טורי פוריה: שיטה לקירוב פונקציה באמצעות טורים. כלומר, במקום פונקציה ניעזר (נשתמש) בסדרות של מספרים.

הקדמה: אלגברה לינארית

הגדרה: V קבוצה לא ריקה תקרא **מרחב לינארי** (מ"ל) מעל שדה F אם מתקיים:

1. $u+v\in V \Leftarrow u,v\in V$
2. $(u+v)+w=u+(v+w)\in V \Leftarrow u,v,w\in V$
3. קיים $\vec{0}\in V$ כך ש: לכל $v\in V$, $\vec{0}+v=v+\vec{0}=v$
4. לכל $v\in V$ קיים $-v\in V$ כך שמתקיים: $v+(-v)=(-v)+v=0$
5. כפל בסקלר: $\alpha v\in V \Leftarrow v\in V,\alpha\in F$
6. חילופיות 1: $u+v=v+u \Leftarrow u,v,\in V$
7. פילוג 1: $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v \Leftarrow \alpha\in F,u,v\in V$
8. פילוג 2: $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u \Leftarrow \alpha,\beta\in F,u\in V$
9. חילופיות 2: $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u \Leftarrow \alpha,\beta\in F,u\in U$
10. עבור $1\in F$ (קיים כזה כי F שדה) מתקיים: לכל $v,v\in V$ $1_F\cdot v=v$.

הגדרה: בהינתן V מ"ל, נאמר כי $W\subseteq V$ הוא **תת מרחב לינארי** של V אם W הוא בעצמו תת מרחב.

- על מנת **לבדוק אם** W **ת"מ**, מספיק לבדוק:
  - $w\neq\varnothing$
  - סגירות לחיבור
  - סגירות לכפל בסקלר.

הגדרה: יהא V מ"ל מעל שדה F. **נורמה** ב- V היא העתקה $\|\cdot\|:v\to\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ המקיימת:

1. $v=0\Leftrightarrow\|V\|=0$,$\|V\|\geq 0\Leftarrow v\in V$
2. $|\alpha|\|v\|=\|\alpha v\|\Leftarrow\alpha\in F,v\in V$
3. אי שיוויון המשולש: $\|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$

- נורמה המוגדרת **באמצעות פונקצית משקל**: $\|f\|_{x^2}=\left(\int_a^b|f|^2x^2dx\right)$
- **מרחק בין 2 וקטורים**: לכל $u,v\in V$, נוכל להסתכל על $\|u-v\|$ כעל מרחק ב- V.

  הגדרה: **מרחק בין וקטורים** (הגדרה מדוייקת): פונקציה המקיימת:
- $\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|=\|\mathrm{v}-\mathrm{u}\|$
- $\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|\geq 0$, $\|\mathrm{u}-\mathrm{v}\|=0\ \Leftrightarrow\ \mathrm{u}=\mathrm{v}$.

* אי שיוויון המשולש: $\|u-v\| \le \|u-w\|+\|w-v\|$

* **מרחק בין וקטור לבין ת"מ**: יהא $W \subseteq V$ ת"מ, $v \in V$. אז נגדיר: $d(v,W)=\inf\{\|v-w\|: w\in W\}$
* יהא $W \subseteq V$ ת"מ, $v \in V$. $\tilde{w}\in W$ מהווה את **הקירוב הטוב ביותר** ל- v אם מתקיים: $\|v-\tilde{w}\|=\inf\{\|v-w\|: w\in W\}$.

הגדרה: יהא v מ"ל נורמי. יהא $v \in V$ כך שקיימת סדרה אינסופית של וקטורים $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in V$ המקיימת: $\lim_{n\to\infty}\|v-v_n\|=0$.

במקרה כזה, אומרים שיש **התכנסות בנורמה**.

הגדרה: יהא V מ"ל מעל F. **מכפלה פנימית** היא פעולה $\langle,\rangle: V^2 \to F$ המקיימת:

1. לכל $v\in V$, $\langle v,v\rangle \in \mathbb{R}$.
2. לכל $v \in V$, $\langle v,v\rangle \ge 0$, ו- $\langle v,v\rangle=0 \Leftrightarrow v=0$.
3. ליניאריות בגורם הראשון: $\alpha,\beta\in F, u,v,w\in V \Rightarrow \langle \alpha u+\beta v,w\rangle=\alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$
4. לכל $u,v\in V$, $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.

מסקנות:

1. עבור $F=\mathbb{R}$, נקבל: $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}=\langle v,u\rangle$.
2. $\langle u,\alpha v+\beta w\rangle=\overline{\langle \alpha v+\beta w,u\rangle}=\overline{\langle \alpha v,u\rangle}+\overline{\langle \beta w,u\rangle}=\bar{\alpha}\overline{\langle v,u\rangle}+\bar{\beta}\overline{\langle w,u\rangle}=\bar{\alpha}\langle u,v\rangle+\bar{\beta}\langle u,v\rangle$

* בהינתן מכ"פ נוכל להגדיר באמצעותה **נורמה מושרית**, באופן הבא: $\|v\|=\sqrt{|\langle v,v\rangle|}$

מערכות אורתוגונליות ואורתונורמליות

הגדרות:

1. יהא V ממכ"פ, $u,v\in V$. אם $\langle u,v\rangle=0$ אז אומרים ש- u **אורתוגונלי (א"ג) ל-** v, ומסמנים: $\boxed{u \perp v}$.
2. יהיו $\{u_k\}_{k=1}^{n} \in V$ כך ש- $\|u_k\| \ne 0$ לכל k. אם $\langle u_j,u_k\rangle=0$ לכל $1\le j<k\le n$, אז אומרים שהקבוצה $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ היא **מערכת אורתוגונלית**.
3. תהא $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ **מערכת א"ג** המקיימת: $\|u_k\|=1$ לכל k. אז אומרים ש- $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ היא מערכת אורתונורמלית.

   הערה: ניתן להפוך כל מעי' א"ג למעי' א"נ ע"י **נרמול**: $u_k \to e_k=\frac{u_k}{\|u_k\|}$
4. אם $V=sp\{u_1,u_2...u_n\}$ אז אומרים ש- V **נפרש על ידי** $\{u_1,u_2...u_n\}$.

טענות:

1. כל מעי' **א"ג** היא **בת"ל**.

2. יהא V ממכ"פ, $\{e_k\} \in V$ קב' **א"נ**. אזי: $\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

3. יהא $v \in V$ כך שמתקיים: $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n$. אזי: $\boxed{a_k = \langle v, e_k \rangle}$ לכל k.

$\Leftarrow$ **מסקנה**: $V = \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle \cdot e_k$

המקדם $\langle v, e_k \rangle$ נקרא **מקדם פוריה מוכלל**.

משפט פיתגורס המוכלל:

1. תהא $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ מערכת **א"ג**. אזי: $\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \|u_k\|^2$.

2. תהא $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ מערכת **א"נ**, ויהא $u = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$.

אזי: $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \langle u, e_k \rangle^2 \right| \left(= \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right)$

היטלים אורתוגונלים

יהא V ממכ"פ, $\{e_k\}_{k=1}^{n} \in V$. נסמן: $W = sp\{e_k\}_{k=1}^{n}$. ויהא $u \in V$ כלשהו.

הוקטור: $\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$ נמצא כמובן ב- w ונקרא **ההיטל של הוקטור u על תת המרחב W**.

טענות:

1. $u - \tilde{u}$ א"ג לכל $w \in W$.

2. לכל $w \in W$ מתקיים: $\|u - w\|^2 = \|u - \tilde{u}\|^2 + \|\tilde{u} - w\|^2$.

משפט:

יהא V ממכ"פ, $\{e_k\}_{k=1}^{n} \subseteq V$ מע' א"נ. נסמן: $W = sp\{e_k\}_{k=1}^{n}$.

יהא $u \in V$. נסמן: $\tilde{u} = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle e_k$

אזי: $\dim(u, W) = \|u - \tilde{u}\|$, ו- $\tilde{u}$ הינו הוקטור **היחיד** המקיים זאת (המהווה את **הקירוב הטוב ביותר**).

מערכות א"נ, אינסופיות, מערכת סגורה

עבור V **ממכ"פ**, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq V$ מע' **א"נ אינסופית** של וקטורים, $\|\cdot\|$ נורמה מושרית ווקטור $u \in V$ כלשהו מתקיים:

1. **אי-שיוויון בסל**: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle u,e_k\right\rangle\right|^2 \le \|u\|^2}$

2. **הלמה של רימן-לבג**: $\boxed{\lim_{k\to\infty}\left\langle u,e_k\right\rangle = 0}$

הגדרות: יהא V ממכ"פ, $\|\cdot\|$ נורמה מושרית, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq V$ סידרה אינספית של וקטורים.

1. הסדרה $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq V$ **מתכנסת בנורמה** לוקטור $v\in V$ אם: $\lim_{m\to\infty}\|v-v_m\|=0$

2. תהא $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq \mathbb{C}$ סדרה אינסופית של מספרים מרוכבים. אומרים ש**הטור** $\sum_{m=1}^{\infty} a_m v_m$ **מתכנס לוקטור** $u\in V$ אם: $\lim_{n\to\infty}\left\|u-\sum_{m=1}^{n} a_m v_m\right\|=0$

3. **שיוויון פרסבל**: עבור $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq V$ מע' א"נ, $u\in V$ כלשהו: $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle u,e_k\right\rangle\right|^2 = \|u\|^2}$

- **הגדרה**: **מערכת סגורה**: יהא V ממכ"פ, $\|\cdot\|$ נורמה מושרית.

מערכת א"נ $\{e_k\}_{k=1}^{n}\subseteq V$ תקרא סגורה אם לכל $u\in V$ מתקיים:

$$\boxed{\lim_{m\to\infty}\left\|u-\sum_{k=1}^{m}\left\langle u,e_k\right\rangle e_k\right\|=0}$$

נשים לב ש: $\sum_{k=1}^{m}\left\langle u,e_k\right\rangle e_k$ = ההיטל של הוקטור u על $\{e_k\}_{k=1}^{m}$.

- **טענה**: (קריטריון נוסף לסגירות): $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq V$ מע' א"נ סגורה בממכ"פ V

אמ"מ מתקיים שיוויון פרסבל: $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left\langle u,e_k\right\rangle\right|^2 = \|u\|^2$

- **הגדרה**: מע' א"נ $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq V$ תקרא **שלמה** אם הוקטור יחיד המקיים את התנאי $\left\langle u,e_k\right\rangle=0$ לכל $k\in\mathbb{N}$ הינו וקטור האפס.

- **טענה**: מערכת **סגורה** היא **שלמה**.

- **שיוויון פרסבל המוכלל**: יהא V ממכ"פ, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq V$ מע' א"נ סגורה. יהיו $u,v\in V$. נסמן:

$b_k=\left\langle v,e_k\right\rangle$, $a_k=\left\langle u,e_k\right\rangle$ לכל $k\in\mathbb{N}$.

אזי: $\boxed{\left\langle u,v\right\rangle=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\overline{b_k}}$

<u>אינטגרלים חשובים</u>:

אורתוגונליות של מערכות:

- $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \pi & n=m\end{cases}$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)dx=0$$
- ***<u>בצורה דומה</u>***:
- $$\int_{-l}^{l}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx=\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ l & n=m\end{cases}$$
- $$\int_{-l}^{l}\sin(\frac{n\pi x}{l})\cos(\frac{m\pi x}{l})dx=0$$
- $$\int_{a}^{b}\sin\left(\frac{2n\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)\sin\left(\frac{2m\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)dx=$$
$$=\int_{a}^{b}\cos\left(\frac{2n\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)\cos\left(\frac{2m\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{b-a}{2} & n=m\end{cases}$$
- $$\int_{a}^{b}\sin\left(\frac{2n\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)\cos\left(\frac{2m\pi\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{b-a}\right)dx=0$$

חישובים נוספים:

- $$\int_{0}^{\pi}x\cdot\sin(nx)dx=\frac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\sin(nx)dx=0$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cdot\cos(nx)dx=\begin{cases}-\frac{4}{n^2} & n=2k+1\\ 0 & n=2k\end{cases}$$
- נסמן: $\chi_{[-\pi,p]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-\pi,p]\\ 0 & x\in(p,\pi]\end{cases}$ עבור $-\pi<p<\pi$ כלשהו. ואז, האינטגרל הבא יתן לנו:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[-\pi,p]}(x)\cdot e^{-inx}dx=\frac{e^{inp}}{n}-i\frac{(-1)^n}{n}$$

סכומים חשובים:

- $$\sum_{n=1}^{N}\sin(nx)=\begin{cases}0 & x=2\pi k\\ \dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & x\neq 2\pi k\end{cases}$$
- $$\sum_{n=1}^{N}n\cdot\cos(nx)=\begin{cases}\dfrac{N(N+1)}{2} & x=2\pi k\\ \dfrac{-1+(N+1)\cos(Nx)-\cos N((N+1)x)}{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} & x\neq 2\pi k\end{cases}$$

טורי פוריה

<u>**סימון**</u>: $\boxed{E[a,b]}$ = מרחב הפונקציות **המרוכבות** שהן **רציפות למקוטעין** בקטע $[a,b]$.

- יש **מספר סופי** של נקודות אי רציפות.
- כל אי רציפות היא מסוג **קפיצה** (הגבולות החד-צדדיים **קיימים ושונים**).
- איברי המרחב אינן פונקציות, אלא **מחלקות שקילות**: $f\sim g$ אם הן שוות פרט למספר סופי של נקודות.

נגדיר על המרחב הנ"ל את **המכפלה הפנימית** הבאה: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$

ונשרה ממנה **נורמה**: $\|f\|^2=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b |f(x)|^2dx$

- כל הפונקציות המקיימות $\|f\|^2=0$ נמצאות באותה מחלקת שקילות. לכל נציגה של המחלקה נקרא <u>**פונקצית האפס**</u>.
- אם $f\sim g$ הן תקראנה **שוות בממוצע**.

נעסוק כעת **במרחב** $E[-\pi,\pi]$.

- **המכ"פ** במרחב זה: $\boxed{\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx}$.

- **הנורמה המושרית**: $\boxed{\|f\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx}$.
- **מע' א"נ** במרחב הנ"ל ביחס למכ"פ הנ"ל: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos(nx),\sin(nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$.
- תהא $f\in E[-\pi,\pi]$. נגדיר עבורה את **מקדמי פוריה** באופן הבא:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{a_0}{\sqrt{2}}&=\left\langle f(x),\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\\ a_n&=\langle f(x),\cos(nx)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx\\ b_n&=\langle f(x),\sin(nx)\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx\end{aligned}}$$

- **טור הפוריה הטריגונומטרי** של הפונקציה יהיה:

$$\boxed{f(x)\sim\sum\langle f,e_n\rangle e_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx)\right)}$$

הסימן $f(x)\sim(\ )$ פירושו "$f(x)$ מתנהגות כמו" או "טור הפוריה של הפונקציה $f(x)$ הוא".

- **מתקיים**: הלמה של **רימן-לבג**: $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$
- מתקיים: **א"ש בסל**: $\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)^2\,dx\right|$
- טענה: **המערכת** שבנינו **סגורה** במרחב הנ"ל.
- מסקנה: א"ש בסל הופך **לשיוויון פרסבל**: $\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)^2\,dx\right|$
- מתקיים גם **שיוויון פרסבל המוכלל**: תהיינה $f,g\in E[-\pi,\pi]$. והטורים שלהם:

$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(nx)+b_n\cdot\sin(nx)\right)$, $g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cdot\cos(nx)+\beta_n\cdot\sin(nx)\right)$. אז נוכל לכתוב:

$$\boxed{\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\alpha_n+b_n\beta_n\right)}$$

- תהיינה $f,g\in E[-\pi,\pi]$ בעלות **טורי פוריה זהים**: $a_n=\alpha_n,\ b_n=\beta_n$.

  אזי: $f(x)\sim g(x)$ (נמצאות ב**אותה מחלקת שקילות**).

- עבור אותו מרחב $E[-\pi,\pi]$ נוכל להגדיר את המכ"פ הבאה: $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$. ואז, בסיס א"נ מתאים יהיה:

$\boxed{\left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}}$.

- במקרה זה נגדיר את **מקדמי פוריה המרוכבים** באופן הבא:

$$c_n=\langle f,e_n\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$$

- הקשר בין מקדמי פוריה המרוכבים לבין מקדמי פוריה הטריגונומטריים:

$$c_o=\frac{a_0}{2}\qquad a_0=2c_0$$
$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\qquad a_n=c_n+c_{-n}$$
$$c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\qquad b_n=i(c_n-c_{-n})$$

הגדרה: $\mathbf{f\in E'[-\pi,\pi]}$ אם מתקיים:

1. $f\in E[-\pi,\pi]$.
2. לכל $x\in[-\pi,\pi)$ קיים וסופי הגבול: $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, כלומר **הנגזרת מימין קיימת**.
3. לכל $x\in(-\pi,\pi]$ קיים וסופי הגבול: $\lim\limits_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, כלומר **הנגזרת משמאל קיימת**.

משפט דיריכלה:

תהא $f(x)\in E'[-\pi,\pi]$. כלומר יש לה פיתוח לטור פוריה.

אזי: לכל $x\in(-\pi,\pi)$, טור הפוריה של הפונקציה מתכנס ל: $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

עבור $x=\pm\pi$, טור הפוריה של הפונקציה מתכנס ל: $\frac{f(\pi^+)+f(-\pi^-)}{2}$

- **משפט**: תהא $f(x)$ **רציפה** בקטע $[-\pi,\pi]$ כך ש: $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(x)\in E[-\pi,\pi]$.

  אזי: **טור** הפורייה של הפונקציה $f(x)$ **מתכנס** ל- $f(x)$ **במידה שווה** בקטע $[-\pi,\pi]$.
- **מסקנה**: תהא $f(x)$ **רציפה** בקטע $[-\pi,\pi]$ כך ש: $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(x)\in E[-\pi,\pi]$.

  אזי: ניתן **לגזור** את טור הפוריה של הפונקציה $f(x)$ **איבר-איבר**.
- **משפט**: תהיינה $f(x),f'(x)\in E[-\pi,\pi]$, ויהא $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$ כך ש- $f(x)$ **רציפה שם**.

  אזי: **טור** הפורייה של הפונקציה $f(x)$ **מתכנס** ל- $f(x)$ **במידה שווה** בקטע $[a,b]$.
- **משפט**: תהיינה $f(x),f'(x),\dots,f^{(k-1)}(x)$ **רציפות** בקטע $[-\pi,\pi]$ כך ש: $f(-\pi)=f(\pi)$,

$f'(\pi)=f'(-\pi),...f^{(k-1)}(\pi)=f^{(k-1)}(-\pi)$ ותהא $f^{(k)}(x)$ רציפה למקוטעין.

אזי: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k c_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^k a_n = \lim\limits_{n\to\infty} n^k b_n = 0$ (כאשר c_n, a_n, b_n מקדמי פוריה).

- **משפט**: תהא $f(x)\in E[-\pi,\pi]$, $f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(nx)+b_n \sin(nx)\right)$

אזי: $\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \frac{a_0(x+\pi)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin(nx)-\frac{b_n}{n}\cos(nx)\right)$. במילים אחרות: ניתן לבצע **אינטגרציה איבר-איבר** של הטור.

טור קוסינוסים וטור סינוסים

תהא $f(x)\in E[0,\pi]$. ונרצה **להרחיב אותה** על כל הקטע $[-\pi,\pi]$.

1. **הרחבה זוגית**: נרחיב את הפונקציה שלנו באופן הבא: $\widetilde{f(x)}=\begin{cases} f(x) & x\in[0,\pi] \\ f(-x) & x\in[-\pi,0) \end{cases}$

בפיתוח של הפונקציה לפי הבסיס הרגיל נקבל: $\widetilde{f(x)}\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ לכל $x\in[-\pi,\pi]$ (כי הפונקציה זוגית).

ונקבל גם: $\underline{f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)}$ לכל $x\in[0,\pi]$.

$\Leftarrow$ מסקנה: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos(nx)\right\}$ היא **מערכת א"נ סגורה** עבור הקטע $[0,\pi]$.

2. **הרחבה אי זוגית**: נרחיב את הפונקציה שלנו באופן הבא: $\widetilde{f(x)}=\begin{cases} f(x) & x\in(0,\pi] \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & x\in[-\pi,0) \end{cases}$

בפיתוח של הפונקציה לפי הבסיס הרגיל נקבל: $\widetilde{f(x)}\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ לכל $x\in[-\pi,\pi]$.

ונקבל גם: $\underline{f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)}$ לכל $x\in[0,\pi]$.

$\Leftarrow$ מסקנה: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin(nx)\right\}$ היא **מערכת א"נ סגורה** עבור הקטע $[0,\pi]$.

טענה: תהא $f(x)\in C[0,\pi]$, $f'(x)\in E[0,\pi]$. **אזי**:

1. טור **הקוסינוסים מתכנס** לפונקציה $f(x)$ **במ"ש** בקטע $[0,\pi]$.
2. אם בנוסף $f(0)=f(\pi)=0$, אזי: טור **הסינוסים מתכנס** לפונקציה $f(x)$ **במ"ש** בקטע $[0,\pi]$.

טורים חשובים:

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^2} \cos((2k+1)x)$$

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

התמרות פוריה

הגדרה: $G(\mathbb{R})$ הוא **המרחב** המקיים: אם $f \in G(\mathbb{R})$ אזי:

1. $f(x)$ **רציפה למקוטעין** (בכל קטע סופי יש מספר סופי של קפיצות).
2. $f(x)$ **אינטגרבילית בהחלט**, כלומר: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

תהא $f(x)$ כלשהי. אז לכל $\omega \in \mathbb{R}$ נגדיר את **התמרת הפוריה** שלה באופן הבא:

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx}$$

סימון: $f(x) \to \widehat{f(\omega)} = F(\omega) = \wp(w)$

משפט: תהא $f \in G(\mathbb{R})$. **אזי**:

1. $F(\omega)$, התמרת הפוריה של $f(x)$, **מוגדרת** לכל $\omega \in \mathbb{R}$.
2. $F(\omega)$ **רציפה** לכל $\omega \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{\omega \to \pm\infty} F(\omega) = 0$.

התמרת פוריה הפוכה

- **משפט**: תהא $f(x) \in G(\mathbb{R})$, ותהא $x_0 \in \mathbb{R}$ כך **שהנגזרות החד-צדדיות** של $f(x)$ **קיימות** בנקודה x_0.

אזי: $$\lim_{M \to \infty} \int_{-M}^{M} \wp[f](\omega) e^{i\omega x_0} d\omega = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

- **מסקנות**: תהא $f(x)\in G(\mathbb{R})$ כך ש- $f'(x)$ **רציפה למקוטעין**.

אזי:

1. $\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\wp[f](\omega)e^{i\omega x_0}d\omega=f(x_0)$
2. $\wp\big[\wp[f](\omega)\big](x)=\frac{1}{2\pi}f(-x)$

- **סימון**: $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}=\lim\limits_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}$

תכונות של התמרת פוריה

- $\wp[\alpha f+\beta g](\omega)=\alpha\wp[f](\omega)+\beta\wp[g](\omega)$ לכל $f,g\in G(\mathbb{R})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$
- $f(x)$ **ממשית** אמ"מ: $F(-\omega)=\overline{f(\omega)}$, $f(x)$ **מדומה טהורה** אמ"מ: $F(-\omega)=-\overline{f(\omega)}$
- $f(x)$ **זוגית** אמ"מ: $F(-\omega)=f(\omega)$, $f(x)$ **אי זוגית** אמ"מ: $F(-\omega)=-f(\omega)$
- $f(x)$ **ממשית וזוגית** $\Leftarrow$ $F(\omega)$ ממשית וזוגית.
- $f(x)$ **ממשית ואי"ז** $\Leftarrow$ $F(\omega)$ מדומה טהורה ואי"ז.
- $\wp[f(ax+b)]=\frac{e^{-i\omega b/a}}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
- בפרט: $\wp[f(ax)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $\wp[f(x+b)]=e^{i\omega b}F(\omega)$
- $\wp\left[e^{icx}f(x)\right]=F(\omega-c)$
- הפונקציה $x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$ ($k\in\mathbb{N}$) היא **פונקציה עצמית** של התמרת פוריה $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. למשל, עבור $k=0$ נקבל:

$$\wp\left[e^{-\frac{x^2}{2}}\right](\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

- **נוסחות המודולציה** (אפנון):
  - $\wp[f(x)\cos(cx)]=\frac{F(\omega-c)+f(\omega+c)}{2}$
  - $\wp[f(x)\sin(cx)]=\frac{F(\omega-c)-f(\omega+c)}{2i}$
- $\wp[f'(x)]=i\omega F(\omega)$ $\Leftarrow$ $\wp\left[f^{(n)}(x)\right]=(i\omega)^n F(\omega)$

- אם $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx<\infty$, אזי: $\wp\left[x\cdot f(x)\right]=i\frac{d}{d\omega}F(\omega)$
   - מסקנה: $\wp\left[x^k\cdot f(x)\right]=i^k\frac{d^k}{d\omega^k}F(\omega)$ (עבור התנאים המתאימים).
- $f(x)\to F(\omega) \quad \Leftarrow \quad F(x)\to\frac{1}{2\pi}f(-\omega)$

התמרות חשובות

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & x\notin[a,b]\end{cases} \quad \Leftarrow \quad F(\omega)=\frac{e^{-i\omega b}-e^{-i\omega a}}{2\pi i\omega}$$

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in[-a,a]\\ 0 & x\notin[-a,a]\end{cases} \quad \Leftarrow \quad F(\omega)=\frac{\sin(\omega b)}{\pi\omega}$$

$$f(x)=e^{-|x|} \quad \Leftarrow \quad F(\omega)=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$$

קונבולוציה (כיפול)

הגדרה: עבור $f(x),g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, נוכל להגדיר את הפעולה הבאה:

$$\boxed{(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy}$$

תכונות:

- **קומוטטיביות**: $(f*g)(x)=(g*f)(x)$
- תהיינה $f(x),g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ **אינטגרביליות בהחלט** מעל $\mathbb{R}$.
  אזי: $(f*g)(x)$ **קיימת** לכל $x\in\mathbb{R}$ ו**אינטגרבילית בהחלט** מעל $\mathbb{R}$.

משפט הקונבולוציה:

תהיינה $f(x),g(x)\in G(\mathbb{R})$ עם התמרות פוריה $F(\omega),G(\omega)$ בהתאמה.

אזי: $\boxed{\wp\left[(f*g)(x)\right](\omega)=2\pi\cdot F(\omega)G(\omega)}$

דוגמה חשובה לשימוש: בהינתן משוואת החום: $\begin{cases}u_t-ku_{xx}=0 & -\infty<x<\infty\ ,t>0\\ u(x,0)=f(x) & -\infty<x<\infty\end{cases}$

פתרונה יהיה: $u(x,t)=\sqrt{\frac{1}{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}f(y)dy$ (נקרא "גרעין למשוואת החום").

- כשיש משוואה מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-s)dt$ כנראה שכדאי להשתמש במשפט הקונבולוציה.
- **משמעות הקונבולוציה**: מכפלה של פונקציה אחת עם **הזזה** של השנייה. במקרה של פונקציות עם **תומך סופי** $[a,b]$ ו- $[c,d]$, לקונבולוציה תהיה משמעות **אך ורק** בתחום $[a+c,b+d]$.

התמרת לפלס (Laplace)

נדון כעת בפונקציות $f(t)$, $t\geq 0$, המקיימות:

1. $f(t)$ **מרוכבת** ו**רציפה למקוטעין** בתחום $t\in[0,\infty)$. ניתן להרחיב את הפונקציה בצורה מלאכותית על כל הישר, למשל על ידי ההגדרה הבאה: $f(t)=0$ לכל $t<0$.
2. קיימים $k\geq 0$ ו- $a\in\mathbb{R}$ כך שלכל $t>0$, $|f(t)|<ke^{at}$.

עבור פונקציה כזו נוכל להגדיר את ההתמרה הבאה:

$$\boxed{\hat{L}\left[f(t)\right](s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad , \quad s\in\mathbb{R}}$$

עבור הרחבה של $f(t)$ כאמור לעיל, ניתן להגדיר:

$$\hat{L}\left[f(t)\right](s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-is)t}dt=\wp\left[f(t)\right](-is)$$

משפט: תהא $f(t)$ $(t\geq 0)$ מקיימת את התנאים דלעיל.

אזי:

- התמרת לפלס $\hat{L}\left[f(t)\right](s)$ **קיימת** עבור $s>a$.
- $\lim_{s\to\infty}\hat{L}\left[f(t)\right](s)=0$

תכונות:

- **לינאריות**: לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ ולכל $f(t),g(t)$ פונקציות המקיימות את התנאים דלעל, מתקיים:

$$\hat{L}\left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right](s)=\alpha\hat{L}\left[f(t)\right](s)+\hat{L}\left[g(t)\right](s)$$

- **נוסחת הנגזרת**: תהא $f(t)$ פונקציה המקיימת את התנאים דלעיל, $f'(t)\in E[0,\infty)$.

אזי: התמרת לפלס ל- $f'(t)$ קיימת עבור $s>a$, ומקיימת:

$$\hat{L}\left[f'(t)\right](s)=s\cdot\hat{L}\left[f(t)\right](s)-f(0)$$

- נוסחת **הנגזרת המוכללת**: עבור התנאים המתאימים על $f(x),f'(x)$ וכולי, נקבל:

$$\hat{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=s^n\cdot\hat{L}\left[f(t)\right](s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

- נוסחת **המומנט**: $\hat{L}\left[t^n f(t)\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\hat{L}\left[f(t)\right](s)$
- **הזזה**: $\hat{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\hat{L}\left[f(t)\right](s-a)$
- **קונבולוציה (כיפול)**: עבור הרחבה מלאכותית של הפונקציה באופן הבא:

  $\widetilde{f(t)}=\begin{cases}f(t) & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$, נקבל: $(f*g)(t)=\int_0^t f(t-y)g(y)dy$
- לכל $a>0$ מתקיים: $\hat{L}\left[f(at)\right](s)=\frac{1}{a}\hat{L}\left[f(t)\right]\left(\frac{s}{a}\right)$
- **משפט**: תהיינה $f,g\in E[0,\infty)$, $|g(t)|\leq k_2e^{at}$, $|f(t)|\leq k_1e^{at}$.

  אזי: א. $|(f*g)(t)|\leq k_1k_2te^{at}$

  ב. $\hat{L}\left[(f*g)(t)\right](s)=\hat{L}\left[f(t)\right](s)\cdot\hat{L}\left[g(t)\right](s)$
- **הערה חשובה**: שימי לב: מבחינת התמרת לפלס הזזה ב- c שקולה לכפל ב- e^{-cs}. מעניין לראות זאת בהקשרים שונים. (להמחשה ניתן להתסכל על כמה מהדוגמאות למטה).

פונקציות מוכללות (פונקציונלים) והדלתא של דיראק

תהא $f(t)$ פונקציה "נחמדה", תהיינה $\{v(t)\}\in c^\infty(\mathbb{R})$ עם תומך סופי. נגדיר עבורן את הפונקציונל הבא:

$F_f(v)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)v(t)dt$.

נתונה סדרה של פונקציות מדרגה סביב הנקודה a: $f_n(t)=\begin{cases}\frac{n}{2} & |t-a|<\frac{1}{n}\\ 0 & |t-a|<\frac{1}{n}\end{cases}$. עבור סדרת הפונקציות הזו מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}F_{f_n}[v]=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_n(t)v(t)dt=\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{a-1/n}^{a+1/n}v(t)dt}{2/n}=v(a)$$

נגדיר **גזירה מוכללת**: $F_{f'}[v]=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)v'(t)dt$. ועבור פונקציית המדרגה הבאה:

$u_c(t)=\begin{cases}1 & t>c\\ 0 & t\leq c\end{cases}$ מתקיים: הנגזרת בנקודת הקפיצה c: $\int_{-\infty}^{\infty}u_c'(t)v(t)dt=v(c)$

את ה"פונקציה" (אנחנו כותבים עם מרכאות כי זו לא באמת פונקציה במובן הרגיל) הזו אנו מסמנים ב: $\delta_c(t)$. שמה בישראל: הדלתא של דיראק. וכאמור, המשמעות היחידה שלה קיימת רק כאשר היא נמצאת בתוך אינטגרל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_c(t)f(t)dt=f(c).$$

התמרת לפלס הפוכה

עד כה דנו בהתמרת לפלס עבור $s\in\mathbb{R}$. יהא כעת $\sigma=s+ic\in\mathbb{C}$.

טענה: יהא $a\in\mathbb{R}$, $e^{-at}f(t)$ **רציפה למקוטעין** ו**אינטגרבילית בהחלט** בקטע $[0,\infty)$.

אזי: התמרת לפלס המרוכבת $\boxed{F(\sigma)=\int_0^{\infty}e^{-\sigma\tau}f(t)dt}$ מוגדרת לכל $\sigma\in\mathbb{C}$ המקיים: $\operatorname{Re}(\sigma)<a$.

משפט: **אנליטיות**: תהא $e^{-at}f(t)$ רציפה למקוטעין ואינטגרבילית בהחלט בקטע $[0,\infty)$.

אזי: $f(\sigma)$ אנליטית בתחום $\operatorname{Re}(\sigma)>a$.

משפט: **התמרת לפלס הפוכה**: תהא $e^{-at}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט, $f(t)$ רציפה בקטע $[0,\infty)$ כך שבכל נקודה $t\in(0,\infty)$ קיימות הנגזרות החד-צדדיות של $f(t)$.

אזי: $\boxed{f(t)=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-iM}^{s+iM}e^{\sigma t}F(\sigma)d\sigma}$

התמרות חשובות

$f(t)=1$	$\hat{L}[1](s)=\frac{1}{s}$	$s>a$
$u_c(t)=\begin{cases}0 & t<c\\ 1 & t\ge c\end{cases}$	$\hat{L}[u_c(t)](s)=\frac{1}{s}e^{-cs}$	$s>a$
$f(t)=g(t-c)$	$\hat{L}[g(t-c)](s)=e^{-sc}\hat{L}[g(t)](s)$	$s>a$
$f(t)=e^{at}\ ,a\in\mathbb{R}$	$\hat{L}[e^{at}](s)=\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$f(t)=e^{zt}\ ,z\in\mathbb{C}$	$\hat{L}[e^{zt}](s)=\frac{1}{s-z}$	$s>\operatorname{Re}(z)$
$f(t)=\sin(at)$	$\hat{L}[\sin(at)](s)=\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$f(t)=\cos(at)$	$\hat{L}[\cos(at)](s)=\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>0$
$f(t)=t^n$	$\hat{L}[t^n](s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$

להערות והארות: roteminbar@yahoo.com

$f(t)=e^{at}\sin(bt)$ $\qquad$ $\hat{L}\left[e^{at}\sin(bt)\right](s)=\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$ $\qquad$ $s>a$

$f(t)=e^{at}\cos(bt)$ $\qquad$ $\hat{L}\left[e^{at}\cos(bt)\right](s)=\dfrac{b}{(s-a)^2-b^2}$ $\qquad$ $s>a$

$f(t)=\delta_c(t)$ $\qquad$ $\hat{L}\left[\delta_c(t)\right](s)=e^{-sc}$ $\qquad$ $sc>0$