טורי פוריה והתמרות אינטגרליות

מרצה: ראובן הרמלין

(גרסה $Id: forier.lyx,v 1.26 2004/10/03 12:01:48 itay Exp $)

תוכן עניינים

1 מבוא

1.1 מרחבי מכפלה פנימית

1.1.1 מרחבי פונקציות ליניאריות

דוגמא

$$V=\{f:\{1,2,3\}\mapsto\mathbb{C}\}=\mathbb{C}^3\to\{f,g\}\in V,\ \begin{matrix}(f+g)(j)\\ 1\le j\le 3\end{matrix}=f(j)+g(j)\vee$$
$$f\in V,c\in\mathbb{C},(cf)(j)=cf(j)$$

לכן זה מרחב לינארי. ניתן לבנות בסיס ע"י $e_i(j)=\begin{cases}1,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$ לכן זה ממדד 3. לכן גם זה איזומור-פיזם: כאשר $f=(f(1),f(2),f(3))$

דוגמא 2 ניתן גם לבנות $V=\{f:[a,b]\mapsto\mathbb{C}\}(=\mathbb{C}^\Omega),x\in[a,b],e_x=\begin{cases}1,x=y\\0,x\neq y\end{cases}$, הבעיה שלנו היא שזה סכום לא בין מניה . לכן אין סיכום של פונקציה כזאת ע"י סיכום לינארי (אפילו לא בטור אין סופי)

1.1.2 הגדרת ממ"פ

מרחב לינארי V(בקורס שלנו מעל $\mathbb{C}$) נקרא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ) אם לכל זוג איברים u,w ב-V מתאים מספר מורכב שמסומן ב- $<u,w>$באופן שמקיים

1. לנאריות מימין: $<au_1+bu_2,w>=a<u_1,w>+b<u_2,w>$, $\begin{matrix}\forall u_1,u_2,w\in V\\ \vee\forall a,b\in\mathbb{C}\end{matrix}$
2. הרמיטיות $\forall u,w\in V,<u,w>=\overline{<w,u>}$
3. חיוביות: $\forall u\in V,<u,u>\ge 0$ וגם $\forall u\in V,<u,u>=0\Leftrightarrow u\equiv 0$

הגדרות של ממ"פ:

1. ב- $\mathbb{C}^n$ מוגדרות ממ"פ ע"י: עבור $(r_1,r_2...r_n)\in\mathbb{R}^+$ אז

$$\forall u,w\in\mathbb{C}^n,<u,w>_r=\sum_{j=1}^n r_j(u)_j\overline{(w)_j}$$

לחילופין $<e_i,e_j>_r=\begin{cases}r_i,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$ (שמגדיר את המטריצה)

2. לפונקציות רציפות נגדיר ממ"פ באופן הבא: $C[a,b]=\{f:c[a,b]\mapsto\mathbb{C}\}$ עבור כל פונקצית $r(x)\in\mathbb{R}^+$ אז

$$\forall x\in[a,b],\{f,g\}\in c[a,b],<f,g>_r=\int_a^b r(x)f(x)\overline{g(x)}$$

3. יהי ℓ^2מרחב הסדרות האין סופיות הבא:

$$\ell^2=\{\{c_n\}_{n=1}^\infty|\forall n\in\mathbb{N},c_n\in\mathbb{C}\vee\sum_{n=1}^\infty|c_n|^2<\infty\}$$

ואז יש בעיה, האם

$$u=\{c_n\},v=\{d_n\},u+v=\{c_n+d_n\}\in\ell^2?$$

. נסמן $<u,v>=\sum_{n=1}^\infty c_n\overline{d_n}$אבל מה מבטיח שזה מתכנס?

1.1.3 נורמה

במרחב לנארי V מוגדרת נורמה אז לכל איבר $u \in V$ מותאם מספר ממשי $\|u\|$ באופן שהתנאים הבאים מתקיימים:

1. חיוביות $\forall u \in V, \|u\| > 0$ וגם $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$
2. סקלריות $\|cu\| = |c|\|u\|$, $\begin{matrix} \forall u \in V \\ \vee \forall c \in \mathbb{C} \end{matrix}$
3. אי שוויון המשולש $\forall u, v \in V, \|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$

דוגמאות עבור $\mathbb{C}^n$

1. $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2} = \sqrt{< u, u >}$
2. $\|u\|_\infty = \begin{matrix} max \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix} |a_n|$
3. $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|$
4. באופן כללי $\forall K \in \mathbb{R}[0, \infty), \|u\|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n |a_i|^k}$

1.1.4 ממ"פ כנורמה

משפט בכל מרחב V אז ממ"פ מגדיר נורמה ע"י $u \in V, \|u\| = \sqrt{< u, u >}$

למות

1. $< u, av + bw >= \overline{a} < u, v > +\overline{b} < u, w >$
2. $< cu, cv >= |c|^2 < u, w >$
3. $< \sum_{k=1}^n a_k u_k, w >= \sum_{k=1}^n a_k < u_k, w >$
4. $< \sum_{k=1}^n a_k u_k, \sum_{j=1}^n b_j w_j >= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \overline{b_j} < u_k, w_j >$

אי שוויון קושי שורץ (בוזיאקובסקי) $\forall u, v \in V, | < u, v > | \leq \|u\|\|v\|$

הוכחה מורכבת $x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C}, \{u, v\} \in \mathrm{V}, < u + \lambda x v, u + \lambda x v > \geq 0$
לפי טענת עזר (4)

$$\begin{aligned} < u + \lambda x v, u + \lambda x v > &= < u, v > +\lambda < v, u > x + \overline{\lambda} < u, v > \overline{x} + |\lambda|^2 < v, v > x^2 \\ &= |\lambda|^2 < v, v > x^2 + 2Re(\overline{\lambda} < u, v >)x + < u, u > \geq 0 \end{aligned}$$

וזה נכון אם"ם מתקיים אי השוויון:

$$4(Re(\overline{\lambda} < u, v >))^2 - |\lambda|^2 < v, v >< u, u > \leq 0$$

בפרט אם $\lambda =< u, v > \neq 0$ אז

$$|\lambda|^4 - |\lambda|^2 < u, u >< v, v > \leq 0 \Rightarrow | < u, v > | \leq < u, u >< v, v >$$

■

הוכחה לפי אלגברה ב' לפי החיוביות

$$u,v\in V, t\in\mathbb{R} < u- < u,v > tv, u- < u,v > tv >> 0$$

נפרק את המ"פ לפי הלינאריות וההרמיטיות:

$$< u,u > - < u,v > t < v,u > -\overline{< u,v >}t < u,v > +| < u,v > |^2t^2 < v,v >> 0$$
$$\Rightarrow \|u\|^2 - 2t| < u,v > |^2 + | < u,v > |^2t^2\|v\|^2$$

זה נכון לכל $t\in\mathbb{R}$ בפרט ל $t=\frac{1}{\|v\|^2}$ לכן נציב:

$$\|u\|^2 - 2\frac{| < u,v > |^2}{\|v\|^2} + \frac{| < u,v > |^2}{\|v\|^2} > 0 \Rightarrow \|u\|^2 - \frac{| < u,v > |^2}{\|v\|^2} > 0$$

לכן אם הכפול ב $\|v\|^2$ נקבל את ק"ש (קושי שוורץ) $| < u,v > | \le \|u\|\|v\|$ (שני צידי הביטוי חיובים ולכן מותר להעלות בשורש) וזה נכון לכל $u,v\in V$

■

הוכחת אי שוויון המשולש ($\|u+v\|^2 \le (\|u\|+\|v\|)^2$)

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= < u,v > + < v,u > + < u,v > + < v,v >= \|u\|^2 + 2 < u,v > +\|v\|^2\\ &\le \|u\|^2 + 2| < u,v > | + \|v\|^2\\ &\le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\|+\|v\|)^2\end{aligned}$$

■

דוגמאות

1. ב $\mathbb{C}^n$ הוגדרה מ"פ ע"י $u=\{c_k\}_{k=1}^n, v=\{d_k\}_{k=1}^n, < u,v >= \sum_{k=1}^n c_k\overline{d_k}$ אזי לפי ק"ש

$$|\sum_{k=1}^n c_k\overline{d_k}|^2 \le \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \sum_{k=1}^n |d_k|^2$$

ואי שוויון המשולש ב $\mathbb{C}^n$: $\sum_{k=1}^n |c_k+d_k|^2 \le (\sqrt{\sum_{k=1}^n |c_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n |d_k|^2})^2$

2. ב $c[a,b]$ מוגדרת מ"פ ע"י $< f,g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$
ואז אי שוויון ק"ש $|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx|^2 \le \int_a^b |f(x)|^2dx \int_a^b |g(x)|^2dx$
ואי שוויון המשולש $\int_a^b |f(x)+g(x)|^2dx \le (\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2dx} + \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2dx})^2$
3. יהי ℓ^2 אוסף של כל הסדרות $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ של מספרים מורכבים שמקיימים $\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2 \le \infty$ לכל שני איברים $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ ו- $\{d_k\}_{k=1}^\infty$ ב ℓ^2 מוגדרת מ"פ ע"י $< \{c_k\}_{k=1}^\infty, \{d_k\}_{k=1}^\infty >= \sum_{k=1}^\infty c_k\overline{d_k}$
4. נוכיח ש-$\sum_{k=1}^\infty |c_k\overline{d_k}|$ מתכנס לכל n טבעי :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |c_k\overline{d_k}| &\le \sqrt{\sum_{k=1}^n |c_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n |d_k|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^\infty |d_k|^2}\\ |\sum_{k=1}^\infty c_k\overline{d_k}| &\le \sum_{k=1}^\infty |c_k\overline{d_k}| \le \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^\infty |d_k|^2}\\ \sum_{k=1}^\infty |c_k+d_k|^2 &\le (\sqrt{\sum_{k=1}^\infty |c_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |d_k|^2})^2\end{aligned}$$

מש' 2 ק"ש, מש' 3 אי שוויון המשולש.לכן גם הסדרה $\{c_n+d_n\}^2$ שייכת ל ℓ^2.

1.2 מרחק, התכנסות וניצבות (א"ג)

מרחק לכל שני איברים $u,v\in V$ מוגדר המרחק $d(u,v)$ ע"י $d(u,v)=\|u-v\|$ כי

1. $d(u,v)\geq 0$ וגם $d(u,v)=0\Leftrightarrow u=v$
2. $d(v,u)=\|v-u\|=\|(-1)(u-v)\|=\|u-v\|=d(u,v)$
3. אי שוויון המשולש

$$\begin{aligned}d(u,v)+d(v,w) &\geq d(u,w)\\ \|u-v\|+\|v-w\| &\geq \|(u-v)+(v-w)\|\end{aligned}$$

הגדרת התכנסות עבור סדרה $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ במרחב מ"פ V נאמר שהיא מתכנסת לגבול W (ביחס לנורמה ב-V) אם

$$d(u_k,w) = \|u_k-w\|, \lim_{k\to\infty}\|u_k-w\|=0$$

בעיית הקירוב הטוב ביותר בנורמה

הגדרה תהי W ת"מ נתון ב- V ויהי $u\in V\backslash W$. מבקשים למצוא ב W איבר w כך ש$\|u-w\|=\inf\|u-w'\|$

1.2.1 ניצבות א"ג

הגדרה שני אברים ותה במרחב מ"פ V נקראים א"ג, $v\perp u$ אז $<u,v>=0$

טענה אם $v\perp u$ אז $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$
ע"פ אי שוויון המשולש ($\|u+v\|^2=\|u\|^2+2Re<u,v>+\|v\|^2$)
הערה מעל המורכבים בגלל שמדובר ב $Re<u,v>$ אז השוויון לא גורר בהכרח את הניצבות

1.3 מערכות א"ג,א"נ

הגדרה א"ג קב' האיברים $\{v_k\}_{k=1}^n, (2\leq n\leq\infty)$ נקראת מערכת אורתוגונלית אם:

1. $v_k\neq 0$ לכל k
2. לכל $k\neq j$ מתקיים $<v_k,v_j>=0$

הגדרה א"נ אם לכל k מתקיים $\|v_k\|=1$ אז המערכת נקראת אורתונורמלית.

טענה כל מערכת א"ג היא בת"ל כלומר צ"ל שאם $\sum_{k=1}^n c_kv_k=0$ (במקרה ש n סופי) אזי $c_k=$, $\begin{matrix}\forall k\in\mathbb{N}\\ 1\leq k\leq n\end{matrix}$ 0 ואומנם

$$0=<\sum_{k=1}^n c_kv_k,v_m>=\sum_{k=1}^n c_k<v_k,v_m>=c_m<v_m,v_m>$$

משפט יהי V ממ"פ עם מערכת א"נ $\{e_k\}_{k=1}^n, (2\leq n\leq\infty)$ אזי לכל שני איברים $u,v\in span\{e_k\}_{k=1}^n$ מתקיים

1. $<v,u>=\sum_{k=1}^n<u,e_k>\overline{<v,e_k>}$
2. $\forall u\in W, u=\sum_{k=1}^n<u,e_k>e_k$

הוכחה $u=\sum_{k=1}^n c_k e_k, v=\sum_{k=1}^n d_k e_k$ אזי

$$\begin{aligned}
<u,v> &= <\sum_{k=1}^n c_k e_k, \sum_{j=1}^n d_k e_k>=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n c_k\overline{d_k}<e_k,e_j> \\
&= \sum_{k=1}^n c_k\overline{d_k}
\end{aligned}$$

כמוכן

$$<u,e_m>=<\sum_{k=1}^n c_k e_k, e_m>=\sum_{k=1}^n c_k<e_k,e_m>=c_m<e_m,e_m>=c_m$$

■

תוצאה $\forall u\in W, \|u\|^2=<u,u>=\sum_{n=1}^n|<u,e_k>|^2$

משפט (פתרון לבעיית הקירוב הטוב ביותר, ראה 1.2) תהי $(n<\infty), \{e_k\}_{k=1}^n$ מע' א"נ $W=sp\{\{e_k\}_{k=1}^n\}$ אזי

$$\forall u\in V\backslash W, \min_{c_k\in\mathbb{C}}\|u-\sum_{k=1}^n c_k e_k\|^2=\|u-\sum_{k=1}^n<u,e_k>e_k\|^2=\|u\|^2-\sum_{k=1}^n|<u,e_k>|^2$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
\|u-\sum_{k=1}^n c_k e_k\|^2 &= <u-\sum_{k=1}^n c_k e_k, u-\sum_{j=1}^n c_j e_j> \\
&= \|u\|^2-<u,\sum_{k=1}^n c_k e_k>-\overline{<u,\sum_{k=1}^n c_k e_k>}+\sum_{k=1}^n|c_k|^2 \\
&= \|u\|^2-\sum_{k=1}^n\left(\overline{c_k}<u,e_k>+c_k\overline{<u,e_k>}\right)+\sum_{k=1}^n|c_k|^2 \\
&= \|u\|^2+\left(\sum_{k=1}^n|c_k|^2-\sum_{k=1}^n 2Re\overline{c_k}<u,e_k>\right) \\
&= \|u\|^2+\sum_{k=1}^n\left(|c_k|^2-2Re\overline{c_k}<u,e_k>+|<u,e_k>|^2\right) \\
&\quad -\sum_{k=1}^n|<u,e_k>|^2 \\
&= \|u\|^2-\sum_{k=1}^n|<u,e_k>|^2+\sum_{k=1}^n|c_k-<u,e_k>|^2 \\
\Rightarrow \min_{c_k\in\mathbb{C}}\|u-\sum_{k=1}^n c_k e_k\|^2 &= \|u-\sum_{k=1}^n<u,e_k>e_k\|^2=\|u\|^2-\sum_{k=1}^n|<u,e_k>|^2
\end{aligned}$$

■

תוצאה $\forall u\in W, \|u\|^2=<u,u>=\sum_{k=1}^n|<u,e_k>|^2$

תוצאה מנתונים של המשפט $u-\sum_{k=1}^n<u,e_k>e_k\perp W=sp(\{e_k\}_{k=1}^n)$ כי $\forall k,j\in\mathbb{N}\ ,<u-\sum_{k=1}^n<u,e_k>e_k,e_j>=<u,e_j>-<u,e_j>=0$

1.3.1 תהליך ג"ש

משפט תהי $\{v_k\}_{k=1}^n ,(n<\infty)$ קב' ב.ת.ל אזי ניתן לבנות מערכת א"נ $\{e_k\}_{k=1}^n$ כך ש $sp\{e_k\}_{k=1}^n = sp\{v_k\}_{k=1}^n$

1. $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ (הקב' ב.ת.ל אז $v_1 \neq 0$)
2. $u_2 = v_2 - \sum_{k=1}^{1} < v_2, e_k > e_k, e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ ($u_2 \neq 0$ כי v_2, e_1 ב.ת.ל. כי v_2, v_1 ב.ת.ל)
3. (צעד האינדוקציה) לאחר $j-1$ צעדים אז יש מע' א"נ חלקית

$$sp\{e_1, ..., e_{j-1}\} = sp\{v_1, ..., v_{j-1}\} \perp sp\{u_j, ..., u_n\}$$

ואז

$$u_j = v_j - \sum_{k=1}^{j-1} < v_2, e_k > e_k, e_j = \frac{u_j}{\|u_j\|}$$

($u_j \neq 0$ כי $\{e_1, ..., e_{j-1}, v_j\}$ ב.ת.ל. כי $\{v_1, ..., v_{j-1}, v_j\}$ ב.ת.ל)

כך באינדוקציה מתקיים המשפט

■

1.4 מערכות א"נ אין סופיות, סגירות, שלמות ופרסוול

משפט תהי $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ מערכת אורתונורמלית אין סופית בממ"פ V אזי לכל

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} | < u, e_k > |^2 \leq \|u\|^2$$

תוצאות

1. אי-שוויון בסל $\forall u \in V, \sum_{k=1}^{n} | < u, e_k > |^2 < \|u\|^2 < \infty$
2. הלמה של רימן-לבג $\forall u \in V, \lim_{k\to\infty} < u, e_k >= 0$

הערה

$$T : V \mapsto \ell^2 = \{\{c_n\}_{n=1}^\infty | \forall n \in \mathbb{N}, c_n \in \mathbb{C} \vee \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty\}, u \in V, t(u) = \{< u, e_k >\}_{k=1}^\infty$$

הגדרה נאמר שמערכת אורתונורמלית $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ סגורה במרחב מ"פ V. אם

$$\forall u \in V, \lim_{n\to\infty} \|u - \sum_{k=1}^{n} < u, e_k > e_k\| = 0$$

(עבור נורמות $\|\|_k, 0 < k \leq \infty$)

משפט זהות פרסוול מערכת אורתונורמלית $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ היא סגורה אם"ם

$$\forall u \in V, \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | < u, e_k > |^2$$

הוכחה הראינו ב 1.3 ש

$$\|u-\sum_{k=1}^{n}<u,e_k>e_k\|^2=\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}|<u,e_k>|^2$$

לכן מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\|u-\sum_{k=1}^{n}<u,e_k>e_k\|^2=\lim_{n\to\infty}\|u\|^2-\sum_{k=1}^{n}|<u,e_k>|^2$$

$\blacksquare$

תוצאה אז מתקיים $\|u\|^2=\|T(u)\|^2_{\ell^2}$ (כאשר $\|\{c_k\}\|_{\ell^2}=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$)

הגדרה מערכת אורתונורמלית $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ נקראת שלמה ב- V אם השוויון

$$\forall k\in\mathbb{N},<u,e_k>=0\Leftrightarrow v=0$$

תוצאה כל מע' סגורה היא מע' שלמה כי

$$\forall k\in\mathbb{N},<u,e_k>=0\Rightarrow\|u\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|<v,e_k>|^2=0\Leftrightarrow v=0$$

משפט זהות פרסוול המוכללת אם $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ סגורה ב V אזי לכל $u,v\in V$ מתקיימת הזהות

$$<u,v>=\sum_{k=1}^{\infty}<u,e_k>\overline{<v,e_k>}$$

הוכחה אם $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ סגורה ב V אזי

$$\Rightarrow<u-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k,u-\sum_{j=1}^{n}c_je_j>\quad=\quad\sum_{k=1}^{\infty}|<u,e_k>|^2$$

$$\forall u\in V,\lim_{n\to\infty}\|u-\sum_{k=1}^{n}<u,e_k>e_k\|=\|u-\sum_{k=1}^{\infty}<u,e_k>e_k\|=0$$

וזה אם"ם

$$\begin{aligned}\forall u\in V,u-\sum_{k=1}^{\infty}<u,e_k>e_k&=0\\ \Leftrightarrow\forall u\in V,u&=\sum_{k=1}^{\infty}<u,e_k>e_k\\ \Rightarrow\forall u,v\in V,<u,v>&=<\sum_{k=1}^{\infty}<u,e_k>e_k,\sum_{k=1}^{\infty}<u,e_j>e_j>\end{aligned}$$

נסמן סכום חלקי ע"י

$$u(s_n)=\sum_{k=1}^{n}<u,e_k>e_k$$

ונסמן את זנב הטור ע"י

$$u(r_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} < u, e_k > e_k$$

אזי

$$\begin{cases} \forall u,v \in V \\ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} ,\mathbb{C} \ni < u, v > \begin{aligned}[t] &= < u(s_n) + u(r_n), v(s_n) + v(r_n) > \\ &= < u(s_n), v(s_n) > + < u(s_n), v(r_n) > \\ &\quad + < u(r_n), v(s_n) > + < u(r_n), v(r_n) > \\ &= \sum_{k=1}^{n} < u, e_k > \overline{< v, e_k >} \\ &\quad + < u(s_n), v(r_n) > + < u(r_n), v(s_n) > + < u(r_n), v(r_n) > \end{aligned}$$

המ"פ היא מספר מורכב ולכן הביטוי חסום.הטור מתכנס לכן

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u(r_n) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} v(r_n) &= 0 \\ \Rightarrow < u, v > &= \lim_{n\to\infty} < u, v > \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} < u, e_k > \overline{< v, e_k >} + < u(s_n), v(r_n) > \right. \\ &\quad \left. + < u(r_n), v(s_n) > + < u(r_n), v(r_n) > \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} < u, e_k > \overline{< v, e_k >}\right] + < u, 0 > \\ &\quad + < 0, v > + < 0, 0 > \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} < u, e_k > \overline{< v, e_k >}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} < u, e_k > \overline{< v, e_k >} \end{aligned}$$

■

הגדרה נאמר כי $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, c_k =< f, e_k >$ זה טור פוריה מוכלל של f (או המתאים ל f)

2 טורי פוריה

2.1 טורי פוריה הטריגונומטרים

הגדרה נסמן ב $E = \mathbb{E}[-\pi, \pi]$ את מרחב הפונקציות המורכבות והרציפות למקוטעין בקטע $[-\pi, \pi]$, כאשר $f : I \mapsto \mathbb{C}$ רציפה למקוטעין על I אם יש בקטע I מספר סופי של נק' אי רציפות מסוג סליקה או קפיצה (הסוג הראשון)

דוגמא

$$f(x) = \frac{x}{\pi} - \left[\frac{x}{\pi}\right] = \begin{cases} \frac{x}{\pi} + 1 & -\pi \le x < 0 \\ \frac{x}{\pi} & 0 \le x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}$$

הגדרה מ"פ ע"י

$$\forall f,g\in E, c\in\mathbb{R}_+, <f,g>= c\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

1. נדרש ש

$$<f,f>=0 \quad\Leftrightarrow\quad f\equiv 0$$
$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = 0 \quad\Leftrightarrow\quad f\equiv 0$$

אבל אם $f(x)=0$ **בכל הקטע** $[-\pi,\pi]$ **פרט למספר סופי של נק' שבהם** $f(x)\neq 0$ **גם נקבל**

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2 dx = 0$$

הגדרה לכן נאמר ששתי פונקציות תחשבנה כשקולות ב E אם"ם $f(x)\neq g(x)$ רק במספר סופי של נק' אז נגדיר מחדש את המ"ו של מחלקות השקילות הללו ביחס למודולו של השקילות שרשמנו.

הגדרה ב-E קיימות שתי מע' א"ג מורכבת וממשית:

1. הסדרה $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ כאשר

$$\forall k\in\mathbb{N}, \varphi_k \quad=\quad e^{ikx}=\cos(kx)+i\sin(kx)$$

2. הסדרה $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ כאשר

$$\begin{aligned} e_0(x) &= d_0\\ e_{2k}(x) &= \cos(kx), k\geq 1\\ e_{2k+1}(x) &= \sin(kx), k\geq 1\end{aligned}$$

הוכחת א"ג וא"נ של המערכות

1. הוכחה לגבי $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. ראשית תכונות:
   (א) סימטריה

$$\forall k\in\mathbb{N}, \overline{\varphi_k(x)} \quad=\quad \overline{e^{ikx}}=e^{-ikx}=\varphi_{-k}(x)=\varphi_k(-x)$$

   (ב) לנאריות $\varphi_k(x)\varphi_m(x)=e^{i(k+m)x}=\varphi_{k+m}(x)$
   (ג) מחזוריות $\varphi_k(x+2\pi)=e^{ikx}e^{ik2\pi}=\varphi_k(x)$
   (ד) נגזרת $\varphi_k'(x)=ik\varphi_k(x)$
   עבור $k\neq m$ כל שהם

$$\begin{aligned} <\varphi_k,\varphi_m> &= c\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(x)\overline{\varphi_m(x)}dx\\ &= c\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(x)\varphi_{-m}(x)dx\\ &= c\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{k-m}(x)dx\\ &= c\left.\frac{\varphi_{k-m}(x)}{i(k-m)}\right|_{-\pi}^{\pi}=0\end{aligned}$$

בנוסף נראה איזה c צריך להיות כדי שהמע' תהיה א"נ:

$$\begin{aligned}
< \varphi_k, \varphi_k > &= c\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_0(x)dx \\
&= c\int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi c = 1 \\
\Rightarrow c &= \frac{1}{2\pi} \\
< f, g > &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx
\end{aligned}$$

2. נראה א"ג אזי צ"ל

$$\begin{aligned}
k \geq 1, < e_0, e_{2k} > &= 0 &(1)\\
k \geq 1, < e_0, e_{2k-1} > &= 0 &(2)\\
k \geq 1, m \geq 1, < e_{2k}, e_{2m-1} > &= 0 &(3)\\
k \geq 1, m \geq 1, < e_{2k}, e_{2m} > &= 0 &(4)\\
k \geq 1, m \geq 1, < e_{2k-1}, e_{2m-1} > &= 0 &(5)
\end{aligned}$$

כאשר $f(x)$ אי-זוגית $f(x) = -f(-x)$ אזי

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \Rightarrow < e_0, e_{2k-1} >= 0 \Rightarrow (1), (2), (3)$$

ע"פ זהויות טריגונומטריות

$$\begin{aligned}
2\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) &(6)\\
2\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) &(7)
\end{aligned}$$

אזי מתקיים

$$\begin{aligned}
< e_{2k}, e_{2m} > &= c\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(km)dx \\
(6) \Rightarrow &= \frac{c}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(k-m)x + \cos(k-m)x\right] dx \\
&= \frac{c}{2}\left[\frac{\sin(k-m)x}{k-m} + \frac{\sin(k+m)x}{k+m}\right]\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi} \\
&= 0 \Rightarrow (4)
\end{aligned}$$

באותו אופן אם (7) ניתן להוכיח את (5)

נראה א"נ עבור c מסוים

$$\begin{aligned}< e_{2k}, e_{2k} >=< e_{2k-1}, e_{2k-1} > &= 1\\ &= \frac{c}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1 \pm \cos 2kx]\,dx = \frac{c}{2}2\pi = \pi c\\ \Rightarrow c &= \frac{1}{\pi}\\ < e_0, e_0 > &= 1\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d_0^2 dx = 2d_0^2 = 1\\ \Rightarrow d_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

לכן המע'

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx, \sin kx\right\}$$

ביחס למ"פ

$$< f, g > = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

■

הגדרה עבור $f \in E$ כלשהי מוגדרות שתי סדרות של מקדמי פוריה של f

1. הראשונה לגבי המע' $\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ המקדמים הם

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

וטור פוריה הוא

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

2. השנייה ביחס למע' הממשית א"נ

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos kx, \sin kx\right\}$$

כאשר המקדמים

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\end{aligned}$$

ביחס לתיקון (לא א"נ)

$$\left\{\frac{1}{2}, \cos kx, \sin kx\right\}$$

ואז טור פורייה של $f(x)$ ביחס למע' הממשית

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos kx+b_k\sin kx]$$

הערה במע' הממשית כל האיברים הזוגיים מבטאים פונקציה זוגית וכל האיברים האי-זוגיים מבטאים פונקציה אי-זוגית והרי כל פונקציה ניתן לפרק להצגה יחידה של פונקציה זוגית ואי-זוגית

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

החלק הזוגי מורכב מ

$$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}, a_k=< f,e_{2k} >=< f,\cos kx > \wedge < f,a_0 >$$

ומחלק אי-זוגי

$$k\in\mathbb{N}, b_k < f,e_{2k-1} >=< f,\sin kx >$$

דוגמא $f(x)=\frac{x}{\pi}-\left[\frac{x}{\pi}\right]$ $-\pi\le x\le\pi,$ נפתח את טור פוריה של $f(x)$ (ה"ממשי")

1. נחשב את החלק הזוגי

$$f(-x) = \begin{cases} 0 & x=-\pi \\ -\frac{x}{\pi} & -\pi<x\le 0 \\ -\frac{x}{\pi}+1 & 0<x\le\pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi}+1 & -\pi\le x<0 \\ \frac{x}{\pi} & 0\le x<\pi \\ 0 & x=\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_2(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \begin{cases} 0 & x=-\pi \\ \frac{1}{2} & -\pi<x<0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{1}{2} & 0<x<\pi \\ 0 & x=\pi \end{cases}$$

לכן כיבן ש $f_2\equiv mod\frac{1}{2}$ לכן טור פוריה הזוגי $a_0=1,\forall n>1, a_n=0$

2. נחשב את החלק האי-זוגי

$$\begin{aligned} f_1(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2} &= f(x)-\frac{1}{2},(x\ne 0,\pm\pi) \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2})\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\left(\frac{x}{\pi}-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos(kx)}{k}\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}[\cos(kx)]\,dx\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{(-1)^k+1}{k}\right] \\ &= -\frac{1+(-1)^k}{\pi k} \end{aligned}$$

לכן המקדמים $\begin{array}{rcl} k=2m-1, b_{2m-1} & = & 0 \\ k=2m, b_{2m} & = & -\frac{1}{\pi m} \end{array}$ לכן טור פוריה

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2mx)}{\pi m}$$

3. נבדוק במספר מקומות $\begin{array}{rl} f(0) = & 0 \\ fourer = & \frac{1}{2} \end{array}$ כמוכן $\begin{array}{rcl} f(\pm\pi) & = & 0 \\ fourer & = & \frac{1}{2} \end{array}$ נבדוק בנק' רציפה $\begin{array}{rcl} f(\pm\frac{\pi}{2}) & = & \frac{1}{2} \\ fourer & = & \frac{1}{2} \end{array}$ כמוכן

$$\begin{aligned}
f(\frac{\pi}{4}) &= \frac{1}{4} \\
fourer &= \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(m\frac{\pi}{2})}{\pi m} \\
&= \frac{1}{2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\pi(2l-1)} \\
\arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^x \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} t^{2l-2} dt = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{2l-1} \\
\Rightarrow fourer &= \frac{1}{2} - \arctan 1 = \frac{1}{4} = f(\frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

אי שוויון בסל למע' פורייה הממשית

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

בדוגמא

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{\pi} - \left[\frac{x}{\pi}\right]\right)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\frac{x}{\pi})^2 dx = \frac{2}{3} \\
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} &\leq \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

2.1.1 הקשר בין שני הבסיסים

1. מהבסיס הממשי לבסיס המורכב

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\cos kx - i \sin kx\right) dx \\
c_k &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(a_k - ib_k\right) & k \geq 1 \\ \frac{1}{2} a_0 & k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & k \leq -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

2. מהבסיס המורכב לבסיס הממשי

$$\begin{aligned}\forall k\in\mathbb{N},\{a_k,b_k\}\in\mathbb{C},c_k &= \frac{1}{2}(a_k-ib_k)\\ c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_{-k}+ib_{-k})\\ a_k &= c_k+c_{-k}\\ b_k &= \frac{c_{-k}-c_k}{i}=i(c_k-c_{-k})\end{aligned}$$

נמיר

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{k=\infty}c_ke^{ikx} &= c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx})\\ &= a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(c_k+c_{-k})\cos kx+i\left(c_k-c_{-k}\right)\sin kx\right]\\ &= a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx+b_k\sin kx\right]\end{aligned}$$

לכן שני המע' חופפות אז אם מע' אחת סגורה גם השנייה.

דוגמא $a\neq 0, f(x)=e^{ax}$ נחשב ביחס למע' הקומפלקסית

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(a-ik)x}dx\\ &= \left.\frac{e^{(a-ik)x}}{2\pi(a-ik}\right|\\ (\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}=\sinh\alpha)\Rightarrow &= \frac{(-1)^k(e^{a\pi}-e^{-a\pi})}{2\pi(a-ik)}\\ &= (-1)^k\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\frac{a+ik}{a^2+k^2}\\ a_k &= c_k-c_{-k}=(-1)^k\frac{\sinh(a\pi)}{\pi}\frac{2a}{a^2+k^2}\\ b_k &= i(c_k-c_{-k})=(-1)^k\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\frac{2k}{a^2+k^2}\\ a_0 &= 2c_o=\frac{2\sinh(a\pi)}{a\pi}\\ e^{ax} &\sim \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi}+\frac{\sinh(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(a\cos kx-b\sin kx)}{a^2+k^2}\\ \Rightarrow\frac{\pi}{\sinh(a\pi)} &= \frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^ka}{a^2+k^2}\end{aligned}$$

2.2 סוגי התכנסות

$$f(x)\sim\sum_{R=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_n\cos kx+b_n\sin kx\right]$$

התכנסות הנק' קיימת בתת-מרחב $E' \subseteq E$

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall x \in I \\ \vee \forall \varepsilon > 0 \end{array} \right\}, \exists N(x,\varepsilon), \forall m \geq N, \left| \sum_{k=0}^{m} u_k(x) - f(x) \right|$$

התכנסות במ"ש קימת תת-קבוצה של E'

התכנסות בנורמה קימת בכל E

2.2.1 משפט דיריכלה

הגדרה נסמן ב-E' את אוסף כל הפונקציות ב-E, שעבורן קיימים שני הגבולות הבאים:

$$\begin{aligned}
\forall x \in (-\pi,\pi), \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+t)-f(x^+)}{t} &= f'_+(x) \\
\lim_{t\to 0^-} \frac{f(x+t)-f(x^-)}{t} &= f'_-(x) \\
f(x^+) &= \lim_{t\to x+} f(t) \\
f(x^-) &= \lim_{t\to x-} f(t)
\end{aligned}$$

וכן בנק' $\pm\pi$ נדרש שיהיו הגבולות החד צדדים היחידים בקטע

$$\begin{aligned}
x = \pm\pi, \lim_{t\to 0^\pm} \frac{f(\mp\pi+t)-f(\mp\pi^\pm)}{t} &= f'_\pm(\mp\pi) \\
f(x^\pm) &= \lim_{t\to x\pm} f(t)
\end{aligned}$$

משפט עבור כל פונקציה $f \in E'$, טור פורייה שלה מתכנס נק' בכל נק' $x \in (-\pi,\pi)$ ל-

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

בנק' $x = \pm\pi$ הטור מתכנס ל-

$$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$$

למה צריכים לבטא את הסכומים החלקים של טור פריה של $f(x)$ נתונה ב-E אופן "נוח". הסכום החלקי ה-m של טור פוריה

$$f(x) \quad \sim \quad \sum_{R=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$$

הוא

$$
\begin{aligned}
s_m(x) &= \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-m}^{m} e^{ik(x-t)} \right) dt \\
\sum_{k=-m}^{m} e^{iku} &= e^{-imu} \sum_{k=-m}^{m} e^{i(k+m)u} \\
(k+m=l) \rightarrow &= e^{-imu} \sum_{l=0}^{2m} e^{ilu} = e^{-imu} \frac{e^{i(2m+1)u}-1}{e^{iu}-1} \\
&= \frac{e^{i(m+1)u}-e^{-imu}}{e^{iu}-1} \\
\left(\times e^{-i\frac{u}{2}}\right) \rightarrow &= \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})u}-e^{-i(m+\frac{1}{2})u}}{e^{i\frac{m}{2}}-e^{-i\frac{u}{2}}} \\
&= \frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)} = 2D_m(u) \\
\Rightarrow s_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(x-t) dt
\end{aligned}
$$

סכום דיריכלה זוגי ולכן

$$
\begin{aligned}
s_m(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_m(t-x) dt \\
(t-x=s) \Rightarrow &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_m(s) ds
\end{aligned}
$$

נבצע הזזה ונרחיב את הגבול ל

$$
s_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_m(s) ds
$$

הוכחה צ"ל

$$
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt \quad \rightarrow \quad \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}
$$

נוכיח ש-

$$
\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t) D_m(t) dt \quad \rightarrow \quad \frac{f(x^+)}{2}
$$

וגם

$$
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x+t) D_m(t) dt \quad \rightarrow \quad \frac{f(x^-)}{2}
$$

למה

$$\begin{aligned}\int_0^\pi D_m(t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sum_{k=-m}^{\pi} du \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos ku\right] du \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^0 D_m(t)dt &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^0 \sum_{k=-m}^{\pi} du \\ &= \int_{-\pi}^0 \left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m}\cos ku\right] du \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

1. נוכיח את החלק הראשון

$$\frac{f(x^+)}{2} = \frac{f(x^+)}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{f(x^+)}{\pi}\int_0^\pi D_m(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x^+)D_m(t)dt$$

ולכן מספיק להוכיח

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[f(x+t)-f(x^+)\right] D_m(t)dt \quad\to\quad 0$$

אבל ניתן לרשום

$$\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\sin\left((m+\frac{1}{2})t\right)dt \quad\to\quad 0$$

בקטע $0<t\leq\pi$ הפונקציה $g(t)=\frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$ רציפה למקוטעין וגם

$$\lim_{t\to0^+} g(t) = \lim_{t\to0^+}\frac{f(x+t)-f(x^+)}{t}\frac{t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = f'_+(x)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x^+)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\left(\sin\frac{1}{2}t\cos mt+\cos\frac{1}{2}t\sin mt\right)dt &= \int_0^\pi\left(g(t)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\cos mtdt \\ &+\int_0^\pi\left(g(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\sin mtdt\end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned}h_1(t) &= \begin{cases} g(t)\sin\left(\frac{1}{2}t\right) & 0\leq t\leq\pi \\ 0 & -\pi\leq t<0\end{cases} \\ h_2(t) &= \begin{cases} g(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right) & 0\leq t\leq\pi \\ 0 & -\pi\leq t<0\end{cases}\end{aligned}$$

ואז

$$= \int_{-\pi}^\pi h_1(t)\cos mtdt+\int_{-\pi}^\pi h_2(t)\sin mtdt$$

וע"פ רימן-לבג שני האינטגרלים או מ"פ מתכנסים ל-0 כאשר $m \to 0$. הוכחנו ש

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+t)D_m(t)dt \quad \to \quad \frac{f(x^+)}{2}$$

2. נוכיח את החלק השני.

$$\frac{f(x^-)}{2} \quad = \quad \frac{f(x^-)}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{f(x^-)}{\pi}\int_{-\pi}^{0} D_m(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x^-)D_m(t)dt$$

ולכן מספיק להוכיח

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[f(x+t)-f(x^-)\right]D_m(t)dt \quad \to \quad 0$$

אבל ניתן לרשום

$$\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\sin\left((m+\frac{1}{2})t\right)dt \quad \to \quad 0$$

בקטע $0 < t \le \pi$ הפונקציה $g(t) = \frac{f(x+t)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$ רציפה למקוטעין וגם

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} g(t) \quad &= \quad \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x^-)}{t}\frac{t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)} = f'_+(x) \\
\int_{-\pi}^{0}\frac{f(x+t)-f(x^-)}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}\left(\sin\frac{1}{2}t\cos mt+\cos\frac{1}{2}t\sin mt\right)dt \quad &= \quad \int_{-\pi}^{0}\left(g(t)\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\cos mtdt \\
&\quad + \int_{-\pi}^{0}\left(g(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right)\right)\sin mtdt
\end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned}
h_1(t) \quad &= \quad \begin{cases} 0 & 0 < t \le \pi \\ g(t)\sin\left(\frac{1}{2}t\right) & -\pi \le t \le 0 \end{cases} \\
h_2(t) \quad &= \quad \begin{cases} 0 & 0 < t \le \pi \\ g(t)\cos\left(\frac{1}{2}t\right) & -\pi \le t \le 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

ואז

$$= \quad \int_{-\pi}^{\pi} h_1(t)\cos mtdt + \int_{-\pi}^{\pi} h_2(t)\sin mtdt$$

וע"פ רימן-לבג שני האינטגרלים או מ"פ מתכנסים ל-0 כאשר $m \to 0$. הוכחנו ש

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_m(t)dt \quad \to \quad \frac{f(x^-)}{2}$$

3. לכן מתקיים לפי הלמה (1)

$$s_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_m(t)dt \quad \to \quad \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

■

2.2.2 התכנסות במ"ש

משפט תהי $f(x)$

1. רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$
2. $f^{'}\in E$
3. $f(-\pi)=f(\pi)$

אזי

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos kx + b_k \sin kx\right] \\ f^{'}(x) &\sim \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \gamma_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\right] \end{aligned}$$

כאשר

$$\begin{aligned} \gamma_k &= ikc_k \\ \alpha_k &= kb_k \\ \beta_k &= -ka_k \end{aligned}$$

הוכחה

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)e^{-ikx}|_{-\pi}^{\pi} + ik\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx\right] \\ &= ikc_k \end{aligned}$$

כאשר בתנאי השלישי גורם לכך ש $f(x)e^{-ikx}|_{-\pi}^{\pi}=0$
נראה את מקדמי הטור הממשי

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{'}(x)\sin kx dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\sin kx|_{-\pi}^{\pi} - k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\right] \\ &= -kb_k \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{'}(x)\cos kx dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\cos kx|_{-\pi}^{\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\right] \\ &= ka_k \end{aligned}$$

■

משפט התכנסות במ"ש אם $f(x)$ מקיימת את התנאים (א)-(ג) במשפט גזירה "איבר-איבר", אזי טור פוריה של $f(x)$ מתכנסת ל- $f(x)$ במ"ש על $[-\pi,\pi]$.

תזכורת קריטריון המיורנטה של וירשטרס הטור $\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$ מתכנס במ"ש ובהחלט על הקטע I אם קיימת סדרת מספרים $M_k>0$ שמקיימת שתי דרישות

1. $\forall x\in I, |u_k|\le M_k$
2. $\sum_{k=0}^{\infty}M_k$ מתכנס

הוכחה מהנתונים נובע של-f' מתאים טור פוריה. $f'(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k e^{ikx}$ ולפי אי-שיויון בסל נקבל

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma_k|^2\le\|f'\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2\,dx$$

כעת לפי משפט הגזירה "איבר-איבר"

$$f'(x)=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}c_k e^{ikx}+c_0$$

כאשר $k\neq 0, c_k=\frac{\gamma_k}{ik}$ ולכן

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\frac{\gamma_k}{ik}e^{ikx}+c_0\\u_k(x)&=\frac{\gamma_k}{ik}e^{ikx}\\|u_k(x)|&=\left|\frac{\gamma_k}{ik}e^{ikx}\right|=\left|\frac{\gamma_k}{k}\right|=M_k\end{aligned}$$

צ"ל רק שהטור $\left|\frac{\gamma_k}{k}\right|$ $\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}$ מתכנס. אבל אי-שוויון ק"ש

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_kb_k\right|\le\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_k|^2}\sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|^2}$$

ניקח $a_k=|\gamma_k|, b_k=\frac{1}{|k|}$ וסיימנו כי

$$\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left|\frac{\gamma_k}{k}\right|\le\sqrt{\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}|\gamma_k|^2}\sqrt{\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}\left|\frac{1}{k}\right|^2}<\infty$$

שני הטורים מתכנסים, $\left|\frac{1}{k}\right|^2$ $\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}$ לפי אינפי, $|\gamma_k|^2$ $\sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq 0}}^{\infty}$ לפי אי-שוויון בסל.
לכן מתקיים המיורנטה של וירשטרס ולכן הטור מתכנס במ"ש.

2.2.3 התכנסות בנורמה ומע' סגורה

תזכורת התכנסות בנורמה (מע' סגורה) $\forall f\in E, \lim_{m\to\infty}\|f(x)-s_m(x)\|=0$

משפט ההתכנסות בנורמה המע' הא.נ $\left\{e^{ikx}\right\}$ (או המע' הממשית) היא מע' סגורה. כלומר לכל פונקציה $f\in E$ מתקיים פרסוול

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

הוכחה

1. בשלב ראשון נוכיח שבכל מקרה שטור פוריה מתכנס במ"ש ל $f(x)$ אזי הוא מתכנס בנורמה ל- $f(x)$.
מההנחה ש $s_m(x) \twoheadrightarrow f(x)$ פרושה

$$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\left\{\begin{array}{c}\forall x\in[-\pi,\pi]\\ \vee\forall m>n\end{array}\right.\quad,|s_m(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\|s_m(x)-f(x)\|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|s_m(x)-f(x)|^2\,dx\\ &< \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1dx=\varepsilon^2\end{aligned}$$

2. לכל $f\in E$ ולכל $\varepsilon>0$ קיימת $g\in E$ שמקיימת את התנאים (א)-(ג) ממשפטי גזירה איבר-איבר והתכנסות -במ"ש, כך ש $\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}$(הפונקציה אינטגרבילית לפי רימן ולכן ניתן לקחת קירוב לפי דרבו ולהחליק את הקירוב, כך שההפרש קטן כרצוננו ומתקיים (א)-(ג) לכן הפונקציה החדשה מתכנסת במ"ש ולכן מתקיים 1). לפי משפט התכנסות במ"ש קיים m מספיק גדול כך שהפירוק החלקי ה-m-י של טור פוריה של g. $T_m(x)$ מקיים $\|g-T_m\|<\frac{\varepsilon}{2}$ ולפי אי שוויון המשולש

$$\|f-T_m\| \quad\leq\quad \|f-g\|+\|g-T_m\|<\varepsilon$$

נזכור ש $S_m(x)$ הוא היטל א"ג של $f(x)$ על ת"מ הנפרש ע"י $\left\{e^{ikx}\right\}$ ש-T_m שייך אליו ולמדנו (לפי הקירוב הטוב ביותר) ש

$$\|f-S_m\| \quad\leq\quad \|f-T_m\|\leq\varepsilon$$

■

מסקנה $\forall f\in E$ קיימת זהות פרסוול

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx\end{aligned}$$

ואם גם $g\in E$ מתקיימת זהות פרסוול המוכללת

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\overline{d_k} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx\\ d_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx\end{aligned}$$

משפט (הכללה ללא הוכחה) תהי $f(x)\in E$ וגם $f'(x)\in E$ אם $[a,b]\subseteq[-\pi,\pi]$ וגם $f(x)\in c\,[a,b]$. אזי טור פוריה של $f(x)$ מתכנס ל $f(x)$ במ"ש על הקטע $[a,b]$.

דוגמא $f(x)=x,-\pi\leq x\leq\pi$ אז יש בעיה הקצוות ולכן ניתן להראות רציפות במ"ש על $\forall\,[a,b]\subseteq(-\pi,\pi)$.
נחשב את מקדמי פוריה של $f(x)$ ביחס למע' ה"ממשית"

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty}b_n\sin(nx)=2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(nx)\\ \underset{-\pi<x<\pi}{f(x)} &\cong 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(nx)\end{aligned}$$

יהי $(-\pi,\pi) \supseteq [-c,c]$ נראה התכנסות במ"ש של הטור ל f.$S_m(x)=2\sum_{k=1}^{M}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(nx)$

תזכורת קריטריון האבל הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I אם $\{a_k\}$ סדרה מונוטונית יורדת ל-0 ו-$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ מקיימים

$$\left|\sum_{k=1}^{m}u_k(x)\right| \leq M$$

נחזור

$$\begin{aligned}
S_m &= 2\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(nx)\\
\left|\sum_{k=1}^{m}u_k(x)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin(kx)\right|\\
&= \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin(kx)\right|}{\left|2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\\
&\leq \frac{\left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right|}{2\alpha}\\
&= \frac{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\pm\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2\alpha} \leq \frac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

ואז הקריטריון של האבל גורר התכנסות במ"ש ■

2.2.4 תופעת גיבס

השלילה של התכנסות במ"ש היא

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall m(\varepsilon_0),\begin{cases}\exists n>m\\ \vee\exists x_m\in I\end{cases},|s_m(x_m)-f(x_m)|\geq\varepsilon_0$$

דוגמה $f(x)=x$, $-\pi\leq x\leq\pi$ טור הפורייה $f(x)\sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx$ אז לכל m טבעי ניקח

$$x_m=\pi-\frac{\pi}{m}\in[-\pi,\pi]$$

ואז

$$\begin{aligned}
s_m(x_m) &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\sin kx_m\\
\sin(kx_m) &= \sin\left(k\pi-\frac{k\pi}{x}\right)=(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)\\
\Rightarrow s_m(x_m) &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)\\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{m}\right)}{\frac{k\pi}{m}}\frac{\pi}{x}\rightarrow_{m\to\infty}2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx\approx 1.18\pi
\end{aligned}$$

קיבלנו אינטגרל לפי רימן שניתן להעריך נומרית. לכן הטור לא מתכנס לפונקציה ב $x=\pi$ כי

$$s_m(x_m)-f(x_m) \geq 0.179=\varepsilon_0$$

הערה נסתכל על $\frac{s_m(x_m)-f(x_m)}{f(\pi-)-f(\pi+)}$ כלומר על ההפרש חלקי הקפיצה בקצוות. אז נקבל $\frac{s_m(x_m)-f(x_m)}{f(\pi-)-f(\pi+)} \approx 0.09$

משפט תופעת גיבס תהי $f(x)$ שהיא וניגזרתה שייכים ל-E' ותהי d נק' קפיצה של $f(x)$ אזי קיימת סידרה של נק' $\{x_m\}$, $x_m < d$ כך ש

$$\frac{s_m(x_m)-f(x_m)}{f(d-)-f(d+)} \approx 0.09$$

או בהתאמה $\{x_m\}$, $x_m > d$ כך ש

$$\frac{s_m(x_m)-f(x_m)}{f(d+)-f(d-)} \approx 0.09$$

(כלומר הטעות בכיוון מנוגד לכיוון הקפיצה)

2.2.5 האינטגרציה איבר-איבר

משפט לכל $f \in E$ שטור פוריה שלה $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$. אז

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt = \frac{a_0(x+\pi)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{b_k}{k}\left(\cos kx - (-1)^k\right) - \frac{a_k}{k}\sin kx\right)$$

והטור נ"ל מתכנס במ"ש על $[-\pi,\pi]$. (זה לא טור פוריה של הטור כי יש $\frac{a_0(x-\pi)}{2}$)

רעיון $g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \frac{a_0}{2}x$ אז $g \in E'$, $g' \in E$, רציפה וגם $g(\pi) = g(-\pi)$. לכן היא מתכנסת במ"ש וגם גזירה איבר-איבר נותנת את $f(x)$.

2.2.6 טורי פוריה בקטעים שאינם $[-\pi,\pi]$

בקטע $[-\ell,\ell]$ כלשהו במקרה זה נכווץ את הקטע ע"י שינוי משתנה $t = \frac{\pi}{\ell}x$. נגדיר $g(t) = f(\frac{\ell}{\pi}t) \in E$. אז יש לה טור פוריה מתאים

$$g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}dt$$

או בפיתוח ממשי

$$g(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\,dt$$

ואז

$$f(x) = g(\frac{\pi}{\ell}x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}\frac{\pi}{\ell}dx = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}dx$$

ובפיתוח הממשי

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(\frac{\pi}{\ell}x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)\\
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\frac{\pi}{\ell}dx = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx\\
a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\\
b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx
\end{aligned}$$

בקטע $[a,b]$ כלשהו תהי $f(x)\in E\left[a,b\right]$. נרחיב את $f(x)$ באופן מחזורי לכל $\mathbb{R}$ באורך מחזור $2\ell = b-a$ בצורה

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & a\le x<b \\ \tilde{f}(x+2k\ell) & \forall k\in\mathbb{Z}, \end{cases} \begin{matrix}\forall x\in\mathbb{R}\\ \vee x\notin[a,b)\end{matrix}$$

קיבלנו ש $\tilde{f}\in E\left[-\ell,\ell\right]$ נפתח טור פוריה בקטע

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}\\
c_k &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\tilde{f}(x)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}dx
\end{aligned}$$

ומעל הממשיים

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\right)\\
a_0 &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx\\
a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx\\
b_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx
\end{aligned}$$

הטור שקיבלנו בהרחבה מחזורית נכון לכל $x\in\mathbb{R}$ לכן

$$\begin{aligned}
x\in\left[a,b\right], f(x) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{k\pi}{\ell}x}\\
c_k &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\tilde{f}(x)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}dx\\
\left(\tilde{f}(x+2\pi)-\tilde{f}(x)\right)\Rightarrow &= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)e^{-i\frac{k\pi}{\ell}x}dx
\end{aligned}$$

ומעל הממשיים

$$\begin{aligned}
x \in [a,b], f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{(b-a)}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{(b-a)}x\right)\right) \\
a_0 &= \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \\
a_n &= \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{(b-a)}x\right)dx \\
b_n &= \frac{2}{(b-a)}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{(b-a)}x\right)dx
\end{aligned}$$

2.2.7 פיתוחי פוריה עבור $f \in E[0,\pi]$

קיימים שלושה פיתוחים שונים לטורי פורייה.

טור בקטע $[a,b]$ **הטור**

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2kx} \\
c_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)e^{-i2kx}dx
\end{aligned}$$

וגם בבסיס הממשי

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(2nx) + b_n \sin(2nx)\right) \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2nx)\,dx \\
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2nx)\,dx
\end{aligned}$$

נובע ישירות מהסעיף הקודם.

הרחבה זוגית נרחיב $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ ואז $\tilde{f}(x) \in E[-\pi,\pi]$ הטור המתקבל

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx
\end{aligned}$$

ואפילו קיבלנו התכנסות במ"ש. וגזירה איבר-איבר.

הרחבה אי-זוגית נרחיב $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ -f(-x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ ואז $\tilde{f}(x) \in E[-\pi,\pi]$ הטור המתקבל

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\
b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx
\end{aligned}$$

במקרה זה קיבלנו התכנסות במ"ש בקטע חסום מ-π והתכנסות במ"ש עבור $f(\pi)=0$.

3 התמרת פורייה

3.1 הגדרה

אם נסמן

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{n\pi}{\ell},\\ \delta\omega &= \frac{\pi}{\ell}\\ F_\ell(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,e^{-i\omega x}dx\\ F_\infty(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}c_n &= F_\ell(w_n)\,\delta\omega\\ f(x) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_\ell(\omega_n)\,e^{i\omega_n x}\delta\omega\end{aligned}$$

אזי זה כמו סכום רימן אז שנשאיף את $\ell\to\infty$ נקבל (ללא הצדקה בינתיים)

$$\to_{\ell\to\infty}\quad \int_{-\infty}^{\infty} F_\infty(\omega)\,e^{i\omega x}d\omega$$

הגדרה נסמן ב $G(\mathbb{R})$ את מרחב הפונקציות המורכבות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ שהן רציפות למקוטעין על $\mathbb{R}$.(כלומר בכל קטע סופי יש מספר סופי של נק') ושהן אינטגרביליות בהחלט על $\mathbb{R}$, כלומר

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx &< \infty\\ \lim_{\substack{L\to\infty\\ M\to\infty}}\int_{-M}^{L}|f(x)|\,dx &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

לכל $f\in G(\mathbb{R})$ נגדיר את התמרת פורייה שלה ע"י

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-i\omega x}dx$$

הערה מכיוון ש $\left|f(x)\,e^{-i\omega x}\right|=|f(x)|$ אזי לכל $f\in G(\mathbb{R})$ מתקיים

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\,e^{-i\omega x}\right|dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|$$

לכן לכל $\omega\in\mathbb{R}$ האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$ מתכנס ולכן $\mathcal{F}[f](\omega)$ מוגדרת לכל $\omega\in\mathbb{R}$

משפט עבור כל $f\in G(\mathbb{R})$התמרת פוריה שלה $\mathcal{F}[f](\omega)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ וגם

$$\lim_{\omega\to\pm\infty}\mathcal{F}[f](\omega) = 0$$

כלומר אם נסמן ב- $C_0(\mathbb{R})$ את כל הפונקציות הרציפות על $\mathbb{R}$ והשואפות לאפס ב- $\pm\infty$ אזי $\mathcal{F}:G(\mathbb{R})\to C_0(\mathbb{R})$

3.2 דוגמאות

1. $f_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & a\le x\le b\\ 0 & x\notin[a,b]\end{cases}$ הפונקציה האופיינית של הקטע $[a,b]$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f_{[a,b]}\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_{[a,b]}(x)\,e^{-i\omega x}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{b} e^{-i\omega x}dx=\left.\frac{e^{-i\omega x}}{2\pi(-i\omega)}\right|_{a}^{b}\\ &= \frac{e^{-i\omega a}-e^{-i\omega b}}{2\pi i\omega}\qquad(\omega\neq 0)\end{aligned}$$

בפרט ב $[-b,b]$ נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f_{[a,b]}\right](\omega) &= \frac{e^{i\omega b}-e^{-i\omega b}}{2i\pi\omega}\\ &= \frac{\sin(\omega b)}{\pi\omega}\qquad(\omega\neq 0)\end{aligned}$$

עבור $\omega=0$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f_{[a,b]}\right](0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b}dx=\frac{b-a}{2\pi}\\ \mathcal{F}\left[f_{[-b,b]}\right](0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b}dx=\frac{b-b}{2\pi}=0\end{aligned}$$

נשים לב כי הפונקציה ב- $[-b,b]$ זוגית וההתמרה נותנת פונקציה ממשית וזוגית.

(א) $a>0,g_a(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{a} & |x|\le a\\ 0 & |x|>a\end{cases}$ נחשב

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g_a](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)e^{-i\omega x}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-a}^{0}\left(1+\frac{x}{a}\right)e^{-i\omega x}dx+\int_{0}^{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{-i\omega x}dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{\left(1+\frac{x}{a}\right)e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{-a}^{0}+\frac{1}{a}\int_{-a}^{0}\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}dx+\left.\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right|_{0}^{a}-\frac{1}{a}\int_{0}^{a}\frac{e^{-i\omega x}}{i\omega}dx\right]\\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{i\omega}+\frac{1-e^{i\omega a}}{ai\omega(-i\omega)}+\frac{1}{i\omega}-\frac{e^{-i\omega a}-1}{ai\omega(-i\omega)}\right]\\ &= \frac{2-\left(e^{i\omega a}-e^{-i\omega a}\right)}{2\pi a\omega^2}=\frac{1-\cos(\omega a)}{\pi a\omega^2}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\pi a\omega^2}\\ \mathcal{F}[g_a](0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{|x|}{a}\right)dx=\frac{a}{2\pi}\end{aligned}$$

הפונקציה זוגית וההתמרה נותנת פונקציה זוגית.

(ב) $h_a(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le a\\ -1 & -a\le x<0\\ 0 & |x|>a\end{cases}=f_{[0,a]}(x)-f_{[-a,0]}(x)$ נעזר בזה ש $\mathcal{F}:G(\mathbb{R})\to C_0(\mathbb{R})$ היא העתקה ליניארית בגלל ליניאריות האינטגרל לפי רימן וליניאריות הגבול בקב' שאבריה מתכנסים לסכום סופי.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[h_a](\omega) &= \mathcal{F}\left[f_{[0,a]}\right](\omega)-\mathcal{F}\left[f_{[-a,0]}\right](\omega)\\ &= \frac{\left(1-e^{-i\omega a}\right)-\left(e^{i\omega a}-1\right)}{2\pi i\omega}=\frac{1-\cos(\omega a)}{\pi i\omega}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\omega a}{2}\right)}{\pi i\omega}\end{aligned}$$

נשים לב כי $g_a^{'}(x) = -\frac{1}{a}h_a$.הפונקציה אי-זוגית וההתמרה נתנה פונקציה אי-זוגית וגם דמיוני טהור.

(ג) $f\left(x\right) = e^{-|x|} \in G\left(\mathbb{R}\right)$ נחשב את ההתמרה

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1+i\omega)}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{x(1-i\omega)}}{1-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-x(1+i\omega)}}{1+i\omega}\right|_{0}^{\infty}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}\right] = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}
\end{aligned}$$

קיבלנו פונקציה זוגית והתמרה זוגית.

(ד) $f\left(x\right) = e^{-x^2} \in G\left(\mathbb{R}\right)$ נחשב את ההתמרה

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &= \sqrt{\pi} \\
\mathcal{F}\left[f\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-i\omega x}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+i\omega x-\frac{\omega^2}{4}\right)}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{i\omega}{2}\right)^2}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz \quad \left(z = x+\frac{i\omega}{2}\right) \\
(coshy) \Rightarrow \quad &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

שוב פונקציה זוגית והתמרה שנותנת פונקציה זוגית.

3.3 תכונות התמרת פורייה

1. תכונות הסימטריה

(א) **אם נסמן** $g(x) = f(-x)$ **אזי** $\mathcal{F}\left[g\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f\right](-\omega)$

(ב) **אם** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **אזי** $\mathcal{F}\left[g\right](\omega) = \overline{\mathcal{F}\left[f\right](\omega)}$

(ג) **אם** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ **אזי** $\mathcal{F}\left[f\right](\omega) = \mathcal{F}\left[g\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f\right](-\omega) = \overline{\mathcal{F}\left[f\right](\omega)}$

(ד) **אם** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ **אזי** $\mathcal{F}\left[g\right](\omega) = -\mathcal{F}\left[f\right](\omega) = \overline{\mathcal{F}\left[f\right](\omega)}$

הוכחה

(א) נוכיח

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[g\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-i\omega x}dx \\
(-x = t) \Rightarrow \quad &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}dt \\
&= \mathcal{F}\left[f\right](-\omega) \qquad (8)
\end{aligned}$$

(ב) נוכיח

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}}dt \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt} \\ &= \overline{\mathcal{F}[f](\omega)} \qquad (9)\end{aligned}$$

(ג) נוכיח, מהנתון:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega)$$

ואז

$$\begin{aligned}(8) \Rightarrow \mathcal{F}[g](\omega) &= \mathcal{F}[f](-\omega) \\ (9) \Rightarrow \mathcal{F}[g](\omega) &= \overline{\mathcal{F}[f](\omega)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) &= \mathcal{F}[g](\omega) = \mathcal{F}[f](-\omega) = \overline{\mathcal{F}[f](\omega)}\end{aligned}$$

(ד) נתון:

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow -\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{F}[g](\omega)$$

ואז

$$\begin{aligned}(9) \Rightarrow \mathcal{F}[g](\omega) &= \overline{\mathcal{F}[f](\omega)} \\ \Rightarrow \mathcal{F}[g](\omega) &= -\mathcal{F}[f](\omega) = \overline{\mathcal{F}[f](\omega)}\end{aligned}$$

2. **תכונות הזזה-סיבוב**

עבור $f \in G(\mathbb{R})$ **נסמן** $g(x) = f(ax+b)$ **כאשר** $a \neq 0$ **ו** b **ממשיים.**

(א) $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\omega}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$

i. (שינוי תדר) אם $b=0$ $g(x) = f(ax)$ אזי $\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right)$

ii. (הזזה בזמן גוררת סיבוב בתדר) אם $g(x) = f(x+b)$ אזי $\mathcal{F}[g](\omega) = e^{ib\omega}\mathcal{F}[f](\omega)$

(ב) $\mathcal{F}\left[e^{icx}f\right](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega - c)$

הוכחה

(א) הוכחה

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[g](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b)e^{-i\omega x}dx \\ (t = ax+b, x = \frac{t-b}{a}) \Rightarrow \quad &= \begin{cases}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega\frac{t-b}{a}}\frac{dt}{a} & a>0 \\ \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{-i\omega\frac{t-b}{a}}\frac{-dt}{a} & a<0\end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|}e^{i\frac{b}{a}\omega}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{wt}{a}}dt\end{aligned}$$

(ב) הוכחה

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{icx}f\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{icx}e^{-i\omega x}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\omega-c)x}dx\\ &= \mathcal{F}\left[f\right](\omega-c)\end{aligned}$$

3. תכונות הנגזרת

(א) אם $f\in G(\mathbb{R})$ רציפה ובעלת נגזרת $f^{'}\in G(\mathbb{R})$ ו- $\lim_{|x|\to\infty}f(x)=0$ אזי $\mathcal{F}\left[f'\right](\omega)=i\omega\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$

i. $\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\omega)=(i\omega)^n\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$

(ב) תהי $f\in G(\mathbb{R})\,,\,xf(x)$ אזי $\mathcal{F}\left[xf(x)\right](\omega)=i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$

i. $\mathcal{F}\left[x^nf(x)\right](\omega)=i^n\frac{d^n}{d\omega^n}\mathcal{F}\left[f\right](\omega)$

הוכחה

(א) הוכחה

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[f^{'}\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x)e^{-i\omega x}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{M\to\infty\\ R\to\infty}}\int_{-M}^{R} f^{'}(x)e^{-i\omega x}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{\substack{M\to\infty\\ R\to\infty}}\left[\left(f(x)e^{-i\omega x}\right)\Big|_{-M}^{R}+i\omega\int_{-M}^{R}f(x)e^{-i\omega x}dx\right]\\ \left(\left(f(x)e^{-i\omega x}\right)\Big|_{-M}^{R}\to 0\right)\Rightarrow &= i\omega\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\end{aligned}$$

(ב) הוכחה

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[xf\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\omega x}dx\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(-ixe^{-i\omega x}\right)dx\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\partial e^{-i\omega x}}{\partial\omega}dx\\ &= \frac{i}{2\pi}\frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\\ &= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\end{aligned}$$

דוגמאות

1. חשב את $\mathcal{F}\left[xe^{-x^2+x}\right](\omega)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[xe^{-x^2+x}\right](\omega) &= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[e^{-x^2+x}\right](\omega)\\
&= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right](\omega)\\
&= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[\sqrt[4]{e}e^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\right](\omega)\\
(a=1,b=-\frac{1}{2})\Rightarrow &= i\sqrt[4]{e}\frac{d}{d\omega}\left[e^{-i\frac{1}{2}\omega}\mathcal{F}\left[\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}}\right](\omega)\right]
\end{aligned}$$

2. חשב את $\mathcal{F}\left[(x-|x|)\,e^x\right](\omega)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[(x-|x|)\,e^x\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[(x-|x|)\,e^{-|x|}\right](\omega)\\
&= \mathcal{F}\left[x\left(1-\frac{|x|}{x}\right)e^{-|x|}\right](\omega)\\
\left(|x|^{'}=\frac{|x|}{x}\right) &= \mathcal{F}\left[x\left(e^{-|x|}+\left(e^{-|x|}\right)^{'}\right)\right](\omega)\\
&= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[e^{-|x|}+\left(e^{-|x|}\right)^{'}\right](\omega)\\
&= i\frac{d}{d\omega}\left[e^{-|x|}+\frac{i\omega}{\pi\left(1+\omega^2\right)}\right]\\
&= \frac{i}{\pi}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-i\omega}\right)
\end{aligned}$$

3. משוואה דיפרנציאלית

$$\begin{aligned}
y^{''}+xy^{'}+y &= 0\\
Y &= \mathcal{F}[y]\\
\mathcal{F}\left[y^{''}\right] &= -\omega^2Y\\
\mathcal{F}\left[xy^{'}\right] &= i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[y^{'}\right]=-\frac{d}{d\omega}(\omega Y)=-\omega Y^{'}-Y\\
\Rightarrow -\omega^2Y-\omega Y^{'}-Y+Y &= 0\\
Y^{'} &= -\omega Y\\
Y(\omega) &= ce^{-\frac{\omega^2}{2}}
\end{aligned}$$

אז נשאלת השאלה מהי התמרת פוריה ההפוכה.

$$\begin{aligned}
a>0,\mathcal{F}\left[e^{-a^2x^2}\right] &= \frac{1}{a}\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right]\left(\frac{\omega}{a}\right)=\frac{1}{a}\frac{e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}}{2\sqrt{\pi}}\\
\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}},\mathcal{F}\left[e^{-a^2x^2}\right] &= \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

3.4 התמרת פוריה הפוכה

משפט תהי $f\in G(\mathbb{R})$, שיש לה נגזרות חד צדדיות בנקודה x, אז

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}](x)=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

תוצאה אם $f\in G(\mathbb{R})$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ ו- $f^{'}(x)$ רציפה למקוטעין ב- $\mathbb{R}$, אז

$$\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\mathcal{F}[f](\omega)e^{i\omega x}d\omega = f(x)$$

דוגמא

$$\mathcal{F}(w) = \frac{\sin\omega}{\omega}$$

אז $\mathcal{F}(w)\notin G(\mathbb{R})$ כי

$$\begin{aligned}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin\omega|}{\omega} &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\frac{|\sin\omega|}{\omega}d\omega\\ &\geq \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin\omega|\,d\omega\\ &= \sum_{k=1}^{m}\frac{2}{k\pi}\to_{m\to\infty}\infty\end{aligned}$$

רוצים לחשב את $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}](x)$

$$\begin{aligned}f_{[-a,a]} &= \begin{cases}1 & -a\leq x\leq a\\ 0 & |x|>a\end{cases}\\ \mathcal{F}\left[f_{[-a,a]}\right](\omega) &= \frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega}\\ (a=1)\Rightarrow\mathcal{F}\left[\pi f_{[-a,a]}\right](\omega) &= \frac{\sin(\omega)}{\omega}\\ \Rightarrow\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{ix\omega}d\omega &= \begin{cases}\pi & |x|<1\\ 0 & |x|>1\\ \frac{\pi}{2} & x=\pm1\end{cases}\end{aligned}$$

אימות של משפט ההתמרה ההפוכה (ללא הוכחה)

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{ix\omega}d\omega &= \int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega\cos x\omega}{\omega}d\omega+i\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega\sin x\omega}{\omega}d\omega \\
&= 2\int_{0}^{M}\frac{\sin\omega\cos x\omega}{\omega}d\omega+i0 \\
&= \int_{0}^{M}\frac{\sin\left(x+1\right)\omega+\sin\left(1-x\right)\omega}{\omega}d\omega \qquad (10) \\
\int_{0}^{\infty}\frac{\sin b\omega}{\omega}d\omega &= \begin{cases}0 & b=0\\ \int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t}dt & b>0\\ -\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t}dt & b<0\end{cases} \\
\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(t\right)}{t}dt &= \int_{0}^{a}\frac{\sin\left(t\right)}{t}dt+\int_{a}^{\infty}\frac{\sin\left(t\right)}{t}dt \\
\int_{a}^{\infty}\frac{\sin\left(t\right)}{t}dt &= \left(\frac{-\cos t}{t}\right)\Big|_a^\infty-\int_a^\infty\frac{\cos}{t^2}dt \\
&= \frac{\cos a}{a}-\int_a^\infty\frac{\cos t}{t^2}dt \\
\Rightarrow\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\left(t\right)}{t}dt &= \ell\in\mathbb{R}\;(<\infty)
\end{aligned}$$

ע"פ דריכלה

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f\left(x+t\right)\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt &\to \frac{f\left(x+\right)}{2} \\
f\left(t\right) &= \frac{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t}\to_{t\to0^+}1 \\
\Rightarrow\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt &\to \frac{1}{2} \\
\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{t\left(m+\frac{1}{2}\right)}\left(m+\frac{1}{2}\right)dt \\
\left(t\left(m+\frac{1}{2}\right)=u\right)\Rightarrow &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{\sin\left(u\right)}{u}du\to\frac{1}{2} \\
\Rightarrow\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}dt &\to \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

ואז קיבלנו

$$(10)\Rightarrow\int_{-M}^{M}\frac{\sin\omega}{\omega}e^{ix\omega}d\omega = \begin{cases}\pi & |x|>1\\ 0 & |x|<1\\ \frac{\pi}{2} & x=\pm1\end{cases}$$

דוגמא

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(w\right) &= \frac{1}{1+\omega^2} \\
\mathcal{F}\left[\pi e^{-|x|}\right]\left(\omega\right) &= \frac{1}{1+\omega^2} \\
\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) &= \lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{1}{1+\omega^2}e^{ix\omega}d\omega \\
&= \pi e^{-|x|}
\end{aligned}$$

אבל גם $\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}$ ולכן

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{i\omega x} dx &= \pi e^{-|\omega|} \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-i\omega x} dx &= \frac{e^{-|\omega|}}{2} \\ \Rightarrow \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\omega) &= \frac{e^{-|\omega|}}{2} \end{aligned}$$

תוצאה אם $f \in G(\mathbb{R})$ פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ ו- $\mathcal{F}[f] \in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f]] = \frac{1}{2\pi} f(-x)$$

3.5 נוסחאות פלנשרל

אם $f, g \in G(\mathbb{R})$ ומקיימות $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$ אזי

1. $\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}[f](\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) \overline{\mathcal{F}[g](\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$

רעיון הוכחה נוכיח את החלק השני, החלק הראשון נובע מהחלק השני

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) \overline{\mathcal{F}[g](\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) \overline{g(x)} e^{i\omega x} dx d\omega$$

ללא הצדקה נחשב אינטגרל מוכלל כפול (תוך שינוי סדר סכימה)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega \right) \overline{g(x)} dx$$

ללא הצדקה ע"פ ההנחות קיבלנו $\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega = \ell \in \mathbb{R}$ ואז

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$$

לכן

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) e^{i\omega x} d\omega \right) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \overline{g(x)} dx$$

וע"פ מחלקת השקילות של מספר סופי של נקודות אי-רציפות בקטע סגור כלשהו

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \equiv f(x)$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) \overline{g(x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f](\omega) \overline{\mathcal{F}[g](\omega)} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \end{aligned}$$

דוגמא $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(a\omega)}{\omega^2}d\omega$ אנו ראינו

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a\omega)}{\pi\omega} &= \mathcal{F}\left[f_{[-a,a]}\right](\omega)\\ \Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(a\omega)}{\omega^2}d\omega &= \pi^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{F}\left[f_{[-a,a]}\right](\omega)\right|^2 d\omega\end{aligned}$$

וע"פ פלנשרל

$$\begin{aligned}&= \frac{\pi^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f_{[-a,a]}(x)\right|^2 dx\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-a}^{a}1dx=\pi a\end{aligned}$$

3.6 תכונת הקונוולוציה

$F(\omega),G(\omega)$, כאשר $F(x)=\mathcal{F}[f](\omega),G(x)=\mathcal{F}[g](\omega)$, מהי הפונקציה $h(x)$ כך ש

$$\mathcal{F}[h](\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

הגדרה תהינה $f(x),g(x)$ שתי פונקציות ב-$G(\mathbb{R})$ הקונוולוציה שלהן מוגדרת ע"י

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$$

בתנאי שהאינטגרל הנ"ל מתכנס.

טענה אם $f,g\in G(\mathbb{R})$ אז $f*g\in G(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}|(f*g)(x)|dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt\right|dx\\ &\le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)||g(x-t)|dtdx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-t)|dx\right)dt\\ (x-t)=s\Rightarrow\quad &= \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(s)|ds\right)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}|g(s)|ds\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty\end{aligned}$$

משפט הקונוולוציה אם $g,f\in G(\mathbb{R})$ אזי

$$\mathcal{F}[f*g](\omega) = 2\pi\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)$$

כלומר

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)G(\omega)](x) = \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}^{-1}[F]*\mathcal{F}^{-1}[G]\right)(x)$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[f*g\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}g(x-t)e^{-i\omega(x-t)}dtdx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(x-t)e^{-i\omega(x-t)}dx\right)dt \\
(s=x-t)\Rightarrow &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}g(s)e^{-i\omega(s)}dx\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\int_{-\infty}^{\infty}g(s)e^{-i\omega(s)}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left[f\right](\omega)\,\mathcal{F}\left[g\right](\omega)
\end{aligned}$$

3.7 שימוש להתמרת פוריה לפתרון בעיית דריכלה בחצי מישור

הבעיה למצוא פתרון של משוואה

$$u_{xx}+u_{yy} = 0$$

בחצי המישור $D=\{(x,y)\,|\,-\infty<x<\infty,y>0\}$ **המקיים** $u(x,0)=f(x)$ **עבור** $f(x)$ **פונקציה רציפה למקוטעין על** $\mathbb{R}$ **ואינטגרבילית בהחלט על** $\mathbb{R}$.

פתרון

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[u(,y)\right](\omega) &= U(w,y) \\
\mathcal{F}\left[u(,0)\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[f\right](\omega)=F(\omega) \\
\mathcal{F}\left[u_{xx}\right](\omega) &= -\omega^2\mathcal{F}\left[u\right](\omega)=-\omega^2U(\omega,y) \\
\mathcal{F}\left[u_{yy}\right](\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u_{yy}(x,y)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y)\,e^{-i\omega x}dx \\
&= U_{yy}(\omega,y) \\
\Rightarrow U_{yy}(\omega,y) &= \omega^2U(\omega,y) \\
U &= A(\omega)\,e^{\omega y}+B(\omega)\,e^{-\omega y}\rightarrow_{y\rightarrow\infty}0 \\
U(y=0) &= A(\omega)+B(\omega)=F(\omega)
\end{aligned}$$

מאחר שהביטוי צריך לשאוף ל-0 ב $\infty\rightarrow y$ **אז** $A(\omega)=0$ **ולכן**

$$\begin{aligned}
(\omega>0,A(\omega)=0)\Rightarrow,B(\omega) &= F(\omega) \\
(\omega<0,B(\omega)=0)\Rightarrow,A(\omega) &= F(\omega)
\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned}
U(w,y) &= \begin{cases}F(\omega)\,e^{-\omega y} & \omega>0\\ F(\omega)\,e^{\omega y} & \omega<0\end{cases} \\
&= F(\omega)\,e^{-y|\omega|}
\end{aligned}$$

ואז ע"פ הקונבולוציה אם נמצא $h(x,y)$ כך ש $\mathcal{F}[h(,y)](\omega)=e^{-y|\omega|}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[U(w,y)] &= \mathcal{F}^{-1}\left[F(\omega)e^{-y|\omega|}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]*\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-y|\omega|}\right]\right)(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}(f(x)*h(x,y))(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)h(x-t,y)\,dt
\end{aligned}$$

מצאנו כבר ש

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+x^2}\right](\omega) &= \frac{1}{2}e^{-|\omega|} \\
a>0,\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+a^2x^2}\right](\omega) &= \frac{1}{2a}e^{\frac{|\omega|}{a}},a=\frac{1}{y} \\
\mathcal{F}\left[\frac{\frac{2}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}\right](\omega) &= e^{-y|\omega|} \\
h(x,y) &= \frac{2y}{x^2+y^2} \\
u(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{2y}{(x-t)^2+y^2}dt
\end{aligned}$$

4 התמרת לפלס

4.1 הגדרה

הגדרה התמר לפלס עבור פונקציה $F:[0,\infty]\mapsto\mathbb{C}$ רציפה למקוטעין נסמן

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt$$

דוגמאות

1. $f(t)=e^{at},a\in\mathbb{R}$ אז

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{at}\right](s) &= \int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{M\to\infty}\int_0^{\infty}e^{-(s-a)t}dt \\
&= \lim_{M\to\infty}\left(\frac{-e^{-(s-a)t}}{(s-a)}\right)\Bigg|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{s-a}-\lim_{M\to\infty}\frac{-e^{-(s-a)M}}{(s-a)} \\
s>a\Rightarrow &= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

.2 $f\left(t\right)=e^{\zeta t},\zeta\in\mathbb{C},t\geq0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{\zeta t}\right]\left(s\right) &= \int_{0}^{\infty}e^{-\left(s-\zeta\right)t}dt\\
&= \frac{1}{s-\zeta}-\lim_{M\to\infty}\frac{-e^{-\left(s-\zeta\right)M}}{s-\zeta}\\
\zeta=a+ib\Rightarrow e^{-\left(s-\zeta\right)M} &= e^{-\left(s-\Re\zeta\right)M}e^{i\Im\zeta M}\\
\left(s>\Re\zeta\right)\Rightarrow e^{-\left(s-\zeta\right)M} &\to_{M\to\infty} 0\\
\left(s>\Re\zeta\right)\Rightarrow\mathcal{L}\left[e^{\zeta t}\right]\left(s\right) &= \frac{1}{s-\zeta}=\frac{s-\Re\zeta+i\Im\zeta}{\left(s-a\right)^{2}+b^{2}}\\
\mathcal{L}\left[e^{\Re\zeta t}\left(\cos\left(t\Im\zeta\right)+i\sin\left(t\Im\zeta\right)\right)\right]\left(s\right) &= \frac{s-\Re\zeta+i\Im\zeta}{\left(s-a\right)^{2}+b^{2}}
\end{aligned}$$

ואז קיבלנו את התוצאה

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[e^{\Re\zeta t}\cos\left(t\Im\zeta\right)\right]\left(s\right) &= \frac{s-\Re\zeta}{\left(s-a\right)^{2}+b^{2}}\\
\mathcal{L}\left[e^{\Re\zeta t}\sin\left(t\Im\zeta\right)\right]\left(s\right) &= \frac{\Im\zeta}{\left(s-a\right)^{2}+b^{2}}
\end{aligned}$$

.3 עבור $f:[0,\infty]\mapsto\mathbb{C}$ נגדיר $\tilde{f}=\begin{cases}f\left(x\right) & x\geq0\\0 & x<0\end{cases}$ נניח ש $\tilde{f}\in G\left(\mathbb{R}\right)$ אז

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\tilde{f}\right)\left(\omega\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}\left(x\right)e^{-i\omega x}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\omega x}dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\mathcal{L}\left(f\right)\left(i\omega\right)
\end{aligned}$$

4.2 תכונות התמרת לפלס

משפט $f\left(x\right)$ מוגדרת רציפה למקוטעין על $[0,\infty)$ ומטיפוס אקספוננציאלי a, כלומר קיימים $k>0,a\in\mathbb{R}$ כך ש

$$\forall t>0,\left|f\left(t\right)\right| \leq ke^{at}$$

אזי

$$\mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right) = \int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(t\right)dt$$

מוגדרת לכל $s>a$ ו $\mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right)\to_{s\to\infty}0$

הוכחה

$$\int_{0}^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|e^{-st}dt \leq k\int_{0}^{\infty}e^{-\left(s-a\right)t}dt=\frac{k}{s-a}\to_{s\to\infty}0$$

תכונות הנגזרת

1. ההתמרה של הנגזרת

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f'\right](s) &= s\mathcal{L}[f](s) - f(0)\\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) &= s^n\mathcal{L}[f](s) - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - ... - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

הוכחה

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f'\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt\\ &= \left(e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\right)\\ &= -f(0) + \mathcal{L}[f](s)\\ \mathcal{L}\left[f''\right](s) &= -f'(0) + s\mathcal{L}\left[f'\right](s)\\ &= -f'(0) + s\mathcal{L}[f](s) - sf(0)\\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) &= -f^{(n-1)}(0) + s\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}\right](s)\\ &= s\mathcal{L}\left[f^{(n-1)}\right](s) - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - ... - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

2. כפל ב t:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tf(t)](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)\\ \mathcal{L}[t^nf(t)](s) &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}[f](s)\end{aligned}$$

הוכחה

$$-\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt$$

דוגמה

$$\begin{aligned}\left(f(t) = 1 = e^{0t}\right) \Rightarrow \mathcal{L}[t^n](s) &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)\\ \left(\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{(-1)^n n!}{s^{n+1}}\right) \Rightarrow &= \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

בדרך שניה

$$\begin{aligned}(t^n)^{(n)} &= n!\\ f(t) &= t^n\\ f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0) &= 0\\ \Rightarrow \mathcal{F}[t^n](s) &= \frac{1}{s^n}\frac{n!}{s} = \frac{n!}{s^{n+1}}\end{aligned}$$

תכונות הזזה

1. $\mathcal{L}\left[e^{ct}f(t)\right]=\mathcal{L}[f](s-c)$

הוכחה

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)\,dt=\mathcal{L}[f](s-c)$$

טבלת התמרות

$f(t)=\mathcal{L}'[F](t)$	$F(s)=\mathcal{L}[f](s)$
$e^{\zeta t}$	$\frac{1}{s-\zeta},\ s>\Re\zeta$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
$\delta_a(t),\ a>0$	$e^{-as},\ s>0$

בנוסף

$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f^{(n)(t)}$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}f^{(k)}(0)\,s^{n-k-1}$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$
$e^{\zeta t}f(t)$	$F(s-\zeta)$
$u_a(t)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$(f*g)(t)$	$G(s)=\mathcal{L}[g](s),\ F(s)G(s)$

פתרון מד"ר ליניארית מסדר 2, הומוגנית אם מקדמים קבועים

.1

$$\begin{aligned}
y=y(t),a\neq 0,ay''+by'+cy &= 0\\
t\geq 0,y(0)=\alpha,y'(0)=\beta &\\
a\left(s^2\mathcal{L}[y]-(\alpha s+\beta)\right)+b\left(s\mathcal{L}[y]-\alpha\right)+c\mathcal{L}[y] &= 0\\
\left(as^2+bs+c\right)\mathcal{L}[y] &= a(\alpha s+\beta)+b\alpha\\
\mathcal{L}[y](s) &= \frac{a(\alpha s+\beta)+b\alpha}{as^2+bs+c}\\
\mathcal{L}[y](s) &= \alpha\frac{s+b}{as^2+bs+c}+\beta\frac{a}{as^2+bs+c}
\end{aligned}$$

ישנם מספר מצבים

(א) $b^2-4ac>0$ (כלומר לפולינום as^2+bs+c יש שני שורשים ממשים שונים s_1,s_2) הפונקציות הרציונליות משמאל ניתנות לרישום כצרוף ליניארי של $\frac{1}{s-s_1},\frac{1}{s-s_2}$ שהתמרות לפלס ההפוכות הן e^{s_2t},e^{s_1t}

(ב) $b^2-4ac=0$ (כלומר לפולינום יש שורש ממשי אחד כפול s_1) הפונקציות הרציונליות ניתנות לרישום כצירוף ליניארי של $\frac{1}{s-s_1},\frac{1}{(s-s_1)^2}$ שהתמרות לפלס ההפוכות e^{s_1t},te^{s_1t}

ג) $b^2-4ac<0$

$$\begin{aligned}
as^2+bs+c &= a\left[\left(s^2+\frac{b}{a}s+\frac{b^2}{4a^2}\right)+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{5ac-b^2}{4a^2}\right]\\
&= a\left[(s-\gamma)^2+\delta^2\right]\\
\mathcal{L}[y](s) &= \alpha\frac{as+b}{a\left[(s-\gamma)^2+\delta^2\right]}+\beta\frac{a}{a\left[(s-\delta)^2+\delta^2\right]}\\
\frac{as+b}{a\left[(s-\gamma)^2+\delta^2\right]} &= \frac{(s-\gamma)}{(s-\gamma)^2+\delta^2}+\frac{a\gamma+b}{a\left[(s-\gamma)^2+\delta^2\right]}\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[y]\right](s) &= e^{\gamma t}\cos(\delta t)+ce^{\gamma t}\sin(\delta t)
\end{aligned}$$

2. $y''-4y'+5y=0, y(0)=0, y'(0)=1$

$$\begin{aligned}
s^2\mathcal{L}[y]-1-4\left(s\mathcal{L}[y]\right)+5\mathcal{L}[y] &= 0\\
\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2-4s+5}\\
&= \frac{1}{(s-2)^2+1}\\
y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+1}\right](t)\\
&= e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right](t)\\
&= e^{2t}\sin(t)
\end{aligned}$$

4.3 פונקציית הביסייד ופונקציית δ של דירק

4.3.1 פונקציית הביסייד Havy-side ותכונת ההזזה

$$a>0, u_a(t) = \begin{cases}1 & t\geq a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

נסמן $y=f(t)$ אזי הזזה של הפונקציה $u_a(t)f(t-a)=\begin{cases}f(t-a) & t\geq a\\ 0 & t<a\end{cases}$ ואז התמרת פוריה

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[u_a(t)f(t-a)\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)f(t-a)\,dt\\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt\\
(\tau=t-a)\Rightarrow \quad &= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau\\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\\
&= e^{-as}\mathcal{L}[f](s)
\end{aligned}$$

דוגמא

1. $f\left(t\right)=\left[t\right]^{2}$

$$\begin{aligned} f\left(t\right) &= \left[t\right]^{2}\\ &= u_{1}\left(t\right)+3u_{2}\left(t\right)+5u_{3}\left(t\right)+...+\left(2n-1\right)u_{n}\left(t\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)u_{n}\left(t\right)\\ \mathcal{L}\left[f\right]\left(s\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)\frac{e^{-ns}}{s}\\ &= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)\left(e^{-s}\right)^{n}\\ \left(e^{-s}=x^{2}<1\right)\Rightarrow &= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n-1\right)x^{2n} \end{aligned}$$

2. $f\left(t\right)=\left[t\right]\sin\left(\pi t\right)$ **(סינוס עם שינוי משרעת)**

$$\begin{aligned} \left[t\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}u_{n}\left(t\right)\\ f\left(t\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}u_{n}\left(t\right)\sin\left(\pi t\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}u_{n}\left(t\right)\sin\left(\pi\left(t-n\right)+\pi n\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}u_{n}\left(t\right)\left(-1\right)^{n}\sin\left(\pi\left(t-n\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}e^{-ns}\frac{\pi}{s^{2}+\pi^{2}}\\ &= \frac{\pi}{s^{2}+\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}e^{-ns}\\ \left(s>0,e^{-s}=x\right)\Rightarrow &= \frac{\pi}{\ln^{2}\left(x^{-1}\right)+\pi^{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n}x^{n} \end{aligned}$$

4.3.2 "פונקציית" δ של דירק

ראשית נגדיר את פונקציית האימפולס $\sigma_{a,c}\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{2c} & \left|a-t\right|\le c\\ 0 & \left|a-t\right|>0\end{cases}$ **אז לפי פונקציות הביסייד**

$$\begin{aligned} \sigma_{a,c} &= \frac{1}{2c}u_{a}\left(t+c\right)-\frac{1}{2c}u_{a}\left(t-c\right)\\ &= \frac{u_{a}\left(t+c\right)-u_{a}\left(t-c\right)}{2c} \end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{a,c}(t)\,f(t)\,dt &= \\ \left(\lim_{t\to a}f(t)=f(a)\right)\Rightarrow \quad &= \frac{1}{2c}\int_{a-c}^{a+c}f(t)\,dt\to_{c\to0^{+}}f(a)\end{aligned}$$

אזי $\delta_a(t)$ של דירק מוגדרת ע"י

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_a(t)\,f(t)\,dt = f(a)$$

תכונות פונקציית האימפולס

1. $\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{a,c}(t)\,dt=1$
2. $t\in\mathbb{R};\sigma_{a,c}(t)\geq0$
3. $t\neq a,\lim_{c\to0^{+}}\sigma_{a,c}(t)=0$

התמרת לפלס של פונקציית דירק

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\delta_a(t)\right](s) &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-st}\delta_a(t)\,dt\\ &= e^{-as}\\ &= s\frac{e^{-as}}{s}-\delta_a(0)\\ &= s\mathcal{L}\left[u_a(t)\right](s)-u_a(0)\\ &= \mathcal{L}\left[u_a^{'}(t)\right](s)\end{aligned}$$

לכן אנו מזהים בצורה מוכללת (לא נגזרת קלאסית) את δ_a אם $u_a^{'}$.

4.4 תכונת הקונבולוציה (בהתמרת לפלס)

נתון $f,g:[0,\infty)\mapsto\mathbb{C}$ אז נגדיר

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \begin{cases}f(t) & t\geq0\\ 0 & t<0\end{cases}\\ \tilde{g}(x) &= \begin{cases}g(t) & t\geq0\\ 0 & t<0\end{cases}\end{aligned}$$

ואז הקונבולוציה

$$\begin{aligned}\tilde{f}*\tilde{g}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(y)\,\tilde{g}(t-y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,\tilde{g}(t-y)\,dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(y)\,g(t-y)\,dy=(f*g)(t)\end{aligned}$$

משפט הקונבולוציה אם $|f(t)| \le ke^{at}$ ו $|g(t)| \le k_2 e^{at}$ אזי

$$(f*g)(s) = \int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx$$

מקיימת

$$|(f*g)(t)| \le k_1 k_2 t e^{at}$$

וכן

$$\mathcal{L}[(f*g)(t)](s) = \mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[g](s)$$

הוכחה

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx\right| &\le \int_0^t |f(x)|\,|g(t-x)|\, dx \\
&\le k_1 k_2 \int_0^t e^{ax} e^{a(t-x)} \\
&= k_1 k_2 \int_0^t e^{at} dx = k_1 k_2 t e^{at}
\end{aligned}$$

וכן בגלל ששני התחומים בגבול של האינטגרל המוכלל, הם תחומים פשוטים

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)\, g(t-x)\, dx\right) dt &= \int_0^t f(x)\left(\int_x^\infty e^{-st} g(t-x)\, dt\right) dx \\
&= \int_0^t f(x)\left(\int_x^\infty e^{-s(t-x)} e^{-sx} g(t-x)\, dt\right) dx \\
&= \int_0^t e^{-sx} f(x)\left(\int_x^\infty e^{-s(t-x)} g(t-x)\, dt\right) dx \\
(\tau = t-x, d\tau = dt) \Rightarrow &= \int_0^t e^{-sx} f(x)\left(\int_x^\infty e^{-s(\tau)} g(\tau)\, dt\right) dx \\
&= \int_0^t e^{-sx} f(x)\, \mathcal{L}[g](s)\, dx \\
&= \mathcal{L}[g](s) \int_0^t e^{-sx} f(x)\, dx \\
&= \mathcal{L}[g](s)\,\mathcal{L}[f](s)
\end{aligned}$$

4.5 דוגמאות

משוואה דיפרנציאלית

דוגמא

$$\begin{aligned}
y''' - y &= u_\pi(t) - u_{2\pi}(t) \\
y(0) &= 1 \\
y'(0) &= 0 \\
y''(0) &= -1
\end{aligned}$$

נפעיל את התמרת לפלס

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[y](s) &= Y(s)\\
\mathcal{L}\left[y^{'''}\right](s) &= s^3Y(s)-s^2+1\\
\left(s^3-1\right)Y(s)-\left(s^2-1\right) &= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s}\\
Y(s) &= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s\left(s^3-1\right)}+\frac{\left(s^2-1\right)}{\left(s^3-1\right)}\\
&= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s(s-1)\left(s^2+s+1\right)}+\frac{s+1}{s^2+s+1}\\
&= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s(s-1)\left(s^2+s+1\right)}+\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\
&= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s(s-1)\left(s^2+s+1\right)}+\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\
&\quad +\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\
&= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{s(s-1)\left(s^2+s+1\right)}+\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\
&\quad +\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\right.&\\
\left.\frac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right] &= e^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s)}{(s)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\\
&\quad +e^{-\frac{1}{2}t}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\\
&= e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\\
F=\frac{1}{s(s-1)\left(s^2+s+1\right)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+s+1}=A+Be^t+...=f\\
\mathcal{L}^{-1}\left[f\left(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}\right)\right] &= u_\pi(t)\mathcal{L}^{-1}[F(t-\pi)]-u_{2\pi}(t)\mathcal{L}^{-1}[F(t-2\pi)]\\
&= u_\pi(t)f(t-\pi)-u_{2\pi}(t)f(t-2\pi)
\end{aligned}
$$

ווריאציה של המשוואה

$$
\begin{aligned}
y^{'''}-y &= \delta_\pi(t)-\delta_{2\pi}(t)\\
\left(s^3-1\right)Y(s) &= e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}\\
Y(s) &= \frac{e^{-\pi s}-e^{-2\pi s}}{(s-1)\left(s^2+s+1\right)}
\end{aligned}
$$

דוגמא

$$\begin{aligned}
y^{(n)} &= f(t) \\
y(0) &= y^{'}(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0 \\
\mathcal{L}\left[y^{(n)}\right](s) &= s^n \mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s) \\
\mathcal{L}[y](s) &= \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s^n} \\
&= \mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right](s) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t f(x)(t-x)^{n-1}\,dx
\end{aligned}$$

דוגמא

$$\begin{aligned}
ay^{''} + by^{'} + cy &= h(t) \\
y(0) &= y^{'}(0) = 0 \\
\left(as^2 + bs + c\right) Y(s) &= H(s) \\
Y(s) &= \frac{H(s)}{(as^2 + bs + c)}
\end{aligned}$$

ע"י הקונבולוציה

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1}[H(s)]\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(as^2+bs+c)}\right] \\
\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(as^2+bs+c)}\right] = g\right) \Rightarrow \quad &= \int_0^t h(x)\,g(t-x)\,dx
\end{aligned}$$

דוגמא

$$\begin{aligned}
f^{''}(t) &= \int_0^t uf(t-u)\,du = t * f(t) \\
f(0) &= -1 \\
f^{''}(0) &= 1
\end{aligned}$$

ע"פ הקונבולוציה

$$\begin{aligned}
s^2 F(s) + s - 1 &= \frac{F(s)}{s^2} \\
\left(s^4 - 1\right) F(s) &= (1-s)\,s^2 \\
F(s) &= -\frac{(1-s)\,s^2}{(s^4-1)} = -\frac{s^2}{(s+1)(s^2+1)}
\end{aligned}$$

שימושים לחישוב אינטגרלים

דוגמא

$$\begin{aligned}
s>0,\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{1}{\sqrt{t}}dt\\
\left(st=u^2\right)\Rightarrow &= \int_0^\infty e^{-u^2}\frac{\sqrt{s}}{u}\frac{2udu}{s}\\
&= 2\frac{1}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-u^2}du\\
&= 2\frac{1}{\sqrt{s}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}
\end{aligned}$$

תוצאה

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[t^{n-\frac{1}{2}}\right](s) &= (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s)\\
&= (-1)^n\sqrt{\pi}\frac{d^n}{ds^n}s^{-\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{\pi}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdot,,,\cdot\frac{2n-1}{2}s^{-n-\frac{1}{2}}\\
&= \sqrt{\pi}\frac{(2n)!}{2^n2^nn!}s^{-n-\frac{1}{2}}\\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{s^n\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

תוצאה

$$\begin{aligned}
p>-1,\mathcal{L}\left[t^p\right](s) &= \int_0^\infty e^{-st}t^pdt\\
(s>0,(st)=u)\Rightarrow &= \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^p\frac{du}{s}\\
&= \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^pdu\\
&= \frac{1}{s^{p+1}}\gamma(p+1)\\
\gamma(n+1) &= n!\\
\gamma(p+1) &= p\gamma(p)\\
\gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\\
\gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

דוגמא

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right](s) &= \sqrt{\frac{\pi}{s}}\\
\mathcal{L}\left[\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{s-i}}\\
&= \sqrt{\frac{\pi\left(s+i\right)}{s^2+1}}\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s^2+1}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{2}}\\
\mathcal{L}\left[\frac{\left(\cos t+i\sin t\right)}{\sqrt{t}}\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{s^2+1}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{2}}\right)\\
\mathcal{L}\left[\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right] &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+1}+s}{s^2+1}}\\
\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right] &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{s^2+1}}
\end{aligned}
$$

תוצאה

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(t\right)}{\sqrt{t}}dt &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\\
\left(t=x^2\right)\Rightarrow &= \int_0^{\infty}2\cos\left(x^2\right)dx\\
\int_0^{\infty}\cos\left(x^2\right)dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}
$$