבירות מעגלים מוכללים על מעגלים מוכללים.

3.1 סימטריה (היפוך)

קיימת z^* אחת ויחידה, על הקרן $\vec{OZ}$ (ע"פ זהות גאומטרית) כך ש

$$Oz^*Oz = R^2$$

z^* נקראת הנקודה הסימטרית של z יחסית למעגל γ (או החיתוך של z ב-γ)

הערה היפוך שומר על זוויות (אך הופכת מגמה)

הערה

1. $z \in Ext\gamma \Leftrightarrow z^* \in Int\gamma$
2. $z \in \gamma \Leftrightarrow z = z^*$
3. $(z^*)^* = z$

הערה $0^* = \infty$ וגם $\infty^* = 0^*$

הערה $R \to \infty$ אזי γ שואף לישר. והיפוך שואף לשיקוף בישר.

משפט העתקות Mobuis שומרות על נקודות היפוך ז"א אם

$$\begin{aligned} w(\gamma) &= \xi \\ \vee Inv_\gamma(z) &= z^* \\ \vee w(z) &= w \\ \Rightarrow w^* &= w(z^*) \end{aligned}$$

דוגמא מצא את כל העתקות Mobuis מ-$\mathbb{H}_+$ על $\Delta = \{z | |z| < 1\}$

פתרון מחפשים w מהצורה $w = \frac{az+b}{cz+d}$. קיימת $z_0 \in \mathbb{H}_+$ כך ש $w(z_0) = 0$. ז"א

$$w = \frac{a_1 z - z_0}{cz + d}$$

אך w היא Mobuis לכן w שומרת על נקודות אינוורסיה ז"א $w(z_0^*) = 0^*$ קיבלנו $w(\overline{z_0}) = \infty$
לכן $w(z) = C\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ כדי לסיים יש לקבוע את C. נשתמש בעובדה ש $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}_+$ מועתק על $s' = \partial\Delta$ בפרט $o \in R$ עוברת ל- $w_0 \in s'$ ז"א

$$\begin{aligned} |w(0)| &= 1 \\ \Leftrightarrow \left| C\frac{z_0}{\overline{z_0}} \right| &= 1 \\ \Leftrightarrow |C| \left| \frac{z_0}{\overline{z_0}} \right| &= 1 \\ \Leftrightarrow |C| &= 1 \end{aligned}$$

קיבלנו

$$w = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$$

כאשר $\Im z_0 > 0, \theta \in [0, 2\pi]$

4 האינטגרל הקומפלקסי

הגדרה $f:[a,b]\mapsto\mathbb{C}$ **רציפה** $[a.b]\subseteq\mathbb{R}$. **אז** $f=u+iv,\int_a^b f(t)=\int_a^b u(t)\,dt+i\int_a^b v(t)\,dt$

תכונות

1. ליניאריות
   (א) $\int(f+g)=\int f+\int g$
   (ב) $\int\lambda f=\lambda\int f$
2. אי שוויון המשולש $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\int_a^b|f(t)|\,dt$
3. אינטגרל לאורך עקום $\int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(z(t))\,z^{'}(t)\,dt$

טענה $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|\leq M\ell(\gamma)$ **כאשר** $M=\sup_{z\in\gamma}|f(z)|$ **ו** $\ell(\gamma)$ **האורך של** γ

הוכחה

$$\begin{aligned}\left|\int f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^L f(z(t))\,z^{'}(t)\,dt\right|\\ &\leq \int_a^L|f(z(t))|\left|z^{'}(t)\right|dt\\ &\leq M\int_a^L\left|z^{'}(t)\right|dt\\ &= M\ell(\gamma)\end{aligned}$$

דוגמאות

1. $\int_1^i\frac{dz}{z^4}\leq4\sqrt{2}$
   פתרון מדובר באינטגרל על הקטע $[1,i]$.

$$\begin{aligned}\left|\int_1^i\frac{dz}{z^4}\right| &\leq M\ell([1,i])\\ &= \sup_{z\in[1,i]}\left|\frac{1}{z^4}\right|\sqrt{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\inf_{z\in[1,i]}|z^4|}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\left(\inf_{z\in[1,i]}|z|\right)^4}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4}=\left(\sqrt{2}\right)^4\sqrt{2}=2\sqrt{4}\end{aligned}$$

2. $\left|\int_{|z|=R}\frac{\log z}{z^2}dz\right|\leq2\pi\frac{\pi+\ln R}{R}$

פתרון

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R}\frac{\log z}{z^2}dz\right| &\leq 2\pi R\sup_{|z|=R}\left|\frac{\log z}{z^2}\right|\\ &= 2\pi R\sup_{|z|=R}\frac{|\log z|}{|z^2|}\\ &= \frac{2\pi}{R}\sup_{|z|=R}|\log z|\\ &= \frac{2\pi}{R}\sup_{|z|=R}|\ln|z|+iArgz|\\ &= \frac{2\pi}{R}\sup_{|z|=R}|\ln R+iArgz|\\ &\leq \frac{2\pi}{R}\left(\ln R+\sup_{|z|=R}|Argz|\right)\\ &= \frac{2\pi}{R}(\ln R+\pi)\end{aligned}$$

3. חשב $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z}$

פתרון

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi}\frac{dz(\theta)}{z(\theta)}\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}}\\ &= \int_0^{2\pi}id\theta=2\pi i\end{aligned}$$

משפט Cauchy-Goursat יהי Ω תחום פשוט קשר, ותהי $f:\Omega\mapsto\nleq$. f אנליטית ב-Ω ורציפה על $\gamma=\partial\Omega$ אזי

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

הוכחה משפט גרין (על שדה משמר)

הערה אפשר להרחיב את משפט Cauchy-Goursat גם על תחומים שאינם פשוטי קשר.

משפט Cauchy-Goursat (גרסה חזקה) אפשר להרכיב את התנאי ש-f' רציפה ב-Ω

תרגיל חשב $\int_\gamma\frac{(z+1)^3\sin\left(ze^{z^2+z+1}\right)}{z^{17}}$ לפי מסלול סגור. זאת פונקציה אנליטית לכן $\int_\gamma=0$.

משפט אם Ω תחום פשוט קשר, ואם $f:\Omega\mapsto\mathbb{C}$ אנליטית. אזי קיימת F אנליטית ב-Ω, כך ש $F'=f$

הוכחה נגדיר $F(z)=\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ כך ש $\gamma=[z_0,z]$. צריך לבדוק יחידות כלומר איננה תלויה בבחירת γ. אזי יהיו γ_1,γ_2 מסלולים מ-z_0 ל-z אזי $\gamma=\gamma_2^{-1}\circ\gamma_3$ הנו מסלול פשוט, שבו $\int_\gamma f=0$ ז"א $\int_{\gamma_1}f=\int_{\gamma_2}f$

הערה אם התחום איננו פשוט קשר, אז המשפט הנ"ל איננו נכון

דוגמא נגדית $\frac{1}{2}\left(\Omega=\mathbb{R}\backslash\{0\}\right)$

משפט Ω תחום ואם f רציפה ב-Ω, ואם קיימת פונקציה חד-ערכית F, כך ש $F^{'}=f$ אזי $\int_{\gamma}f=0$ לכל עקומה פשוטה סגורה

משפט Morera תהי f רציפה בתחום Ω כך ש $\int_{T}f\left(z\right)dz=0$, על כל משולש $T\subset\Omega$ אזי ל-f יש פונקציה קדומה (ב-Ω)

הוכחה (ממש) תהי z_0 נק' ב-Ω אזי קיים $r>0$ כך ש $D_r\left(z_0\right)=\{z|\,|z-z_0|<r\}\subset\Omega$.
נוכיח שקיימת $F\left(x\right)$ עבור כל $z\in D_r\left(z_0\right)$. תהי $z\in D_r\left(z_0\right)$ נגדיר $F\left(z\right)=\int_{z_0}^{z}f\left(\zeta\right)d\zeta$ אזי נוכיח

1. $F\left(\alpha\right)$ אנליטית וגזירה
2. $F^{'}=f$

אכן

$$\begin{aligned}\begin{matrix}h\in\mathbb{C}\\|h|\ll r\end{matrix}\ ,F\left(z+h\right)-F\left(z\right) &= \int_{z}^{z+h}f\left(\zeta\right)d\zeta\\ \Rightarrow\frac{F\left(z+h\right)-F\left(z\right)}{h}-f\left(z\right) &= \frac{\int_{z}^{z+h}f\left(\zeta\right)d\zeta}{h}-f\left(z\right)\\ &= \int_{z}^{z+h}\frac{f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)}{h}d\zeta\end{aligned}$$

אבל f רציפה ולכן עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $|z-\zeta|<\delta$ מתקיים $|f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)|<\varepsilon$ לכן עם $|h|<\delta$ נקבל

$$\begin{aligned}\int_{z}^{z+h}\frac{f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)}{h}d\zeta &\leq |h|\sup_{\zeta}\frac{|f\left(\zeta\right)-f\left(z\right)|}{|h|}\\ &= \frac{|h|}{|h|}\varepsilon=\varepsilon\end{aligned}$$