תורת האופטימיזציה (104193) ־ סיכום

יאן מכלבסקי

28 ביוני 2010

1 הגדרות

1.1 קבוצה פתוחה

כל הנק' שלה הן נק' פנימיות.

1.2 קבוצה סגורה

קבוצה שהמשלים שלה הוא קבוצה פתוחה. קבוצה סגורה מכילה את כל נק' ההצטברות שלה.

1.3 נקודת שפה

נק' z היא נק' שפה של הקבוצה C אם לכל $\epsilon > 0$ הכדור $B(z,\epsilon)$ מכיל גם נק' ששיכות ל־C וגם נק' שאינן שייכות ל־C.

1.4 קבוצה קומפקטית

קבוצה סגורה וחסומה.

1.5 פונקציה קוארסיבית

פונק' רציפה המוגדרת על R^n נקראת קוארסיבית אם

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$$

1.6 פונקציה קמורה

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) : \forall \lambda \in [0,1]$$

1.7 פוסינום

פונק' מהצורה

$$g(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{m} (t_j)^{\alpha_{ij}}$$

כאשר $t_j > 0$ לכל $0 \le j \le m$ c_i הם קבועים חיוביים ו־a_{ij} קבועים מספריים כלשהם.

1.8 אפי־גרף

$$epi\left(f\right)=\left\{ \left(x,r\right)\in R^{n+1}:x\in C,r\geq f\left(x\right)\right\}$$

1.9 נקודה פיזיבילית

נקודה אשר מקיימת את כל האילוצים של הבעיה P. אם קבוצת נק' הפיזיביליות אינה ריקה הבעיה P הינה קונסיסטנטית.

1.10 נקודת סלייטר

אם בקבוצת הפיזיביליות קיימת קבוצה שעבורה $g\left(x_{i}\right)<0$ (אי־שוויון חד) אז הקבוצה נקראת סופר־פיזיבילית והנק' x_{i} נקראת נקודת סלייטר של P.

1.11 בעיית תכנון קמור

אומרים ש־P היא בעיית תכנון קמור אם פונק' המטרה, פונק' האילוצים ו־C, הקבוצה שעליה מוגדרים האילוצים הן כולן קמורות.

1.12 MP

בהינתן תכנית P מסמנים את האינפימום של פונק' המטרה על קבוצת הפיזיביליות ב־MP.

$$MP=\underset{x\in C,g(x)\leq0}{inf}\left\{ f\left(x\right)\right\}$$

אם $x^{\star}$ הוא מינימייזר גלובלי של P אז $MP=f\left(x^{\star}\right)$.

1.13 מרווח דואליות

אם P תכנית קמורה עם תכנית דואלית DP ואם $MP>DP$ אזי אומרים שיש ל־P מרווח דואליות.

1.14 פונקצית העונש של קורנט־בלטרמי

$$P_{k}\left(x\right)=f\left(x\right)+k\sum_{i=1}^{m}\left[g_{i}^{+}\left(x\right)\right]^{2}$$

1.15 מישור משיק

משטח S נתון ע"י $g\left(x,y,z\right)=0$. המישור המשיק למשטח בנק' x_{0} הוא

$$\left(x-x_{0}\right)\cdot\nabla g\left(x_{0}\right)=0$$

2 משפטים

2.1 משפט טיילור

נניח ש־f,f',f'' קיימות על קטע סגור $[a,b]$. אם $x,x^{\star}$ הן שתי נק' על קטע זה אז קיימת נק' z כך שמתקיים

$$f\left(x\right)=f\left(x^{\star}\right)+f'\left(x^{\star}\right)\left(x-x^{\star}\right)+\frac{f''\left(z\right)}{2}\left(x-x^{\star}\right)^{2}$$

2.2 משפט

נניח ש־$f(x)$ פונק' גזירה על קטע I. אם $x^{\star}$ היא נק' מינימום או מקסימום של הפונק' אז או שהיא נק' שפה או שמתקיים $f'(x^{\star})=0$.

2.3 משפט בולצאנו־ויירשטראס

אם D היא קבוצה קומפקטית ב־R^n אזי כל סדרה $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ המוכלת ב־D מכילה תת־סדרה מתכנסת לגבול ב־D.

2.4 מינימום גלובלי של פונק' קוארסיבית

תהי f רציפה המוגדרת על כל R^n. אם f פונק' קוארסיבית אז יש לפונק' לפחות מינ' גלובלי אחד. אם בנוסף ידוע של־f נגזרות רציפות מסדר ראשון אזי כל מינימום גלובלי הוא נק' קריטית.

3 פונקציות קמורות

3.1 משפט

תהי $f(x)$ פונק' קמורה על קבוצה קמורה C. אם x_0 הוא מינימום מקומי של הפונק' אזי הוא גם מינימום גלובלי על C. אם $f(x)$ היא קמורה ממש אזי x_0 הוא מינימום גלובלי יחיד.

3.2 הרחבת קמירות פונק' למימדים גבוהים

ל־$f(x)$ נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון על הקבוצה הקמורה D. הפונק' קמורה על D אמ"ם

$$f(x)+\nabla f(x)\cdot(y-x)\leq f(y)$$

לכל $x,y\in D$.

3.2.1 מסקנה

אם $f(x)$ קמורה בעלת נגזרות חלקיות רציפות בקבוצה קמורה D אזי כל נק' קריטית של f ב־D היא נק' מינימום גלובלי של f.

3.3 משפט

נניח ש־$f(x)$ בעלת נגזרות חלקיות רציפות מסדר שני על קבוצה קמורה C ב־R^n. אם ההסיאן $Hf(x)$ היא מטריצה אי־שלילית (חיובית) על C אז $f(x)$ היא קמורה (קמורה ממש) על C.

3.4 משפט

סכום של פונק' קמורות על קבוצה קמורה C הוא פונק' קמורה על C. אם אחת הפונק' היא קמורה ממש אזי הסכום הוא פונק' קמורה ממש.
אם $f(x)$ קמורה (קמורה ממש) על C אזי $\alpha f(x)$(כאשר $\alpha>0$) קמורה (קמורה ממש) על C.
הרכבה של פונק' קמורוה ועולה על פונק' קמורה נותנת פונק' קמורה. הרכבה של פונק' עולה וקמורה ממש על פונק' קמורה ממש נותנת פונק' קמורה ממש.

4 אי־שוויון הממוצעים

4.1 משפט

יהיו $x_1,..,x_n$ מספרים חיוביים כלשהם ו־$\delta_1,...,\delta_n$ מספרים חיוביים שסכומם 1. אזי מתקיים

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\delta_i}\leq\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i$$

מתקבל שוויון אמ"ם מתקיים $x_1=x_2=...=x_n$.

4.2 תכנון גאומטרי

- (GP): מביאים למינימום את הגדול תחת תנאי החיוביות, תנאי הנורמליות, תנאי האורתוגונליות.
- בעיה דואלית (DGP): מביאים למקסימום את הגודל תחת אותם תנאים.
- וקטור δאשר מקיים את תנאי החיוביות, הנורמליות והאורתוגונליות נקרא וקטור פיזיבילי עבור הבעיה הדואלית.
- הבעיה הדואלית נקראת קונסיסטנטית אם קבוצת הווקטורים הפיזיביליים שלה אינה ריקה.

4.3 משפט יאנג, הולדר ומינקובסקי

5 שיטות איטרטיביות באופטימיזציה ללא אילוצים

5.1 שיטת ניוטון

מתחילים בנק' $x^{(0)}$ ומגדירים את הסדרה $\left\{x^{(k)}\right\}$ כך

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{g\left(x^{(k)}\right)}{g'\left(x^{(k)}\right)}, k \geq 0$$

עבור R^2 זה שקול למציאת נק' ההתאפסות של המשיק לפונק' בנק' $x^{(k)}$ (חיתוך עם ציר ה־x).

5.2 שיטת המורד התלול

6 תכנון קמור ותנאי משפט קארוש־קוהן־טאקר

6.1 משפט ההפרדה הבסיסי

אם C קבוצה קמורה וסגורה ב־R^n ואם $y \in R^n$ ו־$y \notin C$ אזי קיים היפר־מישור H כך ש־C מוכלת בחצי ההיפר־מישור הסגור $H^- = \{x \in R^n : a \cdot x \leq \alpha\}$ ואילו y נמצאת בחצי ההיפר מישור הפתוח $H^+ = \{x \in R^n : a \cdot x > \alpha\}$. כלומר קיימים $a \in R^n$ ומספר α כך ש־ $a \cdot x \leq \alpha < a \cdot y$.

6.2 משפט התמיכה

אם C קבוצה קמורה בעלת פנים לא ריק ב־R^n ו־z היא נק' שפה של C אזי קיים היפר־מישור $H = \{x \in R^n : a \cdot x = \alpha\}$ אשר מכיל את z כך ש־C מוכלת בחצי ההיפר־מישור $F^- = \{x \in R^n : a \cdot x \leq \alpha\}$. כלומר, קיימים $a \neq 0$ ו־α כך ש: $a \cdot x \leq \alpha = a \cdot z$ לכל $x \in C$.

6.3 משפט

אם C היא קבוצה קמורה אזי גם $\bar{C}$ קבוצה קמורה.

6.4 למת הנגישות

תהי קבוצה קמורה בעלת פנים לא ריק ב־R^n. אם $x \in C^0$ ו־$y \in \bar{C}$ אזי הקטע החצי פתוח $[x, y) = \{\lambda x + (1-\lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ מכיל אך ורק נקודות פנימיות של A.

6.5 משפט

נניח ש־$f(x)$ היא פונקציה קמורה המוגדרת על קבוצה קמורה C שהיא בעלת פנים לא־ריק ב־R^n. אם $x^{(0)}$ היא נק' פנימית של C אז קיים ווקטור $d \in R^n$ כך ש:

$$f(x) \geq f\left(x^{(0)}\right) + d \cdot \left(x - x^{(0)}\right)$$

לכל $x \in C$.

6.6 משפט

אם P היא בעיית תכנון קמור ו־$P(z)$ היא פרטורבציה שלה עבור $z \in R^m$ אזי הפונק' $MP(z)$ היא פונק' קמורה תחומה הוא תת־קבוצה קמורה של R^m. אם P היא סופר־קונסיסטנטית אז 0 היא נק' פנימית של התחום $MP(z)$.

6.7 משפט

אם P היא תכנית קמורה סופר־קונסיסטנטית כך ש־$MP = MP(0)$ הוא סופי, אז $MP(z)$ הוא סופי בכל התחום של $MP\left(z\right)$ וקיים ווקטור $\lambda \in R^m$ כך ש־$\lambda \geq 0$ ומתקיים

$$MP\left(z\right) \geq MP\left(0\right) - \lambda \cdot z$$

לכל תכנית קמורה וקונסיסטנטית יש ווקטור רגישות.

6.8 משפט

ערך ה־MP של תכנית קמורה עם אילוצים שווה לערך ה־MP של תכנית שקולה ללא אילוצים.
תהי P התכנית הקמורה של מינימיזציה של $f\left(x\right)$ בכפוף לאילוצים $g_1\left(x\right) \leq 0, ..., g_m\left(x\right) \leq 0, x \in C$, אזי

$$MP = \underset{x \in C}{inf} \left\{ \underbrace{f\left(x\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\left(x\right)}_{Lagrangian\, of\, f(x)} \right\}$$

6.9 משפט קארוש־קוהן־טאקר (צורת נקודת האוכף)

תהי P תכנית קמורה סופר־קונסיסטנטית. אז $x^\star \in C$ הוא פתרון של P אם ורק אם קיים $\lambda^\star \in R^m$ כך ש:

1. $\lambda^\star \geq 0$
2. $L\left(x^\star, \lambda\right) \leq L\left(x^\star, \lambda^\star\right) \leq L\left(x, \lambda^\star\right)$ לכל $x \in C$ ולכל $\lambda \geq 0$
3. $\lambda_i^\star g_i\left(x^\star\right) = 0$ לכל $i = 1, ..., m$.

משפט זה הוא התוצאה העיקרית של תכנון קמור.הנקודה $\left(x^\star, \lambda^\star\right)$ נקראת נקודת אוכף של הלגרנג'יאן של P.

6.10 משפט קארוש־קוהן־טאקר (צורת הגרדיאנט)

תהי P תכנית קמורה סופר־קונסיסטנטית. נניח שפונק' המטרה ופונק' האילוץ הן בעלות נגזרות חלקיות רציפות מסדר ראשון על הקבוצה C. נניח ש־$x^\star$ נק' פיזיבילית של P ושייכת לפנים של C. אז $x^\star$ היא פתרון של P אמ"ם קיים $\lambda^\star \in R^m$ כך ש:

1. $\lambda^\star \geq 0$
2. $\lambda_i^\star g_i\left(x^\star\right) = 0$ לכל $i = 1, ..., m$.
3.

$$\nabla f\left(x^\star\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\star \nabla g_i\left(x^\star\right) = 0$$

6.11 משפט

תהי P תכנית קמורה ויהי $x^\star$ פתרון שלה. אם $\lambda^\star \in R^m$ הוא ווקטור כך ש־$(x^\star, \lambda^\star)$ מקיים את תנאי משפט קארוש־קוהן־טאקר אזי $\lambda^\star$ הוא ווקטור רגישות עבור P, כלומר

$$MP(z) \geq MP - \lambda^\star \cdot z$$

לכל z בתחום של $MP(z)$.

6.12 משפט (הדואליות)

יהיו $f(x), g_1(x), ..., g_m(x)$ פונק' קמורות המוגדרות על קבוצה קמורה C, בעלות נגזרות רציפות מסדר ראשון על C. אם yהיא נק' פיזיבילית עבור התוכנית הקמורה P ו־λ הוא ווקטור פיזיבילי עבור התכנית הדואלית DP אזי

$$f(y) \geq h(\lambda) = \inf_{x \in C} L(x, \lambda)$$

לפיכך אם P ו־DP הן שתיהן בעיות קונסיסטנטיות אז MP ו־MD סופיים ו־

$$MP \leq MD$$

(אי־שוויון הדואליות).

7 שיטת הענישה

7.1 למה

נניח שלפונקציה $g(x)$ נגזרות חלקות מסדר ראשון על R^n. אזי הפונק' $h(x) = [g^+(x)]^2$ היא בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון בכל R^n. יתירה מכך

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = 2g^+(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x), i = 1, 2, ..., n$$

לכל $x \in R^n$.

8 אופטימיזציה עם אילוצי שוויון

8.1 משפט

נניח ש־$x^\star$ היא נק' רגולרית של P. אם $x^\star$ היא מינימייזר מקומי אזי קיים $\lambda^\star$ כך שמתקיים

1. $\lambda_j^\star \geq 0$ עבור $j = m, .., p$
2. $\lambda_j^\star g_j(x^\star) = 0$ עבור $j = 1, 2, .., p$
3. $\nabla f(x^\star) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^\star \nabla g_j(x^\star)$

8.2 המשפט היסודי של התכנון הלינארי

בהינתן בעיית תכנון לינארי ELP הטענות הבאות נכונות

1. אם קיים פתרון פיזיבילי של האילוצים, אז קיים גם פתרון יסודי פיזיבילי של האילוצים.
2. אם קיים פתרון פיזיבילי של האילוצים אשר מביא למינימום את פונק' המטרה $\varphi(x)$, אז קיים גם פתרון יסודי פיזיבילי של האילוצים אשר מביא למינימום את פונק' המטרה $\varphi(x)$.

8.3 משפט - פירוק QR

אם A מטריצה ממימד $m \times n$ בעלת עמודות בת"ל אז קיימת מטריצה Q בעלת עמודות אורתונורמליות ומטריצה R הפיכה ממימד $n \times n$ ומשולשית עליונה כך שמתקיים

$$A = QR$$

8.4 משפט

אם M הוא תת־מרחב של R^k ואם $x \in R^k$ אזי קיים וקטור $m^\star \in M$ כך שמתקיים לכל $m \in M$

$$\|x - m^\star\| \leq \|x - m\|$$

במקרה זה מתקיים $x - m^\star \in M^\perp$.

9 שיטת הריבועים הפחותים - Least Squares

בשיטת הריבועים הפחותים הפתרון בעל הנורמה המינימלית נתון ע"י

$$x = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

ומקבלים אותו ע"י פתרון המערכת

$$A^T A x = A^T b$$