מספרים מרוכבים – הגדרות/זהויות

מספר מרוכב הצגה אלגברית $z = x + iy$

הצגה קוטבית $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

הצגה אקספוננציאלית $z = re^{i\varphi}$

חלק ממשי $x = \operatorname{Re} z$ חלק מדומה $y = \operatorname{Im} z$

מספר צמוד $\bar{z} = x - iy$

תנאי למספר ממשי $y = \operatorname{Im} z = 0$ או שקול לו $z = \bar{z}$

זהויות $\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \operatorname{Re} z$ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \operatorname{Im} z$ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

מודול/ערך מוחלט $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

זהויות $|z| = |\bar{z}|$ $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

אי-שוויון המשולש $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1 + z_2|$

ארגומנט המספר $\varphi = \arg z$ $\tan\varphi = \frac{x}{y}$

זהויות $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

נוסחת דה-מואבר $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

אם $w = \sqrt[n]{z}$ אז $w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$

כאשר $k = 0,1,\dots,n-1$

פונקציות מרוכבות

פונקצייה מרוכבת $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

תנאי קושי-רימן $C.R.$ $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ תנאים הכרחיים ולא מספיקים לגזירות של פונקצייה מרוכבת

תנאיי גזירות u,v דיפרינצ' ומתקיימים $C.R.$ בנק'.

או $\partial/\partial\bar{z}$ של הפונקציה המרוכבת מתאפסת.

פונקציה אנליטית אם קיימת סביבה של z_0 בה $f(z)$ גזירה בכל נק' אז $f(z)$ אנליטית בנק'.

חיבור,חיסור כפל, חילוק (המכנה לא מתאפס) והרכבה של פונקציות אנליטיות נותן פונקצייה אנליטית.

פונקציה שלמה אם $f(z)$ אנליטית בכל המישור.

גזירת פונקצ' אנליטית $f'(z) = u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y)$

פונקציה הרמונית פונקציה המקיימת את משוואת לפלס $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (משוואת לפלס לינארית)

הרמוניות צמודות אם $f(z) = u + iv$, u,v הרמוניות ומקיימות $C.R.$ אז הן הרמוניות צמודות.

אם"ם u,v הרמוניות צמודות אז f אנליטית.

מציאת פונק' אנליטית

1) אם $u(0,0)$ קיים אז $f(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0,0) + iC$

2) אם נתונים u,v אז $f(z) = u(z,0) + iv(z,0)$

נקודת הסתעפות נקודה שלאורך תנועה סביבה הערך ההתחלתי של פונקציה רב-ערכית משתנה.

פונקציות אלמנטריות

נוסחת אוילר $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

פונקציות טריגונו' $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$ $\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

זהויות $\sin z = -i\sinh(iz)$ $\cos z = \cosh(iz)$

$\sin z = \sin x \cdot \cosh y + i\cos x \cdot \sinh y$

$\cos z = \cos x \cdot \cosh y - i\sin x \cdot \sinh y$

$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

פונקציה מעריכית $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$

חד ערכית עבור $\alpha = n$ ובעל n ערכים עבור $\alpha = \frac{1}{n}$

הפונקציה מרחיבה/מכווצת זוויות פי n.

פונקציה לוגריתמית $\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$

חד ערכית בענפיה. נקודת הסתעפות בראשית.

כל ענף של הפונקציה מעתיקה קונפורמית (פרט לראשית) את המישור לרצועה מתאימה.

פונקצית האקספוננט $w = e^z$

מחזור $2\pi i$ ולכן חד-חד ערכית בכל רצועה באותו מחזור.

רצועה זאת הפונקציה תעתיק קונפורמית לגזרה טבעתית מתאימה (מנוקבת בראשית).

העתקות

פונקציה קונפורמית בנקודה z_0 אם $f'(z_0) \ne 0$

העתקה קונפורמית העתקה השומרת על זוויות.

העתקה לינארית העתקה חד-חד ערכית $w = az + b$

הזזה: $w = z + b$ הזזת התחום בוקטור b

סיבוב: $w = e^{\alpha i} z$ סיבוב התחום בזווית α

ניפוח: $w = r \cdot z$ הרחבה/כיווץ המישור

נקודות סימטרית נקודות המקיימות $(w - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$

כאשר a,R הם רדיוס ומרכז המעגל בהתאמה.

העתקת האינברסיה העתקה לא קונפורמית המעתיקה נקודה לנקודה סימטרית לה לגבי מעגל מסוים.

העתקת מביוס העתקה המוגדרת $w = \frac{az + b}{cz + d}$ $ad - bc \ne 0$.

קיימת העתקת מביוס יחידה המעתיקה שלוש נקודות.

$$\frac{w - w_1}{w - w_3}\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

האינטגרל המרוכב

האינטגרל מרוכב $\int_\Gamma f(z)dz=\int_\Gamma udx-vdy+i\int_\Gamma vdx+udy$

בצורה פרמטרית $\int_\Gamma f(z)dz=\int_a^b f(z(t))\cdot z'(t)dt$

פרמטריזציה- קטע: $z(t)=z_1+t(z_2-z_1)$ $\quad 0\le t\le 1$

מעגל: $z(\theta)=z_0+re^{i\theta}$ $\quad 0\le\theta\le 2\pi$

הערכת האינטגרל: $\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\le \max_\Gamma|f(z)|\cdot L_\Gamma$

משפט קושי אם $f(z)$ אנליטית ב-D אז $\int_{\partial D} f(z)dz=0$

נוסחת קושי $|z_0|<R \quad f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$

$|z_0|<R \quad f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

משפט מוררה אם $f(z)$ רציפה ב-D ו- $\int_\Gamma f(z)dz=0$ לכל עקום סגור Γ אזי f אנליטית ב-D.

עקרון האקסטרמום פונקציה אנליטית ב-D תקבל את ערכיה האקסטרמליים על שפת התחום.

משפט ליאוביל פונקציה שלמה וחסומה במישור– קבועה.

טורי טיילור ולורן

טור טיילור אם $f(z)$ אנליטית בעיגול מסוים סביב z_0 ניתן לפתחה ל- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ המתכנס במ"ש

טורים חשובים $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$

רדיוס ההתכנסות של טור $R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

נוסחת קושי-אדמר $R=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$

הרדיוס הוא גם המרחק מ- z_0 עד לנק' הסינגולרית הקרובה ביותר.

טור לורן אם $f(z)$ אנליטית בעיגול מסוים סביב z_0 ניתן לפתחה ל- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ המתכנס במ"ש.

החלק העיקרי של הטור הוא החלק עם החזקות השליליות.

חישוב אינטגרלים ממשיים (המשך)

אינטגרלים טריגונומטריים

$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ עבור $|a|>|b|$

משפט השארית

אפס מסדר n a הוא אפס מסדר n של $f(z)$ אם $f(a)=f'(a)=..=f^{(n-1)}(a)=0 \quad f^{(n)}\neq 0$

קוטב מסדר n z_0 הוא קוטב מסדר n של $f(z)$ אם $g(z_0)\neq 0$ אנליטית ו- $f(z)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$

נקודה עיקרית החלק העיקרי בטור לורן אינסופי. הגבול $\lim_{z\to z_0}f(z)$ לא קיים.

נקודה סליקה החלק העיקרי של טור לורן ריק ומתקיים $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

משפט היחידות קיימת $f(z)$ אנליטית יחידה המקבלת את כל הערכים של הסדרה המתכנסת $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ בתחום D.

שארית/רסידיום מקדם c_{-1} של טור לורן סביב הנק' a של $f(z)$, $res(f,a)=c_{-1}$.

חישוב השארית קוטב פשוט: $c_{-1}=\lim_{z\to a}(z-a)\cdot f(z)$

אם $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ ו- $g(z_0)\neq 0$ אז $c_{-1}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

קוטב מסדר n: $c_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}[(z-a)^n f(z)]^{(n-1)}$

משפט השארית אם $f(z)$ אנליטית ב-D פרט למס' סופי של נק' $\oint_\Gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{j=1}^{n}res(f,a_j)$

משפט רושה אם $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות ב-D ועל שפת D מתקיים $|f(z)|>|g(z)|$ כאשר $f(z)\neq 0$ אזי ל- $f(z)$ ול- $f(z)+g(z)$ אותו מספר אפסים ב-D.

פונקציה מרומורפית פונק' אנליטית שכל נק' הסינגולריות קטבים

עקרון הארגומנט אם $f(z)$ מרומורפית בתחום D ואין אפסים וקטבים על השפה: $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P$

כאשר N מספר האפסים ו-P מספר הקטבים כולל ריבוי.

חישוב אינטגרלים ממשיים

אינטגרלים מוכללים אם $f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ וכן $m\geq n+2$

ויהיו $z_1,z_2,..,z_k$ קטבי $f(x)$ בחצי המישור העליון אז:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{j=1}^{k}res(f,z_j)$$

אינטגרלים טריגונומטריים נשתמש בפרמטריזציה:

1) $z=e^{i\theta}$ ואז $dz=izd\theta$

2) נציב $\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \quad \sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$

3) נחשב $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{iz}dz$