הפתק הסגול
www.technion.co.il

טורי פורייה והתמרות אינטגרליות

104214

סיכום הקורס

תוכן עניינים

מבוא – מערכות אורתונורמלית ומכפלות פנימיות

מרחב ליניארי (Linear Space) או מרחב וקטורי (Vector Space)

מרחב ליניארי נתון מעל מרחב סקלרי, אצלנו יהיה בד"כ מעל $\mathbb{C}$, או $\mathbb{R}$. איבר במרחב וקטורי יכול להיות וקטור או פונקציה.

צירוף ליניארי

אם $f,g \in W$ שתי פונקציות ששייכות למרחב וקטורי W ו $a,b \in \mathbb{C}$ סקלרים מרוכבים, אז

$$af + bg \in W$$

הוא צירוף ליניארי של a ו b.

אי-תלות ליניארית

הגדרה 1:

$f_1,...,f_n \in W$ נקראים בלתי תלויים (Linearly Independent) אם מתקיים

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + ... + a_n f_n = 0 \;\; \Rightarrow \;\; a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$$

ניסוחים שקולים להגדרה:

1. לא קיים צירף ליניארי לא טריביאלי של $f_1,...,f_n$ השווה אפס;
2. אף אחת מהפונקציות f_i אינו צירוף ליניארי של האחרים.

אם $f_1,...,f_n$ אינם בלתי תלויים, אז הם נקראים תלויים (Linearly Dependent).

קבוצה פורשת

הגדרה 2:

$f_1,...,f_n \in W$ פורשים (Span) את W אם כל $f \in W$ ניתן לקבל כצירוף ליניארי של $f_1,...,f_n$.

בסיס

הגדרה 3:

הקבוצה

$$\{f_1,...,f_n\} \quad , \quad f_i \in W$$

נקראת בסיס (Basis) של W אם $f_1,...,f_n$ בלתי תלויים ופורשים את W.

במקרה זה, אנחנו אומרים שמימד W מוגדר היטב והוא n, ומסמנים

$$\dim W = n$$

מכפלה פנימית (Inner Product)

הגדרה 4:

מכפלה פנימית של שני וקטורים/פונקציות $g,f \in W$, שנסמן

$$\langle f,g \rangle$$

היא חוק המעביר כל זוג של איברים ב W לסקלר בשדה הסקלרי המתאים שמעליו מוגדר המרחב, המקיים:

1. לכל $f \in W$, $\langle f,f \rangle \ge 0$ ובנוסף,
$$\langle f,f \rangle = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; f = 0$$
2. ליניאריות המשתנה הראשון (השמאלי):
לכל $f,g,h \in W$ ו $a,b \in \mathbb{C}$, $\langle af + bg, h \rangle = a\langle f,h \rangle + b\langle g,h \rangle$
3. לכל $f,g \in W$:
$$\langle f,g \rangle = \overline{\langle g,f \rangle}$$

סימון החוק: $\langle \cdot,\cdot \rangle : W \times W \to \mathbb{C}$

תכונות המכפלה הפנימית:

$$\langle f, ag + bh \rangle = \bar{a}\langle f,g \rangle + \bar{b}\langle f,h \rangle$$

$$\langle af, af \rangle = |a|^2 \langle f,f \rangle$$

$$\langle 0, f \rangle = 0$$

דוגמאות למכפלות פנימיות סטנדרטיות:

1. המרחב $W=R^n$ מעל R. יהי $f=(f_1,f_2,\dots f_n)\in W$, $f_i\in R$. ניקח $w\in R^n$, $w=(w_1,\dots,w_n)$ שמקיים $w_i>0$ וקטור משקל. נגדיר את המכפלה הפנימית הסטנדרטית: $\langle f,g\rangle_w=\sum_{i=1}^{n} f_i g_i w_i$
2. הכללת ההגדרה הראשונה: המרחב $W=\mathbb{C}^n$ מעל $\mathbb{C}$. ניקח $w\in R^n$, $w=(w_1,\dots,w_n)$ שמקיים $w_i>0$ וקטור משקל. נגדיר: $\langle f,g\rangle_w=\sum_{i=1}^{n} f_i\overline{g}_i w_i$
3. המרחב $W\triangleq C[a,b]$ הוא מרחב הפונקציות במשתנה אחד הרציפות בקטע הסגור $[a,b]$. זהו מרחב אינבעל מימד אינסופי. נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$
4. המרחב $W\triangleq \ell_2$, כאשר $\ell_2:\left\{x\,\middle|\,x=(x_1,x_2,\dots),x_i\in\mathbb{C},\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty\right\}$. זהו מרחב ליניארי. נגדיר: $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_i\overline{y}_i$. $\langle x,y\rangle$ מקיים את שלוש התכונות של מכפלה פנימית, אך לא ברור מראש שבכלל קיים המספר $\langle x,y\rangle$ לכל $x,y\in\ell_2$.

אי-שיוויון קושי-שוורץ

אם W מרחב ליניארי עם מכפלה פנימית, אזי

$$\langle f,g\rangle^2\le\langle f,f\rangle\cdot\langle g,g\rangle$$

הוכחה, כאשר W מעל $\mathbb{R}$:

אם $\langle f,f\rangle=0$ ו/או $\langle g,g\rangle=0$ אז הטענה נכונה. כעת נניח ש $\langle f,f\rangle\neq0$ וגם $\langle g,g\rangle\neq0$.

לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$0\le\langle f+\lambda g,f+\lambda g\rangle=\langle f,f\rangle+2\lambda\langle f,g\rangle+\lambda^2\langle g,g\rangle$$

זהו פולינום ריבועי ב λ, שהוא אי-שלילי לכל המספרים הממשיים ולכן $\Delta\le0$, כלומר

$$\left(2\langle f,g\rangle\right)^2-4\langle f,f\rangle\langle g,g\rangle\le0$$

ולכן קיבלנו

$$\langle f,g\rangle^2\le\langle f,f\rangle\cdot\langle g,g\rangle$$

נורמה (Norm)

הגדרה 5:

יהי W מרחב ליניארי. נורמה היא חוק (או פונקציה) מ W ל $\mathbb{R}_+$ (המספרים הממשיים החיובים ו 0) שנסמן $\|f\|$, המקיימת:

1. $\|f\|\ge0$ ו $f=0\ \Leftrightarrow\ \|f\|=0$
2. לכל $a\in\mathbb{C}$, $\|af\|=|a|\cdot\|f\|$
3. אי-שוויון המשולש: $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$

דוגמאות להגדרת נורמות:

1. במרחב $W=\mathbb{C}$, נגדיר: $\|x\|=|x|$
2. במרחב $W=\mathbb{C}^n$, עבור וקטור $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ נגדיר:

1) $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ הנורמה האוקלידית;

2) $i=1,\dots,n$, $\|x\|_\infty=\max\{|x_i|\}$ הנורמה האוניפורמית;

3) $\|x\|_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ הנורמה הממוצעת.

3. במרחב $W=C[a,b]$, נגדיר:

1) $\|f\|=\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2dx}$;

2) $a\le x\le b$, $\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|\}$;

3) $\|f\|_1=\int_a^b |f(x)|dx$.

משפט 1: הנורמה המושרית

יהי W מרחב ליניארי עם מכפלה פנימית, אז $\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}$ הוא נורמה.

הוכחה:

$\langle f,f\rangle\ge 0$ ולכן $\sqrt{\langle f,f\rangle}$ קיים ומוגדר היטב.

א. $\|f\|\ge 0$ לפי ההגדרה וגם: $\|f\|=0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\langle f,f\rangle}=0 \;\Rightarrow\; \langle f,f\rangle=0 \;\Rightarrow\; f=0$

ב. $\|af\|^2=\langle af,af\rangle=|a|^2\langle f,f\rangle=|a|^2\|f\|^2$ ואז $\|af\|=|a|\|f\|$

ג. $\|f+g\|^2=\langle f+g,f+g\rangle=\langle f,f\rangle+\langle f,g\rangle+\langle g,f\rangle+\langle g,g\rangle=\langle f,f\rangle+\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}+\langle g,g\rangle$

נביט בביטוי $\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}$:

$$\langle f,g\rangle+\overline{\langle f,g\rangle}=2\operatorname{Re}\langle f,g\rangle\le 2\left|\operatorname{Re}\langle f,g\rangle\right|\le 2\left|\langle f,g\rangle\right|$$

ולפי אי-שוויון קושי-שוורץ

$$2\left|\langle f,g\rangle\right|\le 2\sqrt{\langle f,f\rangle}\sqrt{\langle g,g\rangle}$$

נמשיך:

$$\|f+g\|^2\le\langle f,f\rangle+2\sqrt{\langle f,f\rangle}\sqrt{\langle g,g\rangle}+\langle g,g\rangle=\|f\|^2+2\|f\|\|g\|+\|g\|^2=(\|f\|+\|g\|)^2$$

ולכן $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$.

מערכות אורתוגונליות ואורתונורמליות

הגדרה 6:

$f,g\in W$ נקראים אורתוגונליים (Orthogonal), או ניצבים, אם

$f\ne 0$, $g\ne 0$ וגם $\langle f,g\rangle=0$

לעיתים מסמנים: $f\perp g$

הגדרה 7:

נתונים $\varphi_1,\dots,\varphi_n\in W$ (n סופי או אין סופי) כך ש $\varphi_i\ne 0$, אז:

א. נגיד ש $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ מערכת אורתוגונלית אם $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=0$ לכל $i\ne j$.

ב. נגיד ש $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ מערכת אורתונורמלית אם $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=0$ לכל $i\ne j$ וגם $\langle\varphi_i,\varphi_i\rangle=1$ לכל i.

בקצרה ניתן לומר שהתנאי הוא:

$$\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\delta_{ij}\triangleq\begin{cases}0, & i\ne j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

כאשר δ_{ij} נקראת הדלתא של קרוניקר.

מכל מערכת אורתוגונלית $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ ניתן ליצור מערכת אורתונורמלית $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ שפורשת את אותו המרחב, ע"י

$$\psi_i=\frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}$$

לכל i.

טענה 1:

אם $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ מערכת אורתונורמלית ו n סופי, אז $\varphi_1,...,\varphi_n$ בלתי-תלויים.

הוכחה:

נניח ש $a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+...+a_n\varphi_n=0$, ולכן עלינו להראות ש $a_1=a_2=...=a_n=0$.

ניקח $j\in\{1,...,n\}$. נביט ב:

$$0=\langle 0,\varphi_j\rangle=\langle a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+...+a_n\varphi_n,\varphi_j\rangle$$

$$=a_1\langle\varphi_1,\varphi_j\rangle+a_2\langle\varphi_2,\varphi_j\rangle+...+a_n\langle\varphi_n,\varphi_j\rangle=a_1\cdot 0+...+a_j\cdot 1+...+a_n\cdot 0=a_j$$

כלומר $a_j=0$. טענה זו נכונה לכל j, ולכן מש״ל.

טענה 2:

תהי $\{e_1,...,e_n\}$ קבוצה אורתונורמלית. נניח ש $f=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$, אזי:

א. $a_i=\langle f,e_i\rangle$ לכל $i\in\{1,...,n\}$

ב. $\|f\|^2=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2=\sum_{i=1}^{n}\langle f,e_i\rangle^2$

כלומר, ניתן לכתוב כל פונקציה $f\in span\{e_1,...,e_n\}$ כך: $f=\sum_{i=1}^{n}\langle f,e_i\rangle e_i$.

הוכחה:

א. ניקח $j\in\{1,..,n\}$ ואז:

$$\langle f,e_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}a_ie_j,e_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\langle e_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\delta_{ij}=a_j$$

ב. $$\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,\sum_{j=1}^{n}a_je_j\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\bar{a}_j\langle e_i,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{a}_i=\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2$$

המקדמים

$$\{\langle f,e_i\rangle\}_{i=1}^{n}$$

נקראים מקדמי פורייה מוכללים (Generalized Fourier Coefficients).

נשאלת השאלה:

באופן כללי, אם $\{e_1,...e_n\}$ בסיס לא אורתונורמלי ואם $f=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$ - איך מחשבים את המקדמים a_i?

התשובה:

יש לכתוב את n המשוואות הבאות:

$$\langle f,e_j\rangle=\sum_{i=1}^{n}a_i\langle e_i,e_j\rangle\quad,\quad 1\le j\le n$$

טענה 3:

יהי $W=C[-\pi,\pi]$ עם מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$, אזי

$$\{e^{-inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

קבוצה אורתונורמלית.

הוכחה:

ראשית,

$$\left\langle e^{inx}, e^{imx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\cdot e^{-imx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx$$

נרצה להראות שהמכפלה הפנימית יוצאת 0 עבור $n \neq m$ ו 1 עבור $n = m$.

עבור $n = m$:

$$\left\langle e^{inx}, e^{imx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 1$$

עבור $n \neq m$:

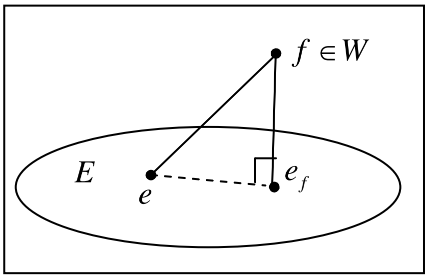
$$\left\langle e^{inx}, e^{imx} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x + i\sin(n-m)x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + i\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

הערה: ניתן למצוא נוסחא פשוטה לחישוב $\langle f, g\rangle$. ניקח $g = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \quad , \quad f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ ונקבל:

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{i=1}^{n} b_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i \langle e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle \overline{\langle g, e_i\rangle}$$

הגדרה 8: היטל אורתוגונאלי



יהי W מרחב ליניארי עם מכפלה פנימית, ו $\{e_1, ..., e_n\} \subset W$ תת-קבוצה אורתונורמלית המוכלת במרחב. נניח ש $f \in W$ אבל $f \notin span\{e_1, ..., e_n\}$, ולכן

$$f \neq \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle e_i$$

נגדיר:

$$e_f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle e_i$$

כהיטל האורתוגונלי (Orthogonal Projection) של f על המרחב $E = span\{e_1, ..., e_n\} \subset W$

טענה 4:

לכל $f \in W$ מתקיים:

1. $\left\langle f - e_f, e\right\rangle = 0$ לכל $e \in E$
2. לכל $e \in E$: $\|f-e\|^2 = \|f - e_f\|^2 + \|e_f - e\|^2$

הוכחה:

א. מספיק להוכיח $\left\langle f - e_f, e_j\right\rangle = 0$ לכל $1 \le j \le n$, מכיוון שכל $e \in E$ הוא צירוף ליניארי של $\{e_1, ..., e_n\}$ ובגלל תכונת הליניאריות במכפלה הפנימית:

$$\left\langle f - e_f, e_j\right\rangle = 0 \iff \left\langle f, e_j\right\rangle - \left\langle e_f, e_j\right\rangle = 0 \iff \left\langle f, e_j\right\rangle = \left\langle e_f, e_j\right\rangle$$

$$\iff \left\langle e_f, e_j\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle e_i, e_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, e_i\rangle \left\langle e_i, e_j\right\rangle = \left\langle f, e_j\right\rangle$$

ב. ניקח $e \in E$. גם $e_f \in E$ ולכן $e_f - e \in E$. לכן מא', $\left\langle f - e_f, e_f - e\right\rangle = 0$, ואז:

$$\|f-e\|^2 = \|f - e_f + e_f - e\|^2 = \left\langle (f - e_f) + (e_f - e), (f - e_f) + (e_f - e)\right\rangle$$

$$\Rightarrow \|f-e\|^2 = \left\langle f - e_f, f - e_f\right\rangle + \left\langle f - e_f, e_f - e\right\rangle + \left\langle e_f - e, f - e_f\right\rangle + \left\langle e_f - e, e_f - e\right\rangle$$

$$\Rightarrow \|f-e\|^2 = \|f - e_f\|^2 + \|e_f - e\|^2$$

תהליך Gram-Schmidt

יהיו $f_1,...,f_n$ בת״ל. תהליך זה בונה $\varphi_1,...\varphi_n$ כך ש:

א. $span\{f_1,...,f_k\}=span\{\varphi_1,...,\varphi_k\}$, כאשר $k=1,...,n$.

ב. $\{\varphi_1,...,\varphi_k\}$ אורתונורמליים, כאשר $k=1,...,n$.

שלב 1, $k=1$:

ניקח $\varphi_1=\dfrac{f_1}{\|f_1\|}$

שלב 2, $k=2$:

נגדיר $g_2=\langle f_2,\varphi_1\rangle\varphi_1$. כלומר $g_2=e_{f_2}$ הוא ההיטל האורתוגונלי של f_2 על $span\{\varphi_1\}$

כעת: $\langle f_2-g_2,\varphi_1\rangle=0$ - זו טענה 4א. בנוסף $f_2-g_2\in span\{f_1,f_2\}\neq 0$.

ניקח את $\varphi_2=\dfrac{f_2-g_2}{\|f_2-g_2\|}$

שלב k:

בנינו כבר $\{\varphi_1,...,\varphi_{k-1}\}$ אורתונורמליים, כך ש $span\{f_1,...,f_{k-1}\}=span\{\varphi_1,...,\varphi_{k-1}\}$. יש לנו f_k ואנו רוצים לבנות את φ_k. נגדיר את $g_k=\sum_{i=1}^{k}\langle f_k,\varphi_i\rangle\varphi_i$, ההיטל האורתוגונלי של f_k על $span\{\varphi_1,...,\varphi_{k-1}\}$.

מטענה 4א, $\langle f_k-g_k,\varphi_k\rangle=0$. $f_k-g_k\neq 0$ כי אם $f_k=g_k$, אז $g_k\in sp\{f_1,...,f_{k-1}\}$ ואז $\{f_1,...,f_k\}$ תלויים, בסתירה להנחה. נותר להגדיר את $\varphi_k=\dfrac{f_k-g_k}{\|f_k-g_k\|}$.

לכן, קיבלנו $\{\varphi_1,...,\varphi_k\}$ בסיס אורתונורמלי שפורש את אותו המרחב שפרשה הקבוצה המקורית, כלומר

$$span\{f_1,...,f_k\}=span\{\varphi_1,...,\varphi_k\}$$

הגדרה 9:

המרחק בין שני וקטורים/שתי פונקציות f ו g הוא

$$d(f,g)\triangleq\|f-g\|$$

הגדרה 10:

המרחק בין וקטור/פונקציה f לבין מרחב ליניארי V:

$$d(f,V)=\inf\{\|f-v\|:v\in V\}$$

כאשר $\inf$ (אינפימום) הוא החסם התחתון הגדול ביותר.

הגדרה 11:

$v^*\in V$ יקרא הקירוב הטוב ביותר (Best Approximation) ל f מתוך V אם:

$$\|f-v^*\|=d(f,V)=\inf\{\|f-v\|:v\in V\}$$

כלומר, $\|f-v^*\|\le\|f-v\|$ לכל $v\in V$.

טענה 5:

לכל $f\in W$, קיים הקירוב הטוב ביותר ל f מתוך $E=span\{e_1,...,e_n\}$, והוא

$$e_f=\sum_{i=1}^{n}\langle f,e_i\rangle e_i$$

כלומר ההיטל האורתוגונלי.

הוכחה:

לכל $e\in E$, מטענה 4ב,

$$\|f-e\|^2=\|f-e_f\|^2+\|e_f-e\|^2\ge\|f-e_f\|^2$$

לכן e_f הקירוב הטוב ביותר ב E.

נניח ש $e\in E$, $e\neq e_f$, ולכן $\|f-e\|^2>\|f-e_f\|^2$.

כעת, אם $\|f-e_f\|=\|f-e\|$ אז מטענה 4ב מקבלים $e_f=e \;\Rightarrow\; \|e-e_f\|=0$.

אי-שוויון בסל (Bessel)

יהי V מרחב מכפלה פנימית (מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית סטנדרטית), ו $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\subset V$ מערכת אורתונורמלית מוכלת ב V. אזי לכל $f\in V$

$$\sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle^2\le\|f\|^2$$

הוכחה:

נציב בטענה 4ב $\varphi=0$:

$$\|f\|^2=\|f-\varphi_f\|^2+\|\varphi_f\|^2\ge\|\varphi_f\|^2$$

קיבלנו שלכל $f\in W$, מתקיים

$$\|\varphi_f\|^2\le\|f\|^2$$

אבל

$$\|\varphi_f\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}|\langle f,\varphi_i\rangle|^2$$

כמובן ש f לא חייב להיות ב $span\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, אך אם אכן $f\in span\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, נקבל ש

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2=\|f\|^2$$

ושוויון זה נקרא שוויון Parseval.

מערכות אורתוגונליות אינסופיות

יהי V מרחב מכפלה פנימית. נניח ש $\dim V=\infty$. ונניח $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ldots\}$ מערכת אורתונורמלית עם אינסוף איברים (בני-מניה). ניתן לומר ש $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle=\delta_{ij}$ כאשר $i,j=1,2,3,\ldots$.

נצביע על כמה תכונות של מערכות אורתוגונליות אינסופיות.

אי-שוויון בסל:

לכל $f\in V$, מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2\le\|f\|^2$$

ההוכחה: נובע מאי-שוויון בסל עבור n סופי, לכל n.

שוויון פרסבל:

אם מתקיים מקרה שוויון באי-שוויון בסל, כלומר

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2=\|f\|^2$$

אז ל f, ביחס למערכת האורתונורמלית $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\ldots\}$, נאמר שמתקיים שוויון Parseval.

הלמה של רימן-לבג (Riemman-Lebasgue):

לכל $f\in V$, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle=0$$

הוכחה: נובע מאי-שוויון בסל, ומהעובדה שהטור מתכנס: $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2<\infty$.

הגדרה 12:

הסדרה $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n\in V$ מתכנסת, או מתכנסת בנורמה, ל $g\in V$ אם

$$\lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|=0$$

הגדרה 13:

עבור $g_n,g\in V$, הסכום

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i$$

מתכנס בנורמה ל g, אם $h_n = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i$ מתכנס בנורמה ל g, כלומר קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left\| g - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \right\| = 0$$

כאשר $\dim V = \infty$, נרצה לייצג את $f \in V$ כצירוף ליניארי של המערכת האורתונורמלית $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...\} \subset V$,
בהנחה שלמערכת האורתונורמלית $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...\}$ יש תכונה של בסיס.
ראינו שהקירוב הטוב ביותר ל f מהמרחב $span\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ הוא

$$\sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i$$

לכן, נצפה שאם יש צירוף ליניארי שיכול לייצג את f, הוא יהיה הסכום

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i$$

הגדרה 14: מערכת סגורה

מערכת אורתונורמלית אינסופית נקראת סגורה (Closed), אם לכל $f \in V$, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i \right\| = 0$$

טענה 6:

המערכת האורתונורמלית האינסופית $\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,...\}$ סגורה אם"ם לכל $f \in W$, קיים שוויון פרסבל, כלומר מתקיים

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2 = \|f\|^2$$

הוכחה:

מטענה 4ב, לכל מערכת אורתונורמלית $\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$, לכל $\varphi \in span\{\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\}$ מתקיים

$$\|f-\varphi\|^2 = \|f-\varphi_f\|^2 + \|\varphi_f - \varphi\|^2$$

כאשר

$$\varphi_f = \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i$$

ניקח $\varphi = 0$ ונקבל

$$\|f\|^2 = \|f-\varphi_f\|^2 + \|\varphi_f\|^2 = \left\| f - \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i \right\|^2 + \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle^2$$

ולכן

$$\|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle^2 = \left\| f - \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i \right\|^2$$

תכונת סגירות היא קיום הגבול

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle \varphi_i \right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ובקרה זה, כאשר $n\to\infty$, נקבל את שוויון פרסבל:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2 = \|f\|^2$$

הגדרה 15:

המערכת האורתונורמלית האינסופית $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא שלמה (Complete) אם

$$\forall i \ge 1 : \langle f,\varphi_i\rangle = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$$

טענה 7:

אם $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית סגורה, אז היא שלמה.

הוכחה:

נניח ש $\langle f, \varphi_i \rangle = 0$, $i = 1, 2, 3, ...$. מטענה 6, קיים שוויון פרסבל, כלומר

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^{\infty} 0^2 = 0$$

ולכן $f = 0$

טורי פורייה (Fourier) ותכונותיהם

הגדרה 16:

פונקציה f רציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$ אם קיימות נקודות $x_0=a<x_1<\ldots<x_m=b$, m סופי, כך ש f רציפה בתת-קטעים $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\ldots,m$, והגבולות החד צדדיים קיימים וסופיים לכל x_i, $i=0,1,\ldots,m$.

הגדרה 17:

נגדיר את E להיות המרחב הליניארי של כל הפונקציות שמוגדרות בקטע $[-\pi,\pi]$, שמקבלות ערכים מרוכבים ורציפות למקוטעין, וקיימים הגבולות החד-צדדיים בכל $x\in[-\pi,\pi]$.

הגדרה 18:

נגדיר את המכפלה הפנימית במרחב E באופן הבא:

$$\langle f,g\rangle \triangleq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

משפט 2:

המערכת $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin nx,\cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ אורתונורמלית במרחב E עם המכפלה הפנימית מהגדרה 18.

משפט 3:

המערכת $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ אורתונורמלית במרחב E, עם המכפלה הפנימית מהגדרה 18.

הערה:

ישנה בעיה קטנה אצלנו. אחת מהדרישות למכפלה פנימית היא

$$\langle f,f\rangle=0 \iff f=0$$

אצלנו ההגדרה היא

$$\langle f,f\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx$$

אבל בגלל ש $f\in E$, $\langle f,f\rangle=0$ אם"ם $f=0$ חוץ, אולי, ממספר סופי של נקודות. כלומר $f\equiv 0$ לא חייב להתקיים.

טענה 8:

שתי המערכות האורתונורמלית שלעיל הן סגורות.

ראינו שהסכום האינסופי $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i$ "מייצג" את f, במובן מסוים, בגלל הסגירות, כלומר בגלל שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f-\sum_{i=1}^{n}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i\right\|=0$$

נחשב איך נראה הטור $\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i$ עבור המערכת

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin nx,\cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{2}},\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\ldots$$

1. ניקח $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:
$$\langle f,\varphi\rangle\varphi=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{1}{\sqrt{2}}dt\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt$$
2. ניקח $\varphi_n(x)=\sin nx$:
$$\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt\right)\cdot\sin nx$$
3. ניקח $\varphi_n(x)=\cos nx$:
$$\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n=\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt\right)\cdot\cos nx$$

הגדרה 19 : טור פורייה

תהי פונקציה $f \in E$. הטור

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

כאשר :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad , \quad n=0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad , \quad n=1,2,\ldots$$

נקרא טור פורייה של f .

בסופו של דבר, אם נציב את הביטויים שקיבלנו, הביטוי לטור פורייה של $f \in E$ הוא :

$$f \sim \sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt\right)\cdot \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt\right)\cdot \cos nx$$

הערות :

1. נסמן $f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, במקום שוויון, כי ערך הטור לא שווה בהכרח בכל נקודה, לערך הפונקציה. בהמשך נראה את התנאים להתכנסות הטור.
2. אם g שונה מ f במספר סופי של נקודות, נקבל עבור g את אותם המקדמים a_n, b_n כמו ל f .
3. טור פורייה מוגדר על כל הישר, בעוד f מוגדרת על $[-\pi,\pi]$. רצוי לפעמים להסתכל על f כאילו היא מחזורית 2π , כמו פונקציות הבסיס $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos nx,\sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}$.

תכונת הליניאריות של מקדמי פורייה :

יהיו טורי פורייה של הפונקציות f,g הבאים

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

אזי

$$\alpha f(x)+\beta g(x) \sim \frac{(\alpha a_0+\beta A_0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta A_n)\cos nx+(\alpha b_n+\beta B_n)\sin nx$$

דוגמא 1 :

תהי $f(x)=x$ ב $[-\pi,\pi]$, $f \in E$. חשב את טור פורייה של f .

פתרון :

נחשב את המקדמים a_n :

$$n=0: \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$n>0: \quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\cos nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

כאשר $\cos n\pi = (-1)^n$, $\sin n\pi = 0$, נקבל

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(0+\frac{\cos n\pi - \cos(-n\pi)}{n^2}\right)=0$$

נחשב את המקדמים b_n :

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos n\pi-\pi\cos(-n\pi)}{n}\right)=\frac{-2\pi\cos n\pi}{\pi n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

ולכן קיבלנו, עבור $f(x)=x$, את הטור פורייה הבא :

$$x\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

נשים לב שלפחות בנקודות $x=\pm\pi$, הטור מתאפס ולכן לא שווה לפונקציה.

טענה 9 : הלמה של רימן-לבג למערכת האורתונורמלית שלנו

לכל $f\in E$, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0 \text{ וגם } \lim_{n\to\infty}b_n=0$$

רעיון ההוכחה :

מתקיים $\lim_{n\to\infty}\langle f,\varphi_n\rangle\varphi_n=0$, ובנוסף תמיד מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx$$

טענה 10 : שוויון פרסבל למערכת האורתונורמלית שלנו

$$\|f\|^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$$

הוכחה :

שוויון פרסבל הוא

$$\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2$$

ובמקרה שלנו

$$\|f\|^2=\langle f,f\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx$$

ומצד שני

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle f,\varphi_i\rangle^2=\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2+\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2$$

עבור $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ נקבל

$$\left(f,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\langle f,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}a_0$$

ואז

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}a_0\right|^2=\frac{|a_0|^2}{2}$$

דוגמא 2:

קיבלנו ש $x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$. יישם את שוויון פרסבל (לא הוכחנו עדיין, אבל הקבוצה סגורה).

פתרון:

זהו שוויון פרסבל:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+|b_n|^2$$

כלומר

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\right|^2$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

דוגמא 3:

חשב את טור פורייה של הפונקציה

$$f(x)=5+2\sin x+4\cos 2x$$

פתרון:

במקרה זה, הטור הוא הפונקציה עצמה, כי היא כבר מהצורה

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx+B_n\sin nx$$

פונקציה כזו נקראת פולינום טריגונומטרי.

<u>זוגיות ואי-זוגיות</u>

תזכורת:

f זוגית סביב לנקודה a אם $f(a+x)=f(a-x)$ לכל x;

f אי-זוגית סביב לנקודה a אם $f(a+x)=-f(a-x)$ לכל x.

אנו נדבר על זוגיות סביב נקודה $a=0$, מה שמתאים לקטע $[-\pi,\pi]$ שאנו בחרנו, ולכן:

f זוגית אם $f(x)=f(-x)$;

f אי-זוגית אם $f(x)=-f(x)$.

דוגמאות:

$f=\cos nx$ זוגית ו $f=\sin nx$ אי-זוגית.

תכונות (1 עד 3 מזכירים הכפלת מספרים חיוביים בשליליים):

1. זוגית * זוגית = זוגית
2. זוגית * אי-זוגית = אי-זוגית
3. אי-זוגית * אי-זוגית = זוגית
4. אם f אי-זוגית, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$ (באופן כללי, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=0$).
5. אם f זוגית, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\pi}f(x)dx$ (באופן כללי, $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx$).

משפט 4:

אם $f\in E$ פונקציה זוגית, אזי מקדמי פורייה מקיימים

$$\forall n>0:\qquad b_n=0$$

אם $f\in E$ פונקציה אי-זוגית, אזי מקדמי פורייה מקיימים

$$\forall n\ge 0:\qquad a_n=0$$

משפט 5 :

כל פונקציה f ניתן לכתוב כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

הוכחה :

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{even}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{odd}$$

דוגמא 4 :

חשב את טור פורייה של הפונקציה

$$f(x)=sign(x)\triangleq\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

פתרון :

$f\in E$ אי-זוגית, לכן $a_n=0$ $\forall n\geq 0:$. נחשב את b_n :

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\sin nxdx=-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}\left[\cos n\pi-1\right]$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \frac{4}{\pi n}, & n=2k+1\end{cases}$$

ולכן

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{4}{\pi}\sin x+\frac{4}{3\pi}\sin 3x+\frac{4}{5\pi}\sin 5x+...=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

ומשוויון פרסבל נקבל תוצאה נחמדה שיכולה להיות שימושית :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\quad\Rightarrow\quad 2=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(2n-1)^2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

דוגמא 5 :

חשב את טור פורייה של הפונקציה

$$f(x)=x^2$$

פתרון :

f זוגית, ולכן $b_n=0$ $\forall n>0:$. נחשב את שאר המקדמים :

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{\pi}\frac{2\pi^3}{3}=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\left[2x\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx\right)=-\frac{2}{n\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\left(\frac{-\pi\cos\pi n-\pi\cos\pi x}{n}+\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)=-\frac{2}{n^2\pi}\left(2\pi(-1)^{n+1}\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

ולכן טור פורייה של $f=x^2$ הוא

$$x^2\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

ומשוויון פרסבל נקבל הפעם :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|x^2\right|^2dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\quad\Rightarrow\quad\frac{2\pi^4}{5}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{2\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

טור פורייה מרוכב

כבר ראינו ש $\left\{e^{inx}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית ביחס למכפלה הפנימית

$$\left\langle f,g\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

אנו מסתכלים על הטור: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\langle f,\varphi_n\right\rangle\varphi_n$. ניקח $\varphi_n\left(x\right)=e^{inx}$ ולכן אלו מקדמי פורייה:

$$\left\langle f,e^{inx}\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx$$

הגדרה 20:

תהי $f\in E$. הטור

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx$$

נקרא טור פורייה מרוכב של f , ומסמנים

$$f\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$$

הערה:

ניתן להבחין שטור פורייה הרגיל והמרוכב הם אותו טור, רק כתובים בצורה שונה. הסיבה היא ש

$$e^{inx}=\cos nx+i\sin nx,\quad e^{-inx}=\cos nx-i\sin nx$$

$$e^0=1$$

ולכן

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2},\quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2},\quad n=0,1,2,3,\dots$$

שוויון פרסבל עבור טור פורייה מרוכב:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|c_n\right|^2$$

התכנסות נקודתית ומשפט דיריכלה (Dirichlet)

נזכר בהגדרה 13, התכנסות בנורמה של פונקציה $f\in E$. $f\in E$ מתכנסת בנורמה אם:

$$\lim_{m\to\infty}\left\|f-\sum_{i=1}^{m}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i\right\|=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right|^2dx=0$$

נרצה לדעת מתי $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=f(x)$, בכל נקודה $x\in[-\pi,\pi]$. לתכונה זו נקרא התכנסות נקודתית (Point-wise convergence).

הגדרה 21:

נגדיר את E' להיות תת מרחב של E כך שבכל נקודה $x\in(-\pi,\pi)$ קיימת נגזרת מימין ונגזרת משמאל וב $x=\pi$ רק נגזרת משמאל, וב $x=-\pi$ רק נגזרת מימין, כאשר נגדיר את הנגזרות החד צדדיות כך:

הגדרת הנגזרת מימין:

$$f'_+(x)\triangleq\lim_{h\to0^+}\frac{f(x+h)-f(x^+)}{h}$$

הגדרת הנגזרת משמאל:

$$f'_-(x)\triangleq\lim_{h\to0^-}\frac{f(x+h)-f(x^-)}{h}$$

כאשר מסמנים את הגבול מימין:

$$f(x^+)=\lim_{y\to x^+}f(y)$$

ואת הגבול משמאל:

$$f(x^-)=\lim_{y\to x^-}f(y)$$

משפט 6: משפט דיריכלה

תהי $f\in E'$. אזי:

א. לכל $x\in(-\pi,\pi)$, טור פורייה של f מתכנס נקודתית ל $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$;

ב. עבור $x=\pm\pi$, טור פורייה של f מתכנס נקודתית ל $\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$.

הערות:

1. ההתנהגות ב $\pm\pi$ היא לא מקרה מיוחד. אם f בעלת מחזור 2π, אז:

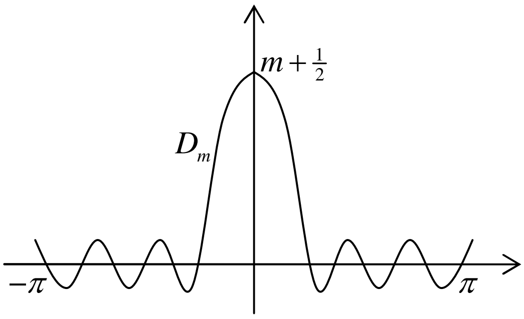
$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{f(-\pi^+)+f(-\pi^-)}{2}$$

2. כאשר נניח ש f בעלת מחזור 2π, ולכן אין מקרה מיוחד בקצוות $x=\pm\pi$, ואז לכל $x\in[-\pi,\pi]$, מתקיימת ההתכנסות הנקודתית ל $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
3. אם f רציפה בנקודה x, אז $f(x^+)=f(x^-)=f(x)$, ולכן טור פורייה של f מתכנס ל $f(x)$.
4. התכנסות ל $f(x)$ בכל נקודה $x\in[-\pi,\pi]$ תהיה אם $f(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ לכל x.

לפני הוכחת משפט דיריכלה, נספק כמה טענות והגדרות :

ראשית, נניח ש f בעלת מחזור 2π.

נגדיר סכום חלקי של טור פורייה : $S_m\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos nx+b_n\sin nx$



טענה א :

$$S_m\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+t\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt$$

טענה ב :

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt=\frac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

הגדרה : גרעין דיריכלה (בשרטוט משמאל) :

$$D_m\left(t\right)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt$$

ככל ש m גודל, ישנן יותר תנודות בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$, והעלייה במרכז דרסטית יותר.

טענה ג :

$$\int_{0}^{\pi}D_m\left(t\right)dt=\frac{\pi}{2}$$

טענה ד :

הפונקציה

$$g\left(t\right)=\frac{f\left(x+t\right)-f\left(x^{+}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

רציפה למקוטעין בקטע $\left[0,\pi\right]$.

הוכחת טענה א :

$$S_m\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}a_n\cos nx+b_n\sin nx=\frac{1}{2\pi}a_n$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(s\right)ds+\sum_{n=1}^{m}\left(\left[\int_{-\pi}^{\pi}f\left(s\right)\cos nsds\right]\cos nx+\left[\int_{-\pi}^{\pi}f\left(s\right)\sin nsds\right]\sin nx\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(s\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos ns\cos nx+\sin ns\sin nx\right)ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(s\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n\left(s-x\right)\right)ds$$

נציב $t=s-x$ ונקבל :

$$S_m\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(s\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos n\left(s-x\right)\right)ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f\left(x+t\right)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right)dt$$

אם g מחזורית 2π, אז האינטגרל $\int_{a}^{a+2\pi}g\left(t\right)dt$ לא תלוי ב a. האינטגרנד שלנו מחזורי 2π, ולכן

$$S_m\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x+t\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\right]dt$$

הוכחת טענה ב:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\frac{e^{int}+e^{-int}}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{0}+\sum_{n=1}^{m}e^{int}+e^{i(-n)t}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=-m}^{m}e^{int}=\frac{1}{2}e^{-imt}\sum_{n=0}^{2m}e^{int}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-imt}\left[\frac{\left(e^{it}\right)^{2m+1}-1}{e^{it}-1}\right]=\frac{1}{2}e^{-imt}\left[\frac{e^{i(2m+1)t}-1}{e^{it}-1}\right]=\frac{1}{2}\frac{e^{i(m+1)t}-e^{-imt}}{e^{it}-1}=\frac{1}{2}\frac{e^{i(m+1)t}-e^{-imt}}{e^{it}-1}\frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}=\frac{1}{2}\frac{\frac{e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}}{2i}}{\frac{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}{2i}}=\frac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

הוכחת טענה ג:

$$\int_{0}^{\pi}D_m(t)\,dt=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{m}\cos nt\,dt=\int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}dt+\int_{0}^{\pi}\sum_{n=1}^{m}\cos nt\,dt=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

הוכחת טענה ד:

g רציפה למקוטעין ב $\left(0,\pi\right]$, כסכום של פונקציות רציפות למקוטעים באותו הקטע.

נתבונן בגבול

$$\lim_{t\to0^+}g(t)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

מכיוון ש $f\in E'$, קיימות הנגזרות מימין ומשמאל לכל $x\in\left[-\pi,\pi\right]$. הגבול

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}$$

הוא הנגזרת מימין בנקודה x. הגבול

$$\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}}=1$$

ולכן הגבול

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

קיים כמכפלה של גבולות.

לכן $\lim_{t\to0^+}g(t)$ קיים ולכן g רציפה למקוטעין ב $\left[0,\pi\right]$.

הוכחת משפט 6: משפט דיריכלה:

אנו רוצים להראות ש

$$\lim_{m\to\infty}S_m(x)=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

עד כה קיבלנו ש:

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt$$

נמשיך לחשב:

$$S_m(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)D_m(t)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt$$

נוכיח בנפרד את שני השוויונים:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)D_m(t)\,dt=\frac{f(x^+)}{2},\quad \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)D_m(t)\,dt=\frac{f(x^-)}{2}$$

ראשית נראה ש

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_m(t)dt=\frac{f(x^+)}{2}$$

ע"י

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_m(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)-f(x^+)\right)D_m(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x^+)D_m(t)dt$$

כעת

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+)D_m(t)dt=\frac{1}{\pi}f(x^+)\int_0^{\pi}D_m(t)dt=\frac{1}{\pi}f(x+)\frac{\pi}{2}=\frac{f(x^+)}{2}$$

נותר להראות ש

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)-f(x^+)\right)D_m(t)dt=0$$

כעת, מטענה ד :

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)-f(x^+)\right)\frac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\left(m+\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt$$

נפתח את הביטוי $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)dt$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\left(m+\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\left(\cos\tfrac{t}{2}\sin mt+\sin\tfrac{t}{2}\cos mt\right)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[g(t)\cos\tfrac{t}{2}\right]\sin mtdt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[g(t)\sin\tfrac{t}{2}\right]\cos mtdt$$

נשתמש בלֶמָה של רימן-לבג :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0$$

ונגדיר את הפונקציה

$$h(x)=\begin{cases} g(t) & 0\le x\le\pi \\ 0 & -\pi\le x<0\end{cases}$$

נקבל את $h(t)\cos\frac{t}{2}$ וגם $h(t)\cos\frac{t}{2}$ רציפות למקוטעין בקטע $[0,\pi]$, ולכן :

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[h(t)\cos\tfrac{t}{2}\right]\sin mtdt=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[h(t)\sin\tfrac{t}{2}\right]\cos mtdt=0$$

כלומר, הראנו ש

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)-f(x^+)\right)\frac{\sin\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}g(t)\sin\left(\left(m+\tfrac{1}{2}\right)t\right)dt=0$$

ולכן

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_m(t)dt=\frac{f(x^+)}{2}$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(f(x+t)-f(x^+)\right)D_m(t)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x^+)D_m(t)dt\right)=0+\frac{f(x^+)}{2}=\frac{f(x^+)}{2}$$

ההוכחה עבור הגבול

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_m(t)dt=\frac{f(x^-)}{2}$$

דומה, ולכן לאחר שמוכיחים גם אותה, מקבלים את משפט דיריכלה :

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m} a_n\cos nx + b_n \sin nx\right) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

דוגמא 6:

מה תוכל לומר על הטור של $f(x)=x$ ממשפט דיריכלה? מהו גבול הטור הבא

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-+\ldots$$

פתרון:

ראינו בעבר ש:

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$$

מכיוון ש $f(x)=x$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ ונגזרותיה החד-צדדיות קיימות בכל x בקטע, ע"פ משפט דיריכלה:

$$\lim_{m\to\infty} 2\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} = \begin{cases} x, & -\pi<x<\pi \\ \dfrac{-1+1}{2}=0, & x=\pm\pi \end{cases}$$

בפרט, ההתכנסות נכונה גם ב $x=\frac{\pi}{2}$, ולכן:

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n} = 2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-+\ldots\right]$$

ולכן הטור מתכנס למספר $\frac{\pi}{4}$.

התכנסות במידה שווה (Uniform Convergence)

תזכורת: התכנסות נקודתית היא כאשר

$$\lim_{m\to\infty} S_m(x) = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m} a_n\cos nx + b_n \sin nx\right) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

התכנסות במידה שווה (התכנסות במ"ש) היא התכנסות "יותר חזקה" מהתכנסות נקודתית.

הגדרה 22:

סדרה של פונקציות $\{f_m\}$ מתכנסת נקודתית לפונקציה f בקטע $[a,b]$ אם לכל $x\in[a,b]$, קיים הגבול

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$$

כלומר, לכל $\varepsilon>0$, קיים $M=M(\varepsilon,x)$ כך שלכל $m\ge M$, $|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$.

הגדרה 23:

סדרה של פונקציות $\{f_m\}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה f בקטע $[a,b]$ אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $M=M(\varepsilon)$ כך שלכל $m\ge M$, $|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$, לכל $x\in[a,b]$.

דוגמא 7:

האם $f_m(x)=x^m$ מתכנסות במידה שווה בקטע $[0,1]$?

פתרון:

ראשית נביט בגבול

$$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} x^m = \begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0\le x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

לכן $\{f_m(x)\}$ מתכנסת נקודתית ל $f(x)$

אך ההתכנסות היא לא במידה שווה, כי אם ניקח סביבת $\varepsilon < \frac{1}{2}$ של $f(x)$, לא יתקיים שהפונקציות $\{x^m\}$ יהיו בתוך סביבה זו, כי אלו הן פונקציות רציפות שחייבות לצאת מהסביבה הזו במעבר מ $x=0$ ל $x=1$.

כלומר קיימת נקודה $0 < x_n < 1$ שבה $(x_n)^m = \frac{1}{2}$, ולכן

$$\left|x_n{}^m - f(x)\right| = \frac{1}{2} > \varepsilon$$

טענה 11:

אם $\{f_m\}$ רציפות ומתכנסות נקודתית ל $f(x)$ לא-רציפה, אזי ההתכנסות לא יכולה להיות במידה שווה.

דוגמא 8:

האם סדרת הפונקציות

$$f_m(x) = \frac{mx}{1+m^2x^2}$$

מכנסות במידה שווה?

פתרון:

הפונקציות $f_m(x) = \frac{mx}{1+m^2x^2}$ רציפות בקטע $[-1,1]$.

נביט בגבול:

$$\forall x \in [-1,1]: \ \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{mx}{1+m^2x^2} = 0$$

אך מכיוון ש

$$f_m\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}$$

באופן קבוע, ההתכנסות ל 0 לא יכולה להיות במידה שווה.

נחזור לטורי פורייה:

נשים לב ש

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

פונקציות רציפות, ולכן אם f לא רציפה ב $[-\pi,\pi]$ או $f(-\pi) \neq f(\pi)$ (כדי ש f, כשמסתכלים עליה בצורה מחזורית 2π, תהיה רציפה) אז אין סיכוי שהתכנסות טור פורייה שלה יהיה במידה שווה.

משפט 7:

אם f רציפה ב $[-\pi,\pi]$ ו $f(-\pi) = f(\pi)$ ו $f' \in E$, אזי טור פורייה של f

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנס במידה שווה ל f, בקטע $[-\pi,\pi]$.

הוכחה:

נזכר במבחן ויירשטראס להתכנסות במ"ש: אם סדרת הפונקציות $\{g_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ מקיימת לכל m ולכל x בקטע

$$\left|g_m(x)\right| \le c_m$$

ומתקיים $\sum_{m=1}^{\infty} c_m < \infty$, אזי $\sum_{m=1}^{k} g_m(x)$ מתכנס במידה שווה ל$\sum_{m=1}^{\infty} g_m(x)$.

אצלנו, נביט בסדרת הפונקציות

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

נסמן

$$g_m(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

לפי ההנחה, $f' \in E$ לכן, ל f' וגם ל f יש טור פורייה:

$$f(x) \sim S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

נבדוק מה הקשר בין $\{\alpha_n\}$ ו $\{\beta_n\}$ ל $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$.

ראשית,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0$$

כי f רציפה ו $f(-\pi) = f(\pi)$.

ובנוסף

$$\alpha_n = a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) = \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = nb_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\left[f(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right) = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = -na_n$$

לכן, קיבלנו ש

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx = \sum_{n=1}^{m} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$$

כעת נוכיח ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} < \infty$$

נפשט את הביטוי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\left|\frac{\beta_n}{n}\right|^2 + \left|\frac{\alpha_n}{n}\right|^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{|\beta_n|^2 + |\alpha_n|^2}$$

מאי-שוויון קושי-שוורץ נקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sqrt{|\beta_n|^2 + |\alpha_n|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|^2 + |\alpha_n|^2}$$

כעת, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, וגם $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 + |\alpha_n|^2$ מתכנס משוויון פרסבל עבור הפונקציה f':

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 + |\alpha_n|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,dx < \infty$$

לכן $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} < \infty$

כעת,

$$|a_n \cos nx| \le |a_n| \le \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

וגם

$$|b_n \sin nx| \le |b_n| \le \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2}$$

וראינו ש

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|^2 + |b_n|^2} < \infty$$

ולכן ממבחןויירשטראס, סדרת הפונקציות

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנסת במידה שווה.

ממשפט דיריכלה, אנו יודעים ש $\lim_{m\to\infty} S_m(x) = f(x)$ באופן נקודתי ב $[-\pi,\pi]$, ולכן לסיכום $S_m(x)$ מתכנס במידה שווה ל f.

משפט 8 :

אם $f, f' \in E$, ול f קיימות קפיצות בנקודות

$$-\pi < d_1 < d_2 < \ldots < d_m \le \pi$$

ובכל קטע (d_i, d_{i+1}) הפונקציה רציפה, אזי בכל קטע סגור $[a,b]$ שלא כולל אף נקודה d_k, טור פורייה של f מתכנס ל f במידה שווה.

דוגמא 9 :

היכן מתכנס הטור של הפונקציה $f(x) = x$ במידה שווה?

פתרון :

ראינו ש

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n}$$

טור זה לא יכול להתכנס במידה שווה, כי $-\pi = x(-\pi) \ne x(\pi) = \pi$.

ממשפט 8, טור פורייה של x מתכנס במידה שווה ל x בקטע $[-b,b]$ לכל $0 < b < \pi$. זוהי התכנסות במידה שווה על תת-קטעים.

משפט 9 :

אם f רציפה ו $f(-\pi) = f(\pi)$ ו $f' \in E$, אז

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_m(x) \right|^2 dx = 0$$

הוכחה :

תזכורת לגבי שוויון פרסבל : המערכת האורתונורמלית $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx \right\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת סגורה, כלומר

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_m(x) \right|^2 dx = 0$$

וראינו שקיום גבול זה שקול לקיום שוויון פרסבל. ממשפט 7,

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנסת במידה שווה ל f.

כלומר, עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים $M = M(\varepsilon)$ כך שעבור כל $m \ge M$, $\left| f(x) - S_m(x) \right| < \varepsilon$ לכל x.

ניקח $m \ge M(\varepsilon)$, ואז

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_m(x) \right|^2 dx \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 dx = 2\varepsilon^2$$

ולכן

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_m(x) \right|^2 dx = 0 .$$

משפט 10 : שוויון פרסבל המוכלל

יהיו טורי פורייה הבאים

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$g(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx + d_n \sin nx$$

אזי

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{a_0\overline{c_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{c_n} + b_n\overline{d_n}$$

נשים לב שאם $g = f$, מקבלים את שוויון פרסבל.

תופעת Gibbs

בטורי פורייה, בנקודות שיש קפיצה, רואים שישנה בליטה של כ 9% מערך הקפיצה בערכי הטור ליד איזור הקפיצה.

משפט גיבס :

תהי f בעלת נקודת אי רציפות x_0 , בעלת גבולות מימין ומשמאל בנקודה, אזי קיימת סדרה $x_n < x_0$,
המקיימת $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ כך ש

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(f,x_n)-f(x_n)}{f(a^-)-f(a^+)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{1}{2} \approx 0.09$$

כאשר

$$S_n(f,x_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos nx_n + b_m \sin nx_n$$

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה

נשאל את עצמנו, האם $f_m \to f$ גורר $\int f_m \to \int f$? כלומר האם $\lim\int f_m = \int \lim f_m$? מסתבר שבד"כ זה לא נכון.

האם כאשר נתון $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$, אז $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nx + nb_n \cos nx$?
כלומר האם הטור גזיר-איבר-איבר ? בד"כ לא.

ניקח את הטור הידוע $x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$.

ידוע ש $(x)' = 1$, כלומר טור פורייה של $(x)'$ הוא 1. אבל אם נגזור את הטור של x איבר-איבר, נקבל:

$\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}\right)' = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$, וזה לא טור פורייה של שום פונקציה כי המקדמים $\{a_n\}$ פה לא שואפים כלל ל 0.

משפט 11 :

אם $f(x)$ רציפה ב $[-\pi,\pi]$ וגם $f(\pi) = f(-\pi)$ וגם $f' \in E$ אז אפשר לגזור איבר-איבר את הטור של $f(x)$ וכך לקבל את הטור של $f'(x)$

כלומר אם מתקיימים תנאי המשפט, אז ניתן לגזור את הטור של $f(x)$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ולקבל את הטור של $f'(x)$:

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$$

רעיון ההוכחה :

כאשר הוכחנו את משפט 7 שאומר שאם התנאים של משפט 11 מתקיימים אז הטור

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

מתכנס במידה שווה, הראנו גם ש

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx - na_n \sin nx$$

הערה :

טור פורייה של f' מתכנס לפי דיריכלה, כי $f' \in E$, אך לא מובטחת התכנסות במ״ש של f' .

משפט 12 :

תהי $f(x) \in E$ וטור פורייה שלה

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

אזי ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר של הטור, כלומר :

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx}{n} - \frac{b_n}{n}(\cos nx - \cos n\pi)$$

נשים לב שהטור שקיבלנו הוא אינו טור פורייה.

הוכחה :

נגדיר את הפונקציה

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} \in E$$

נבחין שמתקיים השוויון

$$g(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - \frac{a_0\pi}{2} = a_0\pi - \frac{a_0\pi}{2} = \frac{a_0\pi}{2} = g(-\pi)$$

כעת, $g'(x) = f(x) - \frac{a_0}{x}$, כלומר $g' \in E$.

g מקיימת את תנאי משפט 11 ולכן גזירה איבר-איבר. לכן אם

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx$$

אז

$$g'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -A_n \sin nx + nB_n \cos nx$$

אבל

$$g'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

ולכן

$$a_n = nB_n \quad , \quad b_n = -nA_n \quad \Rightarrow \quad B_n = \frac{a_n}{n} \quad , \quad A_n = -\frac{b_n}{n}$$

ואז נקבל את טור פורייה של $g(x)$:

$$g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx$$

מכיוון ש $g \in E$, $g(\pi) = g(-\pi)$ ו $g' \in E$, הטור של $g(x)$ מתכנס במידה שווה ל $g(x)$, ולכן נכתוב

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx$$

עד עתה קיבלנו : $\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx$. נציב $x = -\pi$ בשוויון :

$$\int_{-\pi}^{-\pi} f(t)\,dt - \frac{a_0(-\pi)}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos n(-\pi) + \frac{a_n}{n}\sin n(-\pi)$$

$$\frac{a_0\pi}{2} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos n\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{A_0}{2} = \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}\cos n\pi$$

ולכן

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{a_0 x}{2} = \frac{a_0\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}\cos n\pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n}\cos nx + \frac{a_n}{n}\sin nx$$

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin nx - \frac{b_n}{n}(\cos nx - \cos n\pi)\right]$$

טורי סינוסים וקוסינוסים

נניח ש f מוגדרת ב $[0,\pi]$. מכיוון שניתן להגדיר פונקציה אחרת $g \in E$ בקטע $[-\pi,\pi]$ שתראה בדיוק כמו f בקטע $[0,\pi]$, נסיק שישנם אינסוף טורי פורייה שמתכנסים, בקטע $[0,\pi]$ לפונקציה f.

הגדרה 24 : הרחבה זוגית

תהי f מוגדרת ב $[0,\pi]$. נגדיר את $\tilde{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

להיות ההרחבה הזוגית של f.

טור פורייה של $\tilde{f}$ הוא

$$\tilde{f} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

ובגלל היותה זוגית:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

הגדרה 25 : הרחבה אי-זוגית

תהי f מוגדרת ב $[0,\pi]$. נגדיר את $\hat{f}$ בקטע $[-\pi,\pi]$

$$\hat{f} = \begin{cases} f(x), & 0 < x \le \pi \\ 0, & 0 \\ -f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

להיות ההרחבה האי-זוגית של f.

טור פורייה של $\hat{f}$ הוא

$$\hat{f} \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ובגלל היותה אי-זוגית:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \hat{f}(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

הגדרה 26 :

תהי f רציפה למקוטעין, בעלת ערכים מרוכבים בקטע $[0,\pi]$. הטור

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

כאשר

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

נקרא טור **קוסינוס** של f בקטע $[0,\pi]$.

הגדרה 27:

תהי f רציפה למקוטעין, בעלת ערכים מרוכבים בקטע $[0,\pi]$. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

נקרא טור **סינוס** של f בקטע $[0,\pi]$.

תכונות:

1. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ הן מערכות אורתונורמליות ביחס למכפלה הפנימית
$$\langle f, g\rangle = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx \ ;$$
2. המערכות הנ"ל סגורות במרחב $E[0,\pi]$ עם המכפלה הפנימית שלעיל;
3. שוויון פרסבל:
עבור טור קוסינוסים: $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 \ ;$$
עבור טור סינוסים: $$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$
4. אם $f \in E'$ אז טור הקוסינוסים של f מתכנס ל $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$,
עבור $x=0$ הטור מתכנס ל $f(0^+)$ ועבור $x=\pi$ הטור מתכנס ל $f(\pi^-)$;
בטור הסינוסים, עבור $x=0$ ו $x=\pm\pi$ הטור שווה 0.
5. אם $f' \in E$ וגם f רציפה ב $[0,\pi]$, אז טור הקוסינוסים מתכנס ל f במידה שווה ב $[0,\pi]$;
אם $f' \in E$ וגם f רציפה ב $[0,\pi]$ וגם $f(0)=f(\pi)=0$, אז טור הסינוסים מתכנס ל f במידה שווה ב $[0,\pi]$.

דוגמא 10:

מצא את טור הקוסינוסים ואת טור הסינוסים של
$f(x)=\cos x$ ב $[0,\pi]$

פתרון:

טור קוסינוסים של f הוא $\cos x$.

טור סינוסים של f:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx\right)\sin nx$$

נחשב את b_n כאשר $n \neq 1$:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)x)+\sin((n-1)x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n+1}{n+1}\frac{(-1)^n+1}{n-1}\right] = \begin{cases}\frac{4n}{\pi(n^2-1)}, & n=2k \\ 0, & n=2k+1\end{cases}$$

ועבור $n=1$:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin xdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2xdx=0$$

ולכן נקבל את טור הסינוסים של $\cos x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\sin 2nx=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$$

כעת, אם נגדיר

$$g\left(x\right)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx$$

פונקציה זו תראה כמו $\cos x$ בקטע $\left[0,\pi\right]$ וכמו $-\cos x$ בקטע $\left[-\pi,0\right]$, כאשר $g\left(-\pi\right)=g\left(0\right)=g\left(\pi\right)=0$.

טורי פורייה בקטעים כלליים

כעת נדבר על קטעים סופיים וסגורים כלליים, לאו דווקא $\left[-\pi,\pi\right]$.

נרחיב את הגדרה 17:

נגדיר את $E\left[a,b\right]$ להיות מרחב הפונקציות שרציפות למקוטעין בקטע $\left[a,b\right]$ שמקבלות ערכים מרוכבים, עם מכפלה פנימית

$$\left\langle f,g\right\rangle = \frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

כעת נדבר על המערכת $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sin\frac{2n\pi x}{b-a},\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\right\}_{n=1}^{\infty}$, שמהווה מערכת אורתונורמלית וסגורה במרחב $E\left[a,b\right]$, ביחס למכפלה הפנימית שהגדרנו קודם

$$\left\langle f,g\right\rangle = \frac{2}{b-a}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx$$

הגדרה 28: טור פורייה בקטע $\left[a,b\right]$ כללי

תהי $f\in E\left[a,b\right]$. טור פורייה של f ב $\left[a,b\right]$ הוא

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}$$

כאשר

$$a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f\left(x\right)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

נשים לב שכמובן אם $b=\pi,a=-\pi$ נקבל את טור פורייה המוכר בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$.

שוויון פרסבל עבור טור פורייה בקטע כלשהו:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b\left|f\left(x\right)^2\right|dx=\frac{\left|a_0\right|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n\right|^2+\left|b_n\right|^2$$

נראה שהטור שהגדרנו לכל $\left[a,b\right]$ הוא הגיוני:

ניקח $f\in E\left[-c,c\right]$ ונבצע הצבה $t=\frac{\pi x}{c}$ ולכן $-\pi\le t\le\pi$ כאשר $-c\le x\le c$. נגדיר את הפונקציה

$$g\left(t\right)=f\left(\frac{ct}{\pi}\right)=f\left(x\right)$$

ומכיוון ש $f\in E\left[-c,c\right]$ והגדרנו את t, נקבל ש $g\in E\left[-\pi,\pi\right]$. כעת נוכל לכתוב את טור פורייה של g:

$$g\left(t\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(t\right)\cos ntdt,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(t\right)\sin ntdt$$

נציב כעת בחזרה $t=\frac{\pi x}{c},dt=\frac{\pi}{c}dx$ ונקבל את "טור פורייה" של f:

$$f\left(x\right)=g\left(t\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{c}+b_n\sin\frac{n\pi x}{c}$$

כאשר

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-c}^{c}f\left(x\right)\cos\left(n\frac{\pi x}{c}\right)\frac{\pi}{c}dx=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f\left(x\right)\cos\frac{n\pi x}{c}dx,\quad b_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f\left(x\right)\sin\frac{n\pi x}{c}dx$$

טור פורייה מרוכב בקטעים שונים

כידוע, כאשר אנו בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$

$$f\left(x\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)e^{-inx}dx$$

ובצורה כללית, בקטע $\left[a,b\right]$:

$$f\left(x\right)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{2n\pi x}{b-a}}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f\left(x\right)e^{-i\frac{2n\pi x}{b-a}}dx$$

נביט ב $f\in E\left[0,\pi\right]$. טור פורייה של f הוא:

$$f\left(x\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx$$

כאשר:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cos 2nxdx,\quad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\sin 2nxdx$$

נשים לב שטור זה שונה מטור סינוס או טור קוסינוס שהגדרנו עבור $f\in E\left[0,\pi\right]$ ע"י ההרחבות הזוגית והאי-זוגית.

שימוש של טורי פורייה – פתרון מד"ח

נפתור את משוואת החום ההומוגנית החד-ממדית, בעזרת טורי פורייה.
הצורה הכללית של בעית חום חד-מימדית בקטע סימטרי סופי:

$$\begin{cases}u_t-ku_{xx}=0, & -L<x<L,\quad t>0,\quad k>0\\ u\left(x,0\right)=f\left(x\right)\end{cases}$$

כאשר $u\left(x,t\right)$ היא פונקצית טמפרטורה.

בעזרת שיטת הפרדת משתנים, שנלמדת ביסודיות בקורס משוואות דיפרנציאליות חלקיות, ניתן להגיע לפתרון הכללי של משוואת החום שלעיל:

$$u\left(x,t\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n kt}\left(\cos\sqrt{\lambda_n}x+\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)$$

כאשר הערכים העצמיים המתקבלים הם

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\quad n\in\mathbb{N}$$

בעזרת החלת תנאי ההתחלה, ניתן לחשב את מקדמי הטור:

$$u\left(x,0\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda_n}x+\sin\sqrt{\lambda_n}x=f\left(x\right)$$

התמרת פורייה (Fourier Transform)

הגדרה 29:

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ המוגדרת לכל x. נגדיר את הפונקציה

$$F(\omega)\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

להיות התמרת פורייה של f, אם האינטגרל קיים.

מסמנים את ההתמרה גם $\mathbf{F}[f](\omega)$.

הערות:

1. ω ממשי;
2. $F(\omega)$ היא פונקציה;
3. ההתמרה (הטרנספורמציה) היא ליניארית, מעצם הגדרתה כאינטגרל, שהוא אופרטור ליניארי.

הגדרה 30:

נגדיר את G להיות מרחב הפונקציות שמוגדרות לכל $x\in\mathbb{R}$, המקבלות ערכים מרוכבים, שהן רציפות למקוטעין ואינטגרביליות בהחלט.

הסברים:

1. רציפות למקוטעין לכל $x\in\mathbb{R}$: כאשר יש רציפות למקוטעין על כל קטע סופי. (יכולות להיות אינסוף נקודות אי-רציפות, רק שהן לא יוצרות תת-קטע שבו אין רציפות)
2. אינטגרביליות בהחלט: כאשר $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ קיים וסופי. מאינטגרביליות בהחלט נובעת אינטגרביליות.

דוגמא 11:

חשב את התמרת פורייה של הפונציה

$$f_b(x)=\begin{cases}1, & |x|\le b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

פתרון:

התמרת פורייה של $f_b(x)$ היא:

$$F_b(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-b}^{b}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-i\omega b}}{-i\omega}-\frac{e^{i\omega b}}{-i\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}}{i\omega}=\frac{1}{\pi\omega}\sin\omega b=\frac{b}{\pi}\operatorname{sinc}\omega b$$

כאשר

$$\operatorname{sinc}x\triangleq\frac{\sin x}{x}$$

משפט 13:

תהי $f\in G$, אזי:

1. $F(\omega)$ קיימת לכל ω ממשי.
2. $F(\omega)$ היא פונקציה רציפה לכל ω.
3. $\lim_{\omega\to\pm\infty}F(\omega)=0$ (הלמה של רימן-לבג להתמרת פורייה).

הוכחה:

1. $f(x)e^{-i\omega x}$ גם רציפה למקוטעין. בנוסף, עבור ω ממשי, $|e^{-i\omega x}|=1$.

לכן

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)e^{-i\omega x}\right|dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$$

ולכן אינטגרל זה קיים וסופי, כי $f \in G$.

כלומר $f(x)e^{-i\omega x}$ אינטגרבילית בהחלט ולכן אינטגרבילית, כלומר $F(\omega)$ קיימת לכל ω ממשי.

2. נקבע $\omega \in R$. יש להראות ש $\lim_{h\to 0} F(\omega+h) = F(\omega)$, או $\lim_{h\to 0}\left[F(\omega+h)-F(\omega)\right]=0$:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega+h)x}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\right] = \frac{1}{2\pi}\lim_{h\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-i(\omega+h)x}-e^{-i\omega x}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{h\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\left(e^{-ihx}-1\right)dx\right]$$

נביט בביטוי :

$$\left|f(x)e^{-i\omega x}\left(e^{-ihx}-1\right)\right| = \left|f(x)\right|\left|e^{-i\omega x}\right|\left|e^{-ihx}-1\right| \le \left|f(x)\right|\cdot 1\cdot\left(\left|e^{-ihx}\right|+|1|\right) = 2\left|f(x)\right|$$

ניקח $\varepsilon > 0$. נחפש $\delta > 0$ כך שלכל $|h| < \delta$, מתקיים $\left|F(\omega+h)-F(\omega)\right| < \varepsilon$.

$f(x)$ אינטגרבילית בהחלט, ולכן קיים $M > 0$ כך ש

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{M}^{\infty}\left|f(x)\right|dx + \int_{-\infty}^{M}\left|f(x)\right|dx\right) < \frac{\varepsilon}{4}$$

(כלומר קצוות האינטגרציה קטנים כרצוננו), ולכן :

$$\frac{1}{2\pi}\left(\int_{M}^{\infty}\left|f(x)e^{-i\omega x}\left(e^{-ihx}-1\right)\right|dx + \int_{-\infty}^{M}\left|f(x)e^{-i\omega x}\left(e^{-ihx}-1\right)\right|dx\right) \le \frac{1}{2\pi}\left(\int_{M}^{\infty}2\left|f(x)\right|dx + \int_{-\infty}^{M}2\left|f(x)\right|dx\right) =$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left(\int_{M}^{\infty}\left|f(x)\right|dx + \int_{-\infty}^{M}\left|f(x)\right|dx\right) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נטפל ב $\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} f(x)e^{-i\omega x}\left(e^{-ihx}-1\right)dx$. בגלל ש $f(x)e^{-i\omega x}$ רציפה למקוטעין בקטע $[-M,M]$, אז $f(x)e^{-i\omega x}$ חסומה ב $[-M,M]$, כלומר $\left|f(x)e^{-i\omega x}\right| \le L$ ל $x \in [-M,M]$.

$\left(e^{-ihx}-1\right)$ רציפה, ו $\lim_{h\to 0}\left(e^{-ihx}-1\right)=0$ במידה שווה ב $[-M,M]$, כלומר קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|h| < \delta$, מתקיים $\left|e^{-ihx}-1\right| < \frac{\varepsilon\pi}{2ML}$.

ולכן

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} f(x)e^{-i\omega x}\left(e^{-ihx}-1\right)dx\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\left|f(x)e^{-i\omega x}\right|\left|e^{-ihx}-1\right|dx \le \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M} L\frac{\varepsilon\pi}{2ML}dx = \frac{\varepsilon}{2}$$

3. רעיון ההוכחה :

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = \lim_{\omega\to\pm\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{\omega\to\pm\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) i\sin\omega x dx\right)$$

מספיק והכרחי להראות ש $\lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx$ וגם $\lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) i\sin\omega x dx$

הלמה של רימן-לבג שהכרנו : $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0$

ובעצם, הלמה של רימן-לבג להתמרת פורייה היא

$$\lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx = 0 \quad , \quad \lim_{\omega\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx = 0$$

דוגמה 12:

חשב את התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x)=e^{-|x|}$$

פתרון:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-(x+i\omega x)}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{x-i\omega x}dx=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(x+i\omega x)}}{-(x+i\omega)}\right]_0^\infty+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{x-i\omega x}}{x-i\omega}\right]_{-\infty}^0$$

כעת, עפ"י ההגדרה של אינטגרל מוכלל, אנו מקבלים

$$\left.\frac{e^{-(x+i\omega x)}}{-(1+i\omega)}\right|^\infty=\lim_{M\to\infty}\left.\frac{e^{-(x+i\omega x)}}{-(1+i\omega)}\right|^M=\lim_{M\to\infty}\frac{e^{-(M+i\omega M)}}{-(1+i\omega)}=\frac{1}{-(1+i\omega)}\lim_{M\to\infty}e^{-M}e^{-i\omega M}=0$$

כי $e^{-i\omega M}$ פונקציה חסומה. ולכן נקבל:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-(x+i\omega x)}}{-(x+i\omega)}\right]_0^\infty+\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{x-i\omega x}}{x-i\omega}\right]_{-\infty}^0=\frac{1}{2\pi}\left(0-\frac{1}{-(x+i\omega)}+\frac{1}{1-i\omega}-0\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1+i\omega}+\frac{1}{1-i\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\frac{2}{\left(1+\omega^2\right)}=\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}$$

דוגמה 13:

חשב את התמרת פורייה של הפונקציה

$$f(x)=e^{-x^2}$$

פתרון:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx$$

מכיוון ש e^{-x^2} אינטגרבילית בהחלט, ניתן לגזור את ההתמרה לפי ω בצורה הבאה:

$$F'(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-ixe^{-x^2}e^{-i\omega x}dx=\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-2xe^{-x^2}e^{-i\omega x}dx=$$

$$=\frac{i}{4\pi}\left[\cancel{\left.e^{-x^2}e^{-i\omega x}\right|_{-\infty}^{\infty}}-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}(-i\omega)e^{-i\omega x}dx\right]=-\frac{\omega}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-i\omega x}dx$$

$$F'(\omega)=-\frac{\omega}{2}F(\omega)$$

לא חישבנו את ההתמרה, אך מצאנו קשר בין נגזרת ההתמרה להתמרה:

$$F'(\omega)+\frac{\omega}{2}F(\omega)=0$$

זוהי משוואה דיפרנציאלית רגילה הומוגנית, ופתרונה הוא

$$F(\omega)=Ce^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

אך התמרת פורייה מוגדרת היטב, ולא עם קבוע שרירותי, ולכן יש לחשב את הקבוע:

$$C=F(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\pi}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

בגלל תוצאה ידועה: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. ולכן לסיכום נקבל:

$$F(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

תכונות ונוסחאות לגבי התמרות פורייה

1. התמרת פורייה היא פעולה ליניארית, כלומר
$$\mathbf{F}\left[af+bg\right](\omega)=aF(\omega)+bG(\omega)$$
2. אם $f\in G$ פונקציה ממשית אז $\overline{F(\omega)}=F(-\omega)$
3. אם $f\in G$ פונקציה ממשית אז
$$\operatorname{Re}F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx,\qquad \operatorname{Im}F(\omega)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$
נשים לב שהחלק הממשי הוא זוגי והחלק המדומה הוא אי-זוגי.
4. אם $f\in G$ פונקציה ממשית וזוגית, אז $F(\omega)$ ממשית וזוגית, ואז
$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx$$
5. אם $f\in G$ פונקציה ממשית ואי-זוגית, אז $F(\omega)$ מדומה טהורה ואי-זוגית, ואז
$$F(\omega)=-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx$$
6. נוסחת ההזזה:
יהיו $a,b\in\mathbb{R}$, ו $a\neq 0$ ותהי $f\in G$, ונגדיר $g(x)=f(ax+b)$, אזי
$$G(\omega)=\frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$
אם $b=0$, אנו מותחים את הפונקציה f בגורם a, ואז
$$G(\omega)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

דוגמה 14:
ראינו כי
$$f(x)=e^{-|x|}\quad\Rightarrow\quad F(\omega)=\frac{1}{\pi\left(\omega^2+1\right)}$$
ניקח $a>0$ ונביט בפונקציה
$$g(x)=e^{-a|x|}=e^{-|ax|}=f(ax)$$
ולכן
$$G(\omega)=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)=\frac{1}{a}\frac{1}{\pi\left(\left(\frac{\omega}{a}\right)^2+1\right)}=\frac{a}{\pi\left(\omega^2+a^2\right)}$$
ניקח $a=1$ ונביט בפונקציה
$$g(x)=f(x+b)$$
ולכן
$$G(\omega)=e^{i\omega b}F(\omega)$$
כלומר, הזזה בזמן (של המשתנה x שמתאר את הזמן) שקולה לסיבוב בתדר (של המשתנה ω שמתאר את התדר)
ניקח $c\in\mathbb{R}$ ונביט בפונקציה
$$g(x)=e^{icx}f(x)$$
ולכן
$$G(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{icx}f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ix(\omega-c)}dx=F(\omega-c)$$
וזוהי המסקנה ההפוכה: סיבוב בזמן שקול להזזה בתדר.

7. נוסחאות המודולציה

תהי $f \in G$ ונגדיר $g(x)=f(x)\cos(ax)$, אזי

$$G(\omega)=\frac{F(\omega-a)+F(\omega+a)}{2}$$

תהי $f \in G$ ונגדיר $g(x)=f(x)\sin(ax)$, אזי

$$G(\omega)=\frac{F(\omega-a)-F(\omega+a)}{2i}$$

8. גזירה של התמרת פורייה

תהי $f(x)$ רציפה, $f,f'\in G$, וגם $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, אזי:

$$\mathbf{F}\left[f'(x)\right](\omega)=i\omega F(\omega)$$

הוכחה:

$$\mathbf{F}\left[f'(x)\right](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\omega)e^{-i\omega x}dx\right]$$

מכיוון ש $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$:

$$\mathbf{F}\left[f'(x)\right](\omega)=\frac{i\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=i\omega F(\omega)$$

באותו אופן, עבור $f'(\omega)$ רציפה ו $f',f''\in G$, נקבל

$$\mathbf{F}\left[f''(x)\right](\omega)=i\omega\mathbf{F}\left[f'(x)\right](\omega)=i\omega\left(i\omega F(\omega)\right)=-\omega^2F(\omega)$$

ובאופן כללי, נקבל את הקשר:

$$\mathbf{F}\left[f^{(n)}(x)\right](\omega)=(i\omega)^n F(w)$$

9. תהי $f(x),xf(x)\in G$ ונגדיר $g(x)=xf(x)$, אזי

$$\frac{d}{d\omega}F(\omega)=\frac{d}{d\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{d}{d\omega}e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-i\omega x}dx=-i\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx=-iG(\omega)$$

$$\Rightarrow\ G(\omega)=i\frac{d}{d\omega}F(\omega)$$

דוגמה 15:

חשב את התמרת פורייה של הפונקציה

$$g_b(x)=\begin{cases}x, & |x|\le b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

פתרון:

ראינו כי התמרת פורייה של הפונקציה

$$f_b(x)=\begin{cases}1, & |x|\le b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

היא

$$F_b(\omega)=\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}$$

ובנוסף, רואים כי $g_b(x)=xf_b(x)$, ולכן לפי תכונה 9:

$$G_b(\omega)=i\frac{d}{d\omega}\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}=i\frac{\omega\pi\cos\omega b-\pi\sin\omega b}{\omega^2\pi^2}=i\frac{\omega\cos\omega b-\sin\omega b}{\omega^2\pi}$$

התמרת פורייה הפוכה

משפט 14 : התמרת פורייה הפוכה

תהי $f\in G$ וקיימות הנגזרות החד-צדדיות של f בנקודה x, אזי

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\triangleq\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

ולכן נוכל להגדיר את התמרת פורייה ההפוכה :

$$f(x)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

באופן כללי, התמרת פורייה היא פעולה הפיכה עד כדי קבועים ושינוי הסימן ב $e^{i\omega x}$, וניתן להגדיר אותה באופנים שונים, כל עוד ההכפלה בקבוע מתקזזת, כלומר מכפלת הקבועים של שתי ההגדרות, ההתמרה וההתמרה ההפוכה, יוצאת $\frac{1}{2\pi}$ וכל עוד האינטגרציה היא פעם אחת עם $e^{i\omega x}$ ובפעם השנייה עם $e^{-i\omega x}$.

רעיון ההוכחה :

טור פורייה המרוכב של f בקטע $[-L,L]$ הוא

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{in\pi x}{L}}$$

כאשר

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx$$

כעת נגדיר $\Delta\omega\triangleq\frac{\pi}{L}$ שיהיה אורך הקטע האינפיניטסימאלי כאשר מבצעים אינטגרציה על קטע $[-L,L]$ כאשר $L\to\infty$. ולכן :

$$c_n=\Delta\omega\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-in\Delta\omega x}dx\xrightarrow[L\to\infty]{}\Delta\omega F(n\Delta\omega)$$

ולכן :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{in\pi x}{L}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega F(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega x}$$

וזהו סכום רימן עבור הפונקציה $F(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega x}$ ולכן :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Delta\omega F(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega x}\xrightarrow[L\to\infty]{}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

סיכום ביניים : הגדרנו את התמרת פורייה ואת התמרת פורייה ההפוכה :

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

התמרה כפולה

אם $f,\hat{f}\in G$ נרצה לחשב למה שווה הפונקציה $\mathbf{F}[F(\omega)](x)$, כלומר ההתמרה של ההתמרה :

$$\mathbf{F}[F(\omega)](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{-i\omega x}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega(-x)}d\omega=\frac{1}{2\pi}f(-x)$$

ולכן $\mathbf{F}[F(\omega)](x)=\frac{1}{2\pi}f(-x)$

דוגמא 16:

בצע את ההתמרה ההפוכה עבור התמרת הפונקציה

$$f_b(x)=\begin{cases}1, & |x|\le b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

פתרון:

חישבנו כבר את התמרת פורייה של $f_b(x)$:

$$F_b(\omega)=\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}$$

מהנוסחה ההפוכה:

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}e^{i\omega x}d\omega=\frac{f_b(x^+)+f_b(x^-)}{2}$$

ולכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}e^{i\omega x}d\omega=\begin{cases}1, & |x|<b\\ \frac{1}{2}, & x=\pm b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

ובעצם

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}\cos\omega x d\omega=\begin{cases}1, & |x|<b\\ \frac{1}{2}, & x=\pm b\\ 0, & |x|>b\end{cases}$$

בגלל שהפונקציה

$$i\frac{\sin\omega b}{\omega\pi}\sin\omega x$$

היא פונקציה אי-זוגית. נוכל לקבל את הנוסחא, עבור $a,b>0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega b}{\omega}\cos(\omega a)d\omega=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a<b\\ \frac{\pi}{4}, & a=b\\ 0, & a>b\end{cases}$$

וכאשר $a=0$ מקבלים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega b}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}$$

דוגמא 17:

חשב את ההתמרה של

$$g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

פתרון:

קיבלנו שהתמרת $f(x)=e^{-|x|}$ היא $F(\omega)=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$, ולכן

$$f(x)=e^{-|x|}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{i\omega x}d\omega$$

ועבור $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$, נוכל לחשב את התמרת פורייה כך:

$$G(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}e^{-i(-\omega)x}d\omega=\frac{1}{2}e^{-|-\omega|}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$$

נוסחת פלנשרל (Plancheral)

נניח ש $f \in G$ ו $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, אז

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

נוסחת פלנשרל המוכללת

נניח ש $f, g \in G$ ו $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$, אז

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega$$

רעיון ההוכחה:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{G(\omega)}d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\omega x}dx\right)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\overline{g(x)}e^{i\omega x}dxd\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega\right)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

דוגמא 18:

חשב את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}d\omega$$

פתרון:

לפי נוסחת פלנשרל עבור $e^{-|x|}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|x|}\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(1+\omega^2)^2}d\omega$$

אבל

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|e^{-|x|}\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|}dx = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-2x}dx = \frac{1}{\pi}\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi}$$

ולכן

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(1+\omega^2)^2}d\omega = \frac{1}{2\pi} \quad\Rightarrow\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}d\omega = \frac{\pi}{2}$$

דוגמא 19:

חשב את האינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega b\sin\omega a}{\omega^2}d\omega$$

פתרון:

לפי נוסחת פלנשרל המוכללת עבור

$$f_b(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le b \\ 0, & |x| > b \end{cases} \quad\Rightarrow\quad F_b(\omega) = \frac{\sin\omega b}{\omega\pi}$$

ופונקציה דומה $f_a(x)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_a(x)f_b(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_a(\omega)F_b(\omega)d\omega$$

$$\frac{1}{2\pi}2\min\{a,b\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega b}{\omega\pi}\frac{\sin\omega a}{\omega\pi}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega b\sin\omega a}{\omega^2}d\omega = \pi\min\{a,b\}$$

קונבולוציה (Convolution)

הגדרה 31 : קונבולוציה

$$(f*g)(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

כאשר האינטגרל מתכנס.

ניתן לומר שפעולת הקונבולוציה מתארת את כמות החפיפה של הפונקציות f ו g אחת על השניה.

תכונות הקונבולוציה :

1. אם f,g אינטגרביליות בהחלט, אז $f*g$ קיימת וגם היא אינטגרבילית בהחלט
2. ע״י החלפת משתנים, רואים כי $(f*g)(x)=(g*f)(x)$
3. $(f*g)*h=f*(g*h)$
4. δ (דלתא של דירק, נראה הגדרה בהמשך) היא פונקצית היחידה עבור הקונבולוציה : $f*\delta=f$
5. $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$
6. כאשר $a\in\mathbb{C}$, $a(f*g)=(af)*g=f*(ag)$

משפט 15 : משפט הקונבולוציה

אם $f,g\in G$ אז הקונבולוציה קיימת והיא אינטגרבילית בהחלט, וגם מתקיים

$$\mathbf{F}[f*g](\omega)=2\pi F(\omega)G(\omega)$$

רעיון ההוכחה :

$$\mathbf{F}[f*g](\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\right)e^{-i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy\right)e^{-i\omega(x-y)}e^{-i\omega y}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)e^{-i\omega(x-y)}dx\right)e^{-i\omega y}g(y)dy$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{-i\omega y}g(y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi F(\omega)g(y)e^{-i\omega y}dy=2\pi F(\omega)G(\omega)$$

שימוש של התמרות פורייה – פתרון מד"ח

נפתור את משוואת החום ההומוגנית החד-ממדית, בעזרת התמרת פורייה.

הצורה הכללית של בעית חום חד-מימדית:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad k > 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

כאשר $u(x,t)$ היא פונקצית טמפרטורה ובנוסף נניח ש $u, u_t, u_x, u_{xx} \in G$.

נגדיר

$$U(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\omega x} dx$$

כלומר U היא התמרת פורייה ל $u(x,t)$ ביחס למשתנה x.

כעת נחשב את U_t:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x} dx$$

לפי הנתון, $u_t = ku_{xx}$ ולכן

$$\frac{\partial U}{\partial t}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ku_{xx}(x,t) e^{-i\omega x} dx = k\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t) e^{-i\omega x} dx = k\mathbf{F}\left[u_{xx}(x,t)\right](\omega,t)$$

ומתכונות התמרת פורייה:

$$\mathbf{F}\left[f''(x)\right](\omega) = -\omega^2 F(\omega)$$

ולכן

$$\mathbf{F}\left[u_{xx}(x,t)\right](\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$$

ואז קיבלנו את המשוואה

$$U_t = k\left(-\omega^2\right)U \quad \Rightarrow \quad U_t + k\omega^2 U = 0$$

וזוהי משוואה דיפרנציאלית רגילה שפתרונה הוא

$$U(\omega,t) = c(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

כעת, תנאי התחלה הוא $u(x,0) = f(x)$ ונרצה באמצעותו לחשב את הפונקציה $c(\omega)$. נציב בפתרון $t=0$:

$$U(\omega,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = F(\omega)$$

ולכן $c(\omega) = F(\omega)$, ולכן הפתרון הוא

$$U(\omega,t) = F(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

כלומר הפתרון הוא מכפלה של פונקציות. אם נמצא פונקציה $q(x,t)$ שהתמרת הפורייה שלה היא $Q(\omega) = e^{-k\omega^2 t}$, אזי גילינו שהפתרון הוא $U(\omega,t) = F(\omega)Q(\omega)$. וממשפט הקונבולוציה נקבל ש

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}(f * q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) q(x-y,t) dy$$

ראינו בעבר שהתמרת פורייה של $s(x) = e^{-x^2}$ היא $S(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$, ואם נגדיר $h(x) = cs(ax) = ce^{-a^2x^2}$, אז

$$H(\omega) = \frac{c}{a} S\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{c}{a}\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

נרצה לבחור קבועים a,c כך ש $H(\omega)=e^{-k\omega^2 t}$, כלומר

$$\begin{cases}\frac{1}{4a^2}=kt\\ \frac{c}{a}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2\sqrt{kt}}\\ c=2\sqrt{\pi}a=\sqrt{\frac{\pi}{kt}}\end{cases}$$

ולכן מצאנו את הפונקציה $q(x,t)$:

$$q(x,t)=ce^{-a^2x^2}\Big|_{a=\frac{1}{2\sqrt{kt}},c=\sqrt{\frac{\pi}{kt}}}=\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

ולכן הפתרון הוא

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)q(x-y,t)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\sqrt{\frac{\pi}{kt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}dy$$

פונקציות חסומות בתדר ומשפט הדגימה של Shannon

הגדרה 32:

פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=0\ :\ \forall|x|>M$, נקראת חסומה בזמן בקטע $[-M,M]$.

הגדרה 33:

פונקציה $f(x)$ המקיימת $F(\omega)=0\ :\ \forall|\omega|\geq M$, נקראת חסומה בתדר בקטע $[-M,M]$.

מסנן Low-Pass

תהי $f\in G$ ו $F(\omega)$ התמרת הפורייה שלה. נעביר את הפונקציה F במסנן Low-Pass, כלומר נקבל פונקציה $F_L(\omega)$ שהגדרתה

$$F_L(\omega)=\begin{cases}F(\omega), & |\omega|\leq L\\ 0, & |\omega|>L\end{cases}$$

נרצה לחשב את f_L כאשר f_L פונקציה שהתמרת הפורייה שלה היא $F_L(\omega)$.

אם נגדיר

$$G_L(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leq L\\ 0, & |\omega|>L\end{cases}$$

אז $F_L(\omega)=F(\omega)G_L(\omega)$, ובעזרת משפט הקונבולוציה נוכל לחשב את f_L.

נוכל לחשב את $g_L(x)$, שהתמרת פורייה שלה היא $G_L(\omega)$:

$$g_L(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G_L(\omega)e^{i\omega x}d\omega=\int_{-L}^{L}e^{i\omega x}d\omega=\frac{1}{ix}\left[e^{i\omega x}\right]_{-L}^{L}=2\frac{\sin Lx}{x}$$

מכיוון ש $F_L(\omega)=F(\omega)G_L(\omega)$ וממשפט הקונבולוציה, נקבל

$$f_L(x)=\frac{1}{2\pi}(f*g_L)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)g_L(x-y)dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{\sin\left[L(x-y)\right]}{x-y}dy$$

תוצאה:

פונקציה f חסומה בתדר בקטע $[-M,M]$, אסי"ם

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{\sin\left[L(x-y)\right]}{x-y}dy$$

משפט 16 : משפט הדגימה של שנון

תהי $f \in G$ וגם f חסומה בתדר בקטע $[-M, M]$, כלומר $F(\omega)=0$ לכל $|\omega| > L$, אזי

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$$

הוכחה :

מהתמרת פורייה ההפוכה, $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$.

מכיוון שנתון ש f חסומה בתדר, הרי ש

$$f(x)=\int_{-L}^{L} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

עבור $x=\frac{n\pi}{L}$ נקבל

$$f\left(\frac{n\pi}{L}\right)=\int_{-L}^{L} F(\omega)e^{i\omega\frac{n\pi}{L}}d\omega$$

טור פורייה מרוכב בקטע $[-L, L]$ של הפונקציה $h(x)$ הוא

$$h(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}, \qquad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}dx$$

ולכן נוכל לכתוב את $F(\omega)$ כך :

$$F(\omega)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}, \quad c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(\omega)e^{\frac{in\pi\omega}{L}}d\omega=\frac{1}{2L}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)$$

ולכן קיבלנו את הטור

$$F(\omega)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2L}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$$

נגדיר כעת את

$$F_L(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2L}f\left(\frac{n\pi}{L}\right)e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$$

$F(\omega)$ פונקציה חסומת תדר, ולעומת זאת $F_L(\omega)$ פונקציה מחזורית $2L$, ולכן

$$F(\omega)=F_L(\omega)G_L(\omega)$$

כאשר הגדרנו

$$G_L(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le L\\ 0, & |\omega|>L\end{cases}$$

ולכן

$$F(\omega)=\left(\frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}\right)G_L(\omega)=\frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(f\left(\frac{n\pi}{L}\right)e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}G_L(\omega)\right)$$

ולכן נרצה לחפש את $g_{L,n}(x)$ שהתמרת פורייה שלה היא $G_L(\omega)$ $e^{-\frac{in\pi\omega}{L}}$. מתקבל ש

$$g_{L,n}(x)=2\frac{\sin L\left(x-\frac{n\pi}{L}\right)}{x-\frac{n\pi}{L}}=2L\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$$

ולכן

$$f(x)=\frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)2L\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{L}\right)\frac{\sin(Lx-n\pi)}{Lx-n\pi}$$

התמרת לפלס (Laplace Transform)

הגדרה 34: התמרת לפלס

תהי פונקציה $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ המוגדרת ורציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$. נגדיר כך את התמרת לפלס:

$$\mathbf{L}[f](s)\triangleq\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

לכל s שעבורו האינטגרל קיים

הערות / תכונות

1. נראה את הקשר בין התמרת פורייה והתמרת לפלס.
ניקח פונקציה שמקיימת $f(x)=0$ עבור $x<0$, ואז התמרת לפלס של f היא
$$\mathbf{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty e^{-i(-is)t}f(t)\,dt=F(-is)$$
כלומר, התמרת לפלס היא התמרת פורייה בנקודה $\omega=-is$.
2. ליניאריות התמרת לפלס:
כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ ו f,g פונקציות המוגדרות ורציפות למקוטעין בקטע $[0,\infty)$:
$$\mathbf{L}[af+bg](s)=a\mathbf{L}[f](s)+b\mathbf{L}[g](s)$$
כאשר קיימות שתי ההתמרות באגף ימין.

דוגמא 20:

חשב את התמרת לפלס של $f(t)=1$

פתרון:

ע"פ ההגדרה:

$$\mathbf{L}[1](s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1dt=\lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-st}dt=\lim_{L\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^L=\lim_{L\to\infty}\left(\frac{1-e^{-sL}}{s}\right)$$

וגבול זה לא קיים עבור $s\le 0$.

עבור $s>0$, הגבול קיים, ולכן

$$\mathbf{L}[1](s)=\lim_{L\to\infty}\left(\frac{1-e^{-sL}}{s}\right)=\frac{1}{s},\qquad s>0$$

דוגמא 21:

חשב את התמרת לפלס של $f(t)=e^{at}$, כאשר $a>0$.

פתרון:

ע"פ ההגדרה ושימוש בחישוב מדוגמה 20:

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{1}{s-a},\qquad s>a$$

דוגמא 22:

חשב את התמרת לפלס של $f(t)=e^{zt}$, כאשר $z\in\mathbb{C}$.

פתרון:

ע"פ ההגדרה:

$$\mathbf{L}\left[e^{zt}\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{zt}dt\underset{z=x+iy}{=}\int_0^\infty e^{-(s-x-iy)t}dt=\int_0^\infty e^{-(s-x-iy)t}dt$$
$$=\int_0^\infty e^{-(s-x)t}e^{iyt}dt=\ldots=\left[\frac{e^{-(s-z)t}}{-(s-z)}\right]_0^\infty=\frac{1}{s-z},\qquad s>\operatorname{Re}z$$

דוגמא 23:

חשב את התמרת לפלס של $f(t)=\sin at$ ושל $g(t)=\cos at$

פתרון:

ע"פ ההגדרה:

$$\mathbf{L}[\sin at](s) \underset{\sin at=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2i}\left(\mathbf{L}\left[e^{iat}\right](s)-\mathbf{L}\left[e^{-iat}\right](s)\right)=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia}-\frac{1}{s+ia}\right]$$

$$=\frac{a}{s^2-a^2}, \qquad s>0$$

וגם:

$$\mathbf{L}[\cos at](s) \underset{\cos at=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}\left(\mathbf{L}\left[e^{iat}\right](s)+\mathbf{L}\left[e^{-iat}\right](s)\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-ia}+\frac{1}{s+ia}\right]$$

$$=\frac{s}{s^2+a^2}, \qquad s>0$$

משפט 17:

תהי $f(t):\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{C}$ מוגדרת ורציפה למקוטעין בקטע $[0,\infty)$. נניח שקיים חסם אקספוננציאלי על $f(t)$, כלומר שקיימים קבועים $K>0$ ו a כך ש

$$\forall t>0: \qquad \left|f(t)\right|\le Ke^{at}$$

אזי התמרת לפלס $\mathbf{L}[f](s)$ קיימת לכל $s>a$.

רעיון ההוכחה:

התמרת לפלס של $f(t)$ היא

$$\mathbf{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

האינטגרנד שלנו הוא פונקציה רציפה למקוטעין, ולכן אינטגרבילית אם היא אינטגרבילית בהחלט. נבדוק אם היא אינטגרבילית בהחלט:

$$\int_0^\infty\left|e^{-st}f(t)\right|dt=\int_0^\infty e^{-st}\left|f(t)\right|dt\le\int_0^\infty e^{-st}Ke^{at}dt=K\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt=\frac{K}{s-a}, \qquad s>a$$

כאשר נעזרנו בחישובים שלנו מהדוגמאות הקודמות.

קיבלנו שהאינטגרל מתכנס עבור $s>a$, ולכן התמרת לפלס $\mathbf{L}[f](s)$ קיימת עבור $s>a$.

בנוסף, באופן דואלי להתמרת פורייה, מתקיים

$$\lim_{s\to\infty}\mathbf{L}[f](s)=0$$

כי

$$\left|\mathbf{L}[f](s)\right|\le\frac{K}{s-a}\xrightarrow[s\to\infty]{}0$$

משפט 18:

תהי $f(t)$ רציפה ו $f'(t)$ רציפה למקוטעין וקיים חסם אקספוננציאלי על $f(t)$, כלומר שקיימים קבועים $K>0$ ו a כך ש

$$\forall t>0: \qquad \left|f(t)\right|\le Ke^{at}$$

אזי התמרת לפלס של $f'(t)$, $\mathbf{L}\left[f'(t)\right](s)$, קיימת ו

$$\mathbf{L}\left[f'(t)\right](s)=s\mathbf{L}[f](s)-f(0)$$

רעיון ההוכחה:

מכיוון ש $f(t)$ רציפה, נוכל לגזור בחלקים ולקבל

$$\mathbf{L}\left[f'(t)\right](s)=\int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^L-\int_0^L(-s)e^{-st}f(t)\,dt=e^{-sL}f(L)-f(0)+s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt$$

נסתכל כעת על הגבול

$$\lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt=\lim_{L\to\infty}\left[e^{-sL}f(L)-f(0)\right]+\lim_{L\to\infty}\left[s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt\right]$$

עבור $s>a$, מתקיים

$$\left|e^{-sL}f(L)\right|=e^{-sL}\left|f(L)\right|\le e^{-sL}Ke^{aL}=Ke^{-(s-a)L}\xrightarrow[s>a]{L\to\infty}0$$

ובנוסף,

$$\lim_{L\to\infty}\left[s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt\right]\underset{s>a}{=}s\mathbf{L}[f](s)$$

ולכן לסיכום, קיבלנו ש

$$\lim_{L\to\infty}\int_0^L e^{-st}f'(t)\,dt=\lim_{L\to\infty}\left[e^{-sL}f(L)-f(0)\right]+\lim_{L\to\infty}\left[s\int_0^L e^{-st}f(t)\,dt\right]=s\mathbf{L}[f](s)-f(0)$$

תוצאה:

נוכל לחשב את התמרת לפלס של הנגזרת השנייה של $f(t)$:

$$\mathbf{L}[f''](s)=s\mathbf{L}[f'](s)-f'(0)=s\left[s\mathbf{L}[f](s)-f(0)\right]-f'(0)=s^2\mathbf{L}[f](s)-sf(0)-f'(0)$$

וכך נקבל את המשפט הבא:

משפט 19:

תהי $f^{(n)}(t)$ רציפה למקוטעין ויהיו $f(t),f'(t),\dots,f^{(n-1)}(t)$ רציפות וקיימים חסמים אקספוננציאלים על $f(t),f'(t),\dots,f^{(n-1)}(t)$, כלומר קיימים קבועים $K>0$ ו a כך ש

$$\forall t>0,i=0,1,\dots,n-1:\qquad \left|f^{(i)}(t)\right|\le Ke^{at}$$

אזי התמרת לפלס של $f^{(n)}(t)$, $\mathbf{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)$, קיימת כאשר $s>a$ ומקיימת

$$\mathbf{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=s^n\mathbf{L}[f](s)-f^{(n-1)}(0)-sf^{(n-2)}(0)\dots-s^{n-2}f'(0)-s^{n-1}f(0)$$

דוגמא 24:

חשב את התמרת לפלס של $f(t)=t^n$

פתרון:

קל לראות ש $f^{(n)}=n!$, ולכן, כשאנו נעזרים בתוצאה שקיבלנו מקודם, $s>0$, $\mathbf{L}[1](s)=\dfrac{1}{s}$, נקבל ש

$$\mathbf{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=\mathbf{L}[n!](s)=\frac{n!}{s},\qquad s>0$$

בנוסף $f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$, ולכן, ע"פ משפט 19:

$$\mathbf{L}\left[f^{(n)}(t)\right](s)=s^n\mathbf{L}[f](s)-f^{(n-1)}(0)-sf^{(n-2)}(0)\dots-s^{n-2}f'(0)-s^{n-1}f(0)$$

$$\frac{n!}{s}=s^n\mathbf{L}[f](s)$$

$$\mathbf{L}\left[t^n\right](s)=\frac{n!}{s^{n+1}},\qquad s>0$$

משפט 20:

תהי $f(t)$ רציפה למקוטעין וקיים חסם אקספוננציאלי על $f(t)$, כלומר קיימים קבועים $K>0$ ו a כך ש

$$\forall t>0:\qquad \left|f(t)\right|\le Ke^{at}$$

אזי

$$\mathbf{L}\left[t^nf(t)\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathbf{L}[f](s)$$

רעיון ההוכחה של המשפט עבור $n=1$:

$$-\frac{d}{ds}\mathbf{L}[f](s)=-\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=-\int_0^\infty\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^\infty te^{-st}f(t)\,dt=\mathbf{L}\left[tf(t)\right](s)$$

דוגמא 25:

חשב את התמרת לפלס של $f(t)=t^n$

פתרון:

ע"פ משפט 20,

$$\mathbf{L}\left[t^n\cdot 1\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathbf{L}[1](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s}=(-1)^n(-1)^n\frac{n!}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

משפט 21:

אם קיימת התמרת לפלס עבור $f(t)$, לכל $s>A$, אזי

$$\mathbf{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\mathbf{L}[f](s-a)$$

לכל $s>A+a$

הוכחה:

$$\mathbf{L}\left[e^{at}f(t)\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=\mathbf{L}[f](s-a)$$

משפט 22:

עבור $a>0$

$$\mathbf{L}\left[f(at)\right](s)=\frac{1}{a}\mathbf{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

הוכחה:

$$\mathbf{L}\left[f(at)\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt\underset{r=at}{=}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}r}f(r)\frac{1}{a}dr=\frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}r}f(r)\,dr=\frac{1}{a}\mathbf{L}[f]\left(\frac{s}{a}\right)$$

דוגמא 26:

חשב את התמרת לפלס של

$$f(t)=e^{at}\sin bt,\qquad a,b\in\mathbb{R}$$
$$f(t)=e^{at}\cos bt,\qquad a,b\in\mathbb{R}$$
$$f(t)=e^{at}t^n$$

פתרון:

ע"פ משפט 21,

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s)=\mathbf{L}[\sin bt](s-a)$$

את ההתמרה של $\sin at$ ושל $\cos at$ חישבנו:

$$\mathbf{L}[\sin at](s)=\frac{a}{s^2+a^2},\qquad \mathbf{L}[\cos at](s)=\frac{s}{s^2+a^2},\qquad s>0$$

ולכן

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s)=\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\qquad s>a$$

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s)=\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2},\qquad s>a$$

את ההתמרה של $e^{at}t^n$ נוכל לחשב בשתי דרכים:

$$\mathbf{L}\left[e^{at}t^n\right](s)=\mathbf{L}\left[t^n\right](s-a)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathbf{L}\left[e^{at}\right](s)$$

ונגיע לתשובה

$$\mathbf{L}\left[e^{at}t^n\right](s)=\mathbf{L}\left[t^n\right](s-a)=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

$$\mathbf{L}\left[e^{at}t^n\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathbf{L}\left[e^{at}\right](s)=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\frac{1}{s-a}=\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

כאשר $s>a$.

פתרון משוואה דיפרנציאלית רגילה בעזרת התמרת לפלס

נפתור את המשוואה

$$\begin{cases} ay''(t)+by'(t)+cy(t)=0 \\ y(0)=y_0 & ,t\geq 0 \\ y'(0)=y_1 \end{cases}$$

נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה:

$$\mathbf{L}\left[ay''(t)+by'(t)+cy(t)\right](s)=\mathbf{L}[0](s)=0$$

$$a\mathbf{L}\left[y''(t)\right](s)+b\mathbf{L}\left[y'(t)\right](s)+c\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=0$$

$$a\left(s^2\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)-y'(0)-sy(0)\right)+b\left(s\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)-y(0)\right)+c\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=0$$

$$a\left(s^2\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)-y_1-sy_0\right)+b\left(s\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)-y_0\right)+c\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=0$$

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)\cdot\left(as^2+bs+c\right)=ay_1+asy_0+by_0$$

הערה: as^2+bs+c שהתקבל הוא הפולינום האופייני של המשוואה.

לסיכום, קיבלנו פתרון להתמרת לפלס של $y(t)$:

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{ay_1+asy_0+by_0}{as^2+bs+c}$$

בהמשך נרצה לבדוק מתי ואיך ניתן לבצע את התמרת לפלס ההפוכה, כדי לקבל פתרון ל $y(t)$.

נסמן ב $\mathbf{L}^{-1}(t)$ את התמרת לפלס ההפוכה. מכיוון שהתמרת לפלס היא ליניארית, אזי גם התמרת לפלס ההפוכה $\mathbf{L}^{-1}(t)$ היא ליניארית.

בעזרת דוגמאות נראה כיצד מוצאים את התמרת לפלס ההפוכה במקרים פרטיים.

דוגמא 27: פתרון מד"ר עם שורשים ממשיים שונים

פתור את המשוואה

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=0, & t\geq 0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-1 \end{cases}$$

פתרון:

נבצע התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה. ראינו במקרה הכללי שנקבל

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{ay_1+asy_0+by_0}{as^2+bs+c}=\frac{s-4}{s^2-3s+2}$$

הפולינום האופייני לבעיה הוא $p(x)=s^2-3s+2=(s-1)(s-2)$.

מכיוון שהשורשים שונים, נוכל לכתוב:

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{s-4}{s^2-3s+2}=\frac{a}{s-1}+\frac{b}{s-2}$$

את a,b ניתן לחשב:

$$\frac{a}{s-1}+\frac{b}{s-2}=\frac{a(s-2)+b(s-1)}{(s-1)(s-2)}=\frac{s-4}{s^2-3s+2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$$

ולכן

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{3}{s-1}-\frac{2}{s-2}$$

כעת, מליניאריות התמרת לפלס ההפוכה, ניתן לומר ש

$$y=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{s-4}{s^2-3s+2}\right]=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-1}-\frac{2}{s-2}\right]=3\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-2\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]$$

ואנו חישבנו את התמרות לפלס של e^{at}:

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\right](s)=\frac{1}{s-a},\qquad s>a$$

ולכן :

$$y=3e^{t}-2e^{2t}$$

דוגמא 28 : פתרון מד"ר עם שורשים ממשיים שווים
פתור את המשוואה

$$\begin{cases} y''-4y'+4y=0, & t\geq 0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=-2 \end{cases}$$

פתרון :
נפעיל את התמרת לפלס על אגפי המשוואה ונקבל

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{ay_1+asy_0+by_0}{as^2+bs+c}=\frac{s-6}{s^2-4s+4}$$

הפולינום האופייני לבעיה הוא $p(x)=s^2-4s+4=(s-2)^2$.
ולכן :

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{s-6}{(s-2)^2}=\frac{a}{s-2}+\frac{b}{(s-2)^2}=\frac{1}{s-2}-\frac{4}{(s-2)^2}$$

ולכן

$$y=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-4\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right]=e^{2t}-4te^{2t}$$

דוגמא 29 : פתרון מד"ר עם שורשים מרוכבים צמודים
פתור את המשוואה

$$\begin{cases} y''+2y'+6y=0, & t\geq 0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

פתרון : דרך ראשונה
נפעיל את התמרת לפלס על אגפי המשוואה ונקבל

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{ay_1+asy_0+by_0}{as^2+bs+c}=\frac{s+2}{s^2+2s+6}$$

הפולינום האופייני שמופיע במכנה הוא

$$s^2+2s+6=s^2+2s+1+5=(s+1)^2+5$$

ואז

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{s+2}{(s+1)^2+5}$$

ובהיעזרנו בתוצאות שקיבלנו :

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\cos bt\right](s)=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\qquad s>a$$

$$\mathbf{L}\left[e^{at}\sin bt\right](s)=\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\qquad s>a$$

נקבל

$$y(t)=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{(s+1)^2+5}\right]=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+5}+\frac{1}{(s+1)^2+5}\right]$$
$$=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+5}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{(s+1)^2+5}\right]$$
$$=e^{-t}\cos\sqrt{5}t+\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-t}\sin\sqrt{5}t$$

פתרון : דרך שנייה

הפולינום האופייני שמופיע המכנה הוא

$$s^2+2s+6=\left(s+1+\sqrt{5}i\right)\left(s+1-\sqrt{5}i\right)$$

ניתן לפרק לשברים חלקיים גם כשהשורשים מרוכבים :

$$\mathbf{L}\left[y(t)\right](s)=\frac{s+2}{s^2+2s+6}=\frac{a}{s+1+\sqrt{5}i}+\frac{b}{s+1-\sqrt{5}i}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{5}}\\ b=\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{5}}\end{cases}$$

לכן

$$y(t)=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+6}\right]=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{5}}\right)\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1+\sqrt{5}i}\right]+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{5}}\right)\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1-\sqrt{5}i}\right]$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2\sqrt{5}}\right)e^{\left(-1-\sqrt{5}i\right)t}+\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2\sqrt{5}}\right)e^{\left(-1+\sqrt{5}i\right)t}$$

וכמובן שניתן להגיע בעזרת פישוט לתשובה שקיבלנו בדרך הראשונה.

פונקצית מדרגה (פונקצית Heaviside)

הגדרה 35 : פונקצית מדרגה

עבור $c\ge 0$, נגדיר

$$u_c(t)\triangleq\begin{cases}0, & t<c\\ 1, & t\ge c\end{cases}$$

דוגמא 30 :

חשב את התמרת לפלס של פונקצית המדרגה

פתרון :

נחשב ע"פ ההגדרה :

$$\mathbf{L}\left[u_c(t)\right](s)=\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)\,dt=\int_c^\infty e^{-st}dt=\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_c^\infty=\frac{e^{-sc}}{s},\ s>0$$

נשים לב שעבור $c=0$, פונקצית המדרגה היא $f(t)=1$ מבחינת התמרת לפלס וכך מקבלים את $\frac{1}{s}$ באופן פרטי.

דוגמא 31 :

נתונים $0<c<d$ ו $b>0$, ונגדיר

$$f(t)=\begin{cases}b, & c\le t\le d\\ 0, & 0\le t<c,\ t>d\end{cases}$$

חשב את התמרת לפלס של $f(t)$

פתרון :

ניתן לרשום את $f(t)$ כך

$$f(t)=b\left(u_c(t)-u_d(t)\right)$$

ולכן , מליניאריות התמרת לפלס :

$$\mathbf{L}[f](s)=b\left(\mathbf{L}\left[u_c(t)\right](s)-\mathbf{L}\left[u_d(t)\right](s)\right)=b\mathbf{L}\left[u_c(t)\right](s)-b\mathbf{L}\left[u_c(t)\right](s)=\frac{b\left(e^{-sc}-e^{-sd}\right)}{s}$$

דוגמא 32 :

חשב את התמרת לפלס של

$$f(t)=[t]=\{n, \qquad n\le t\le n+1, \quad n\in\mathbb{Z}^+\}$$

פתרון:

ניתן לרשום את $f(t)$ כך:

$$f(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)+\dots$$

ולכן

$$\mathbf{L}\left[[t]\right](s)=\mathbf{L}\left[u_1(t)\right](s)+\mathbf{L}\left[u_2(t)\right](s)+\mathbf{L}\left[u_3(t)\right](s)+\dots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{L}\left[u_n(t)\right](s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-sn}}{s}=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-sn}=\frac{1}{s}\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}}, \qquad s>0$$

משפט 23:

תהי התמרת לפלס $\mathbf{L}[f](s)$ של $f(t)$ קיימת עבור $s>a$, אזי

$$\mathbf{L}\left[u_c(t)f(t-c)\right](s)=e^{-cs}\mathbf{L}[f](s)$$

הוכחה:

$$\mathbf{L}\left[u_c(t)f(t-c)\right](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt=\int_c^{\infty}e^{-st}f(t-c)\,dt\underset{u=t-c}{=}\int_0^{\infty}e^{-s(u+c)}f(u)\,du$$

$$=e^{-sc}\int_0^{\infty}e^{-su}f(u)\,du=e^{-sc}\mathbf{L}[f](s)$$

תוצאה: הנוסחא ההפוכה שניתן לקבל היא:

$$\mathbf{L}^{-1}\left[e^{-sc}\mathbf{L}[f](s)\right](t)=u_c(t)f(t-c)$$

דוגמא 33:

תהי

$$f(t)=t^2$$

חשב את $u_1(t)f(t-1)$ ואת $\mathbf{L}\left[u_1(t)f(t-1)\right](s)$

פתרון:

$$u_1(t)f(t-1)=\begin{cases}0, & t\le 1\\ (t-1)^2, & t>1\end{cases}$$

$$\mathbf{L}\left[u_1(t)f(t-1)\right](s)=e^{-s}\mathbf{L}\left[t^2\right](s)=e^{-s}\frac{2!}{s^3}$$

דוגמא 34:

חשב את התמרת לפלס של

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 2\\ t^2, & 2<t\end{cases}$$

פתרון:

עפ"י ההגדרה,

$$\mathbf{L}[f](s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

אך ניתן לרשום את $f(t)$ בצורה נוחה יותר ומוכרת:

$$f(t)=u_2(t)h(t-2)$$

כאשר נותר לחשב את $h(t)$. נרצה שיתקיים

$$u_2(t)h(t-2)=f(t)=\begin{cases}0, & t<2\\ t^2, & t\ge 2\end{cases}$$

אם נביט באזור $t>2$ ונקבל

$$h(t-2)=t^2 \;\Rightarrow\; h(s)=(s+2)^2$$

כלומר

$$h(t)=(t+2)^2$$

מהנוסחא ההפוכה,

$$\mathbf{L}[f](s)=\mathbf{L}\left[u_2(t)h(t-2)\right](s)=e^{-2s}\mathbf{L}\left[h(t)\right](s)=e^{-2s}\mathbf{L}\left[(t+2)^2\right](s)$$
$$=e^{-2s}\mathbf{L}\left[t^2+4t+4\right](s)=e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}+\frac{4}{s}\right)$$

עבור $s>0$.

דוגמא 35:

חשב את התמרת לפלס של

$$f(t)=\begin{cases}1+t, & 0\le t\le 1\\ 3, & 1<t\le 3\\ 5-t, & 3<t\end{cases}$$

פתרון:

ניתן לבצע בצורה ישירה, כלומר לחשב:

$$\mathbf{L}[f](s)=\int_0^1 e^{-st}(1+t)\,dt+\int_0^1 e^{-st}\cdot 3dt+\int_3^\infty e^{-st}(5-t)\,dt$$

וניתן להשתמש בנוסחא ההפוכה שלמדנו. לשם כך נרשום את $f(t)$ בצורה כזו:

$$(1)\qquad f(t)=g_0(t)+u_1(t)g_1(t-1)+u_3(t)g_3(t-3)$$

נחשב את g_0,g_1,g_3 ע"י השוואת הרישום (1) להגדרת $f(t)$.

עבור $0\le t\le 1$:

$$1+t=g_0(t)$$

עבור $1<t\le 3$:

$$3=g_0(t)+g_1(t-1)=1+t+g_1(t-1)\ \Rightarrow\ g_1(t-1)=2-t\ \underset{t-1=u}{\Rightarrow}\ g_1(u)=1-u$$

עבור $3<t$:

$$5-t=g_0(t)+g_1(t-1)+g_3(t-3)=1+t+2-t+g_3(t-3)$$
$$\Rightarrow\ g_3(t-3)=2-t\ \underset{t-3=u}{\Rightarrow}\ g_3(u)=-1-u$$

ולכן, מהנוסחא ההפוכה

$$\mathbf{L}[f](s)=\mathbf{L}\left[g_0(t)+u_1(t)g_1(t-1)+u_3(t)g_3(t-3)\right](s)$$
$$=\mathbf{L}\left[g_0(t)\right](s)+e^{-s}\mathbf{L}\left[g_1(t)\right](s)+e^{-3s}\mathbf{L}\left[g_3(t)\right](s)$$
$$=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+e^{-s}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)+e^{-3s}\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}\right)$$

דוגמא 36:

פתור את המד"ר באמצעות התמרת לפלס

$$\begin{cases}y''+2y'+4y=h(t)=\begin{cases}1, & t\in[\pi,2\pi]\\ 0, & t\notin[\pi,2\pi]\end{cases}, & t\ge 0\\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$$

פתרון:

ניתן לכתוב את המשוואה כך:

$$y''+2y'+4y=h(t)=u_\pi(t)-u_{2\pi}(t)$$

נתמיר את שני אגפי המשוואה ונקבל

$$\mathbf{L}\left[y''+2y'+4y\right](s)=\mathbf{L}\left[u_{\pi}(t)-u_{2\pi}(t)\right](s)=\mathbf{L}\left[u_{\pi}(t)\right](s)-\mathbf{L}\left[u_{2\pi}(t)\right](s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}-\frac{e^{-2\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{L}[y](s)=\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+2s+4\right)}-\frac{e^{-2\pi s}}{s\left(s^2+2s+4\right)}$$

$$\Rightarrow\ y=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+2s+4\right)}\right]-\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s\left(s^2+2s+4\right)}\right]$$

ומהנוסחא ההפוכה

$$y=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s\left(s^2+2s+4\right)}\right]-\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi s}}{s\left(s^2+2s+4\right)}\right]$$
$$=u_{\pi}(t)f(t-\pi)-u_{2\pi}(t)f(t-2\pi)$$

כאשר סימנו את

$$f=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+2s+4\right)}\right]$$

כעת נחשב

$$\frac{1}{s\left(s^2+2s+4\right)}=\frac{a}{s}+\frac{b(s+1)}{(s+1)^2+3}+\frac{c\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}$$

את הקבועים ניתן לחשב. מקבלים $a=\frac{1}{4},\ \ b=-\frac{1}{4},\ \ c=-\frac{1}{4\sqrt{3}}$

ולכן

$$f(t)=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+2s+4\right)}\right]=\frac{1}{4}\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{4}\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+3}\right]-\frac{1}{4\sqrt{3}}\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2+3}\right]$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\frac{1}{4\sqrt{3}}e^{-t}\sin\sqrt{3}t$$

פונקצית דלתא (פונקצית הלם) של דירק (Dirac's Delta Function)

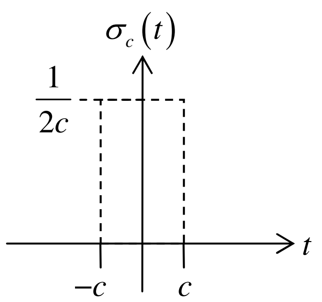
הגדרה 36 :

δ היא לא באמת פונקציה, היא נקראת "פונקצית מוכללת". נציג את ההגדרה ע"פ התכונה העיקרית של פונקציה מוכללת זו. אם $f(t)$ רציפה בסביבת $t=a$, אז

$$\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)\delta_a(t)dt=f(a)$$

כאשר $\varepsilon>0$.

כדי להבין את תכונה זו של פונקצית $\delta(t)$, נתבונן ב $\delta(t)$ כתוצאה מתהליך גבולי. לשם כך נגדיר את



$$\sigma_c(t)=\begin{cases}\frac{1}{2c}, & t\in[-c,c]\\ 0, & t\notin[-c,c]\end{cases}$$

ונביט בתכונות הפונקציה $\sigma_c(t)$:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_c(t)dt=1$ לכל $c>0$
2. $\sigma_c(t)\geq 0$ לכל t.
3. עבור $t\neq 0$, $\lim_{c\to 0}\sigma_c(t)=0$, כי לכל $t\neq 0$, עבור c מספיק קטן, הפונקציה תתאפס.

נוכל לחשוב על הפונקציה $\delta(t)$ כגבול $\lim_{c\to 0}\sigma_c$. ניקח $f(t)$ רציפה ב $t=0$ ונביט באינטגרל

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma_c(t)\,dt = \int_{-c}^{c} f(t)\frac{1}{2c}\,dt = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)\,dt$$

ממשפט ערך הביניים האינטגרלי, $\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(t)\,dt = f(t_c)$ כאשר $-c < t_c < c$.

ולכן

$$\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma_c(t)\,dt = \lim_{c\to 0} f(t_c) = f(0)$$

ולכן נוכל לראות את פונקצית δ ה"הכנסה" של הגבול לתוך האינטגרל, כלומר

$$\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sigma_c(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\lim_{c\to 0}\sigma_c(t)\right)dt = \lim_{c\to 0} f(t_c) = f(0)$$

נסכם את תכונות הפונקצית המוכללת $\delta(t)$:

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt = 1$ (נגזר מהתכונה שבהגדרה 36)
2. $\delta(t) \ge 0$ לכל t.
3. $\delta(t) = 0$ לכל $t \ne 0$

ברור מתכונות אלו ש $\delta(t)$ לא יכולה להיות פונקציה, אך היא לגיטימית בתור פעולה על פונקציות, כפי שהוגדר בהגדרה 36.

כעת, נביט באינטגרל

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(u)\,du = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases} = u_0(t)$$

ובאופן כללי:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta_a(u)\,du = u_a(t)$$

ולכן, פונקצית $\delta_a(t)$ היא במובן מסוים הנגזרת של פונקצית המדרגה $u_a(t)$.

נחשב את התמרת לפלס של $\delta_a(t)$:

$$\mathbf{L}\left[\delta_a(t)\right](s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\delta_a(t)\,dt = e^{-sa}, \qquad a>0$$

דוגמא 37 :

פתור את המד"ר באמצעות התמרת לפלס

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = \delta_\pi(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \qquad , \qquad t \ge 0$$

פתרון :

נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$\left(s^2+2s+2\right)\mathbf{L}[y](s) = \mathbf{L}[\delta_\pi](s) = e^{-s\pi}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{L}[y](s) = \frac{e^{-s\pi}}{s^2+2s+2}$$

ולכן, ע"פ הנוסחא ההפוכה שקיבלנו במשפט 24,

$$y(t) = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s\pi}}{s^2+2s+2}\right] = u_\pi(t)\,g(t-\pi)$$

כאשר

$$g(t) = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2s+2}\right]$$

נחשב:

$$\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \Rightarrow \quad g(t)=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1}\right]=e^{-t}\sin t$$

ולכן נקבל ש

$$y(t)=u_\pi(t)\,g(t-\pi)=u_\pi(t)\,e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$$

קונבולוציה

הגדרה 37:

יהיו f,g המוגדרות בקטע $[0,\infty)$, אזי נגדיר את הקונבולוציה בהקשר של התמרת לפלס

$$(f*g)(t)\triangleq\int_0^t f(t-y)\,g(y)\,dy$$

נראה למה הגדרה זו הגיונית:

בהתמרות פורייה, הגדרנו

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)\,g(y)\,dy$$

ואם נניח ש $f(t)=g(t)=0$ לכל $t<0$, אז נקבל

$$(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-y)\,g(y)\,dy \underset{\substack{\forall y<0:\\ g(y)=0}}{=} \int_0^{\infty} f(t-y)\,g(y)\,dy \underset{\substack{\forall t-y<0:\\ \forall t<y:\\ f(t-y)=0}}{=} \int_0^{t} f(t-y)\,g(y)\,dy$$

משפט 24:

יהיו $f(t),g(t)$ רציפה למקוטעין וקיימים חסמים אקספוננציאלים על $f(t),g(t)$, כלומר קיימים קבועים $K_1,K_2>0$ ו a כך ש

$$\forall t>0: \qquad |f(t)|\le K_1e^{at},\ \ |g(t)|\le K_2e^{at}$$

אזי עבור $t\ge 0$,

$$|(f*g)(t)|\le K_1K_2te^{at}$$

ועבור $s>a$,

$$\mathbf{L}[f*g](s)=\mathbf{L}[f](s)\cdot\mathbf{L}[g](s)$$

הוכחה:

ראשית,

$$|(f*g)(t)|=\left|\int_0^t f(t-y)\,g(y)\,dy\right|\le\int_0^t |f(t-y)|\,|g(y)|\,dy$$

$$\le\int_0^t K_1e^{a(t-y)}K_2e^{ay}\,dy=K_1K_2e^{at}\int_0^t dy=K_1K_2te^{at}$$

בנוסף, אם $s>a$ אז

$$\left|e^{-st}(f*g)(t)\right|\le e^{-st}K_1K_2te^{at}=K_1K_2te^{-(s-a)t}$$

והפונקציה $K_1K_2te^{-(s-a)t}$ אינטגרבילית כאשר $s>a$, ולכן ההתמרה $\mathbf{L}[f*g](s)$ קיימת עבור $s>a$.

נמשיך:

$$\mathbf{L}[f*g](s)=\int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(t-y)\,g(y)\,dy\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t e^{-s(t-y)}f(t-y)\,e^{-sy}g(y)\,dy\,dt$$

נבצע החלפת סדר האינטגרציה, כלומר

$$y\le t\le\infty$$

$$0\le y\le\infty$$

ונקבל

$$\mathbf{L}[f*g](s)=\int_0^\infty\int_0^t e^{-s(t-y)}f(t-y)e^{-sy}g(y)\,dydt=\int_0^\infty\int_y^\infty e^{-s(t-y)}f(t-y)e^{-sy}g(y)\,dtdy$$
$$=\int_0^\infty\left[\int_y^\infty e^{-s(t-y)}f(t-y)\,dt\right]e^{-sy}g(y)\,dy\underset{u=t-y}{=}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\right]e^{-sy}g(y)\,dy$$
$$=\mathbf{L}[f](s)\int_0^\infty e^{-sy}g(y)\,dy=\mathbf{L}[f](s)\cdot\mathbf{L}[g](s)$$

דוגמא 38 :

חשב את התמרת לפלס של

$$F(t)=\int_0^t f(y)\,dy$$

פתרון :

דרך אחת :

$$F(t)=(f*1)\;\Rightarrow\;\mathbf{L}[F](s)=\mathbf{L}[f](s)\cdot\mathbf{L}[1](s)=\frac{\mathbf{L}[f](s)}{s}$$

ודרך שנייה :

$$F'(t)=f(t),\quad F(0)=\int_0^0 f(y)\,dy=0$$

ולכן

$$\mathbf{L}[f](s)=\mathbf{L}[F'(t)](s)=s\mathbf{L}[F(t)](s)-F(0)=s\mathbf{L}[F(t)](s)$$
$$\mathbf{L}[F(t)](s)=\frac{\mathbf{L}[f](s)}{s}$$

דוגמא 39 :

עבור $a>0$, חשב את התמרת לפלס ההפוכה של

$$F(s)=\frac{a}{s^2\left(s^2+a^2\right)}$$

פתרון :

דרך ראשונה : ניתן לכתוב

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t,\qquad\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at$$

ולכן

$$\mathbf{L}^{-1}\left[F(s)\right](t)=t*\sin at=\int_0^t(t-y)\sin ay\,dy=\frac{t}{a}-\frac{\sin at}{a^2}$$

ודרך שנייה :

$$\frac{a}{s^2\left(s^2+a^2\right)}=\frac{As+B}{s^2}+\frac{Cs+D}{s^2+a^2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}A=C=0\\ B=\frac{1}{a},\quad D=-\frac{1}{a}\end{cases}$$

ולכן

$$\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2\left(s^2+a^2\right)}\right]=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{a}}{s^2}+\frac{-\frac{1}{a}}{s^2+a^2}\right]=\frac{1}{a}t-\frac{1}{a^2}\sin at$$

דוגמא 40:

עבור $t \geq 0$, פתור את המשוואה האינטגראלית (מצא את $g(t)$)

$$g(t)+\int_0^t g(u)e^{-(t-u)}du=1$$

פתרון:

נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה:

$$\mathbf{L}[g(t)](s)+\mathbf{L}\left[\int_0^t g(u)e^{-(t-u)}du\right](s)=\mathbf{L}[1](s)$$

$$\mathbf{L}[g(t)](s)+\mathbf{L}[g(t)*e^{-t}](s)=\frac{1}{s}$$

$$\mathbf{L}[g(t)](s)+\mathbf{L}[g(t)](s)\cdot\mathbf{L}[e^{-t}](s)=\frac{1}{s}$$

$$\mathbf{L}[g(t)](s)\left(1+\frac{1}{s+1}\right)=\mathbf{L}[g(t)](s)\left(\frac{s+2}{s+1}\right)=\frac{1}{s}$$

$$\mathbf{L}[g(t)](s)=\frac{s+1}{s(s+2)}$$

ואם נכתוב

$$\mathbf{L}[g(t)](s)=\frac{s+1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=\frac{1}{2}, \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

אז

$$\mathbf{L}[g(t)](s)=\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}$$

$$\Rightarrow \quad g(t)=\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}$$

דוגמא 41:

פתור את המד"ר הלא-הומוגנית באמצעות התמרת לפלס

$$\begin{cases} y''+by'+cy=h(t) \\ y(0)=\alpha \qquad\qquad , \qquad t\geq 0 \\ y'(0)=\beta \end{cases}$$

פתרון:

נפעיל את התמרת לפלס על שני אגפי המשוואה ונקבל

$$\mathbf{L}[y](s)(s^2+bs+c)=\alpha s+\beta+b\alpha+\mathbf{L}[h(t)](s)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{L}[y](s)=\alpha\frac{(s+b)}{s^2+bs+c}+\beta\frac{1}{s^2+bs+c}+\frac{\mathbf{L}[h(t)](s)}{s^2+bs+c}$$

נגדיר

$$F(s)=\frac{1}{s^2+bs+c},\ f(t)=\mathbf{L}^{-1}[F],\ G(s)=\frac{s+b}{s^2+bs+c},\ g(t)=\mathbf{L}^{-1}[G]$$

ולכן f,g הם שני פתרונות בלתי-תלויים של המשוואה ההומוגנית המתאימה

$$y''+by'+cy=0$$

המקיימים

$$f(0)=0, \qquad f'(0)=1$$

$$g(0)=1, \qquad g'(0)=0$$

ואז, ממשפט 24

$$y(t)=\alpha g(t)+\beta f(t)+\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\mathbf{L}[h(t)](s)}{s^2+bs+c}\right]=\alpha g(t)+\beta f(t)+\mathbf{L}^{-1}\left[\mathbf{L}[h](s)\cdot\mathbf{L}[F](s)\right]$$

$$=\alpha g(t)+\beta f(t)+(h*f)(t)=\alpha g(t)+\beta f(t)+\int_0^t h(t-y)f(y)dy$$

הנוסחא ההפוכה להתמרת לפלס

ראשית, עלינו להרחיב את הגדרת התמרת לפלס עבור פונקציות מרוכבות.

הגדרה 38 :

נגדיר את התמרת לפלס הפועלת על המישור המרוכב :

$$\mathbf{L}[f](z)\triangleq\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt$$

אם קיים האינטגרל, כאשר $s,v\in\mathbb{R}$ $\quad z=s+iv,$.

נשים לב שאם $v=0$, כלומר $z\in\mathbb{R}$, אנחנו נסוגים להגדרה הפשוטה יותר.

משפט 25 :

אם $e^{-st}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט עבור $s>a$, אז $\mathbf{L}[f](z)$ קיימת לכל $z\in\mathbb{C}$ כך ש $\operatorname{Re} z>a$.

הוכחה :

נביט ב

$$\left|e^{-zt}f(t)\right|=\left|e^{-(s+iv)t}\right|\left|f(t)\right|=\left|e^{-st}e^{-ivt}\right|\left|f(t)\right|=\left|e^{-st}\right|\left|f(t)\right|$$

ולכן, מפני ש $e^{-st}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט כאשר $s>a$, גם $e^{-zt}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט.

כלומר $\mathbf{L}[f](z)$ קיימת ל $z\in\mathbb{C}$ כך ש $\operatorname{Re} z>a$.

משפט 26 :

אם $e^{-at}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[0,\infty)$, אז $\mathbf{L}[f](z)$ אנליטית לכל z כך ש $\operatorname{Re} z\geq a$.

רעיון ההוכחה :

ע"פ משפט מוררה, אם f רציפה בתחום פשוט-קשר ו $\oint_C \mathbf{L}[f](z)dz=0$ לכל מסלול סגור C , אזי $\mathbf{L}[f](z)$ אנליטית.

כעת,

$$\oint_C \mathbf{L}[f](z)dz=\oint_C\left(\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt\right)dz=\int_0^\infty\left(\oint_C e^{-zt}f(t)dz\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\oint_C e^{-zt}dz\right)f(t)dt$$

ומכיוון ש e^{-zt} אנליטית בכל המישור המרוכב, $\oint_C e^{-zt}dz=0$ ממשפט קושי, ולכן

$$\oint_C \mathbf{L}[f](z)dz=0$$

משפט 27 : הנוסחא ההפוכה להתמרת לפלס

אם $e^{-at}f(t)$ אינטגרבילית בהחלט ב $[a,\infty)$, וגם f רציפה והנגזרות החד-צדדיות שלה קיימות לכל t ,

אזי עבור $t>0$,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{zt}\mathbf{L}[f](z)dz$$

לכל $s>a$.

הוכחה:

ניקח $s>a$ קבוע. עבור $z=s+iv$, נגדיר

$$G(v)=\mathbf{L}[f](s+iv)$$

לפי הגדרה זו,

$$G(v)=\mathbf{L}[f](s+iv)=\int_0^\infty e^{-(s+iv)t}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-ivt}f(t)e^{-st}dt$$

אם נגדיר

$$g(t)=\begin{cases}2\pi e^{-st}f(t), & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

אז נוכל לרשום,

$$G(v)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ivt}g(t)dt=\mathbf{F}[g(t)](v)$$

נשתמש בהתמרת פורייה ההפוכה, ומכיוון ש g רציפה לכל $t\neq 0$ ונגזרותיה החד-צדדיות קיימות לכל t:

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ivt}G(v)dv$$

לכן, מהגדרת $g(t)$, עבור $t>0$:

$$2\pi e^{-st}f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ivt}G(v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ivt}\mathbf{L}[f](s+iv)dv$$

ולכן

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{st+ivt}\mathbf{L}[f](s+iv)dv=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(s+iv)t}\mathbf{L}[f](s+iv)dv$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ z=s+iv\\ dz=idv}}{=}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{zt}\mathbf{L}[f](z)dv$$

תזכורת: משפט 28: משפט השארית

אם C מסלול פשוט וסגור ו $g(z)$ פונקציה אנליטית על המסלול ובתוך המסלול, חוץ מאשר מספר סופי של נקודות $z_1,\ldots,z_n$ שהן לא על המסלול, אז

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)dz=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\{g,z_j\}$$

כאשר $\mathrm{Res}\{g,z_j\}$ הוא המקדם של $\frac{1}{z-z_j}$ בטור לורן של $g(z)$ סביב z_j.

תזכורת נוספת:

אם z_j קוטב מסדר m, אז

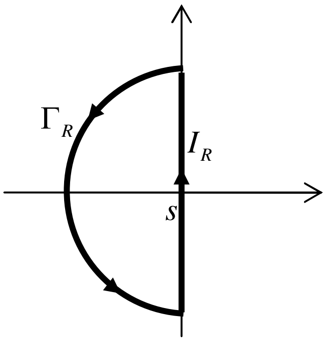
$$\mathrm{Res}\{g,z_j\}=\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{(z-z_j)^m g(z)}{(m-1)!}\right)$$

ועבור קוטב פשוט (מסדר 1):

$$\mathrm{Res}\{g,z_j\}=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)g(z)$$

ועבור $g(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$, כאשר $p(z),q(z)$ אנליטיות ובנקודה z_j קוטב פשוט, אז

$$\mathrm{Res}\{g,z_j\}=\frac{p(z)}{q'(z)}$$



ניקח $F(z)$ אנליטית בכל המישור $\mathbb{C}$, חוץ מאשר מספר סופי של קטבים, בנקודות $z_1,\dots,z_n$, כאשר $\operatorname{Re} z_j \le a < s$ לכל $j=1,..,n$.

ניקח מסלול C_R, ונחלק אותו לשני חלקים, I_R ו Γ_R כמוראה באיור.

$$I_R = \{s+iv : -R \le v \le R\}$$

$$\Gamma_R = \{z : |z-s| = R, \operatorname{Re} z \le s\}$$

עבור R מספיק גדול, נובע ממשפט השארית ש

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} e^{zt}F(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\{e^{zt}F(z), z_j\}$$

כעת,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} e^{zt}F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{I_R} e^{zt}F(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{zt}F(z)\,dz$$

ובנוסף,

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{I_R} e^{zt}F(z)\,dz = \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-zt}F(z)\,dz = f(t), \qquad t>0$$

ולכן, אם $F(z)$ אנליטית בכל $\mathbb{C}$, חוץ מאשר מספר סופי של קטבים, ואם

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{zt}F(z)\,dz = 0$$

אז

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\{e^{zt}F(z), z_j\} \quad , \qquad t>0$$

ולכן נרצה לחקור מתי

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{zt}F(z)\,dz = 0$$

נעריך את האינטגרל:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} e^{zt}F(z)\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} \left|e^{zt}F(z)\right||dz| \le \frac{1}{2\pi}\max_{z\in\Gamma_R}\left|e^{zt}F(z)\right|\int_{\Gamma_R}|dz| = \frac{1}{2\pi}\max_{z\in\Gamma_R}\left|e^{zt}F(z)\right|\pi R$$

כעת נחסום את e^{zt},

$$\left|e^{zt}\right| = e^{(\operatorname{Re} z)t} \le e^{st}$$

בנוסף, ניתן להראות שמספיק לבדוק רק את התנאי ש

$$\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}|F(z)| = 0$$

כדי להשתמש בנוסחא שקיבלנו:

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\{e^{zt}F(z), z_j\} \quad , \qquad t>0$$

תוצאה:

אם $F(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, כאשר $p(z), q(z)$ פולינומים, ואם הדרגה של $p(z)$ קטנה מהדרגה של $q(z)$ (מסמנים $\partial p < \partial q$), אזי

$$\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}|F(z)| = 0$$

דוגמא 42:

מצא את הפונקציה שהתמרת לפלס שלה

$$\mathbf{L}[f](s) = \frac{1}{s}$$

פתרון:

ראשית נכתוב את הפונקציה המרוכבת המתאימה:

$$\mathbf{L}[f](z)=\frac{1}{z}$$

אנו מזהים קוטב פשוט יחיד ב $z_1=0$.
נבדוק האם

$$\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}\left|\mathbf{L}[f](z)\right|=\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}\frac{1}{z}=0$$

כעת,

$$\left|\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{1}{z+1-1}\right|\underset{\underset{|a+b|\ge|a|-|b|}{\uparrow}}{\le}\frac{1}{|z+1|-|1|}\underset{z\in\Gamma_R}{=}\frac{1}{R-1}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

ולכן ניתן להשתמש בנוסחא שקיבלנו, כלומר

$$f(t)=\text{Res}\left\{e^{zt}\frac{1}{z},0\right\}=\frac{e^{zt}}{\frac{d}{dz}(z)}=\left.\frac{e^{zt}}{1}\right|_{z=0}=1$$

וזו התוצאה שציפינו לה.

דוגמא 43:
מצא את הפונקציה שהתמרת לפלס שלה

$$\mathbf{L}[f](s)=\frac{1}{s^2-3s+2}$$

פתרון:
ראשית נכתוב את הפונקציה המרוכבת המתאימה:

$$\mathbf{L}[f](z)=\frac{1}{z^2-3z+2}=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

יש לנו שני קטבים פשוטים: $z_{1,2}=1,2$. אכן מתקיים

$$\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}\left|\mathbf{L}[f](z)\right|=\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}\frac{1}{|z-1||z-2|}=0$$

ולכן ניתן להשתמש במשפט:

$$f(t)=\text{Res}\left\{e^{zt}\frac{1}{(z-1)(z-2)},z=1\right\}+\text{Res}\left\{e^{zt}\frac{1}{(z-1)(z-2)},z=2\right\}$$

$$=\left.\frac{e^{zt}(z-1)}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=1}+\left.\frac{e^{zt}(z-2)}{(z-1)(z-2)}\right|_{z=2}=-e^t+e^{2t}$$

דוגמא 43: לא תמיד ניתן להשתמש בנוסחא
מצא את הפונקציה שהתמרת לפלס שלה היא

$$\mathbf{L}[f](s)=\frac{e^{-cs}}{s},\qquad c>0$$

פתרון:
ראשית נכתוב את הפונקציה המרוכבת המתאימה:

$$\mathbf{L}[f](z)=\frac{e^{-cz}}{z}$$

אבל

$$\lim_{R\to\infty}\max_{z\in\Gamma_R}\left|\frac{e^{-cz}}{z}\right|=\infty$$

ולכן לא ניתן להשתמש בנוסחא המוכרת. אם היינו משתמשים בנוסחא, היינו מקבלים

$$f(t)=\text{Res}\left\{e^{zt}\frac{e^{-cz}}{z},z=0\right\}=e^{zt}\left.\frac{e^{-cz}z}{z}\right|=1$$

מה שלא נכון עבור $c>0$.