שדות

הגדרת השדה:

הגדרה: שדה F הוא קבוצה שיש בין אבריה שתי פעולות

אחת נקראת חיבור ותסומן ב +

האחרת נקראת כפל ותסומן ב *

כך שתתקיימנה הדרישות הבאות:

1. **סגירות לחיבור:** $a,b\in F \longrightarrow a+b\in F$
2. **אסוציאטיביות בחיבור:** $a,b,c\in F \longrightarrow a+(b+c)=(a+b)+c$
3. **"אדיש חיבורי":** קיים בF איבר ניטראלי שיסומן ב 0 $a\in F \longrightarrow a+0=0+a=a$
4. **נגדי בחיבור:** $\forall a\in F$ קיים איבר נגדי בF שיסומן ב $-a$ ומקיים: $a+(-a)=0$
5. **קומוטטיביות בחיבור:** $a,b\in F \longrightarrow a+b=b+a$
6. **סגירות לכפל:** $a,b\in F \longrightarrow a*b\in F$
7. **אסוציאטיביות בכפל:** $a,b,c\in F \longrightarrow (a*b)*c=a*(b*c)$
8. **"איבר יחידה":** קיים בF איבר יחידה שיסומן ב 1 $a\in F \longrightarrow a*1=1*a=a$
9. **הופכי בכפל:** $\forall a\neq 0\in F$ קיים איבר הופכי בF שיסומן ב a^{-1} ומקיים $a*a^{-1}=1$
10. **קומוטטיביות בכפל:** $a,b\in F \longrightarrow a*b=b*a$
11. **פילוג בכפל וחיבור:** $a,b,c\in F \longrightarrow a*(b+c)=a*b+a*c$

* $\mathbb{N},\mathbb{Z}$ אינם שדות ביחס ל + * הרגילות.

* $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ כן שדות ביחס ל + * הרגילות.

משפט: יהא F שדה.

- האיבר הניטראלי הוא יחיד
- $a\in F \longrightarrow a*0=0$

משפט: יהא F שדה ו- $a,b\in F$ כך ש: $a*b=0$

אז או- a=0 או b=0.

חשבון מודולו n:

משפט: $[a(\bmod n)+b(\bmod n)]^{(\bmod n)}=(a+b)(\bmod n)$

סימון: $a(\bmod n)=b \longrightarrow a\equiv b$

הקבוצה Z_n:

משפט: Z_n הוא שדה אם ורק אם n הוא ראשוני.

* Z_n כאשר n לא ראשוני מקיים את כל תכונות השדה מלבד הופכי בכפל.

פולינומים

הגדרה: פולינום $p(x)$ מעל לשדה K הוא $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ כאשר $a_0,a_1,\ldots,a_n\in K$ הם **מקדמי הפולינום**.

המשפט היסודי של האלגברה: לפולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים מעל המרוכבים.

נוסחאות וייטה לפולינום ממעלה n:

1. $\boxed{x_1+x_2+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{-a_{n-1}}{a_n}}$

2. $\boxed{x_1\cdot x_2\cdots x_n=\prod_{i=1}^{n}x_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}}$

המשפט על הניחוש האינטליגנטי של שורש רציונאלי:

יהי $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ פולינום שכל מקדמיו מספרים שלמים

ונניח: $x_0=\frac{p}{q}$ הוא שורש רציונאלי של $p(x)$ (כש- p ו-q זרים).

אזי: p מחלק את a_0 ו-q מחלק את a_n.

דרך הפיתרון: מרכיבים קבוצה של $\frac{p}{q}$ ואם יש שורש רציונאלי לפולינום, הוא בהכרח שייך לקבוצה הזו.

שורש עם ריבוי: x_0 הוא ריבוי k של $p(x)$ אם:

$p(x_0)=0,p'(x_0)=0,\cdots,p^{(k-1)}(x_0)=0,p^k(x_0)\neq 0$ כלומר, k התאפסויות.

הערה: בהינתן $p(x)$, אם מציבים α ב$p(x)$ ומקבלים 0 אז α הוא שורש. אם לא מקבלים 0 אלא מספר, אז מספר זה הוא השארית כאשר מחלקים את $p(x)$ ב $(x-\alpha)$.

מספרים מרוכבים

"נוסיף" לשדה המספרים הממשיים מספר נוסף שיסומן ב i והוא מקיים $i^2=-1$.

מספר מרוכב: $Z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$.

ערך מוחלט: מרחק המספר המרוכב מראשית הצירים $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$

ארגומנט: הזווית בין החלק החיובי של הציר הממשי לבין הקטע המחבר את Z לראשית.

מספר צמוד: $\overline{Z}$: $Z=a+bi \longrightarrow \overline{Z}=a-bi$

פעולות חשבון בין מרוכבים:

$$Z_1=a_1+b_1i \qquad Z_2=a_2+b_2i$$

$$Z_1\pm Z_2=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$$

$$Z_1*Z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{Z_1*\overline{Z_2}}{|Z_2|^2}$$ (כפל בצמוד) $Z_1,Z_2\neq 0$

תכונות של מספרים מרוכבים:

1. $\mathbb{C}$ הוא שדה
2. $\overline{Z_1\pm Z_2}=\overline{Z_1}\pm\overline{Z_2}$
3. $\overline{Z_1*Z_2}=\overline{Z_1}*\overline{Z_2}$
4. $Z+\overline{Z}=2\operatorname{Re}(Z)$
5. $Z-\overline{Z}=2i\operatorname{Im}(Z)$
6. $Z*\overline{Z}=|Z|^2$
7. $\overline{Z^n}=\overline{Z}^n$ (לכל n טבעי)
8. $|Z^n|=|Z|^n$ (לכל n טבעי)
9. $|Z_1+Z_2|\leq|Z_1|+|Z_2|$ (א"ש המשולש)
10. $|Z_1|-|Z_2|\leq|Z_1-Z_2|$ (א"ש המשולש)
11. $|Z_1*Z_2|=|Z_1|*|Z_2|$
12. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ $(Z_2\neq 0)$
13. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

הצגה טריגונומטרית של מספר מרוכב:

הצגה אלגברית: $Z=a+ib$

הצגה טריגונומטרית: $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$r=|Z|=\sqrt{a^2+b^2}$

$\arctan\theta_0=|\frac{b}{a}|$ ואז מתאימים את θ_0 לזווית הנכונה θ לפי הרביע המתאים:

רביע ראשון: $\theta=\theta_0$ רביע שני: $\theta=180-\theta_0$

רביע שלישי: $\theta=180+\theta_0$ רביע רביעי: $\theta=360-\theta_0$

כפל, חילוק וחזקות:

$Z_1=r_1cis\theta_1 \qquad Z_2=r_2cis\theta_2$

$Z_1*Z_2=r_1*r_2[cis(\theta_1+\theta_2)]$

המשמעות הגיאומטרית של כפל: מאריכים/מכווצים את אורך ווקטור Z_1 פי r_2 ומסובבים אותו בעוד θ_2 מעלות נגד כיוון השעון.

$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[cis(\theta_1-\theta_2)]$

$Z^n=r^n[cis(n*\theta)]$

הוצאת שורשים:

$Z=r[\cos(\theta+360k)+i\sin(\theta+360k)]$

$\sqrt[n]{Z}=\sqrt[n]{r}[cis(\frac{\theta+360k}{n})]_{k=0,1,...,n-1}$

קשר לפולינומים:

- אם יש לפולינום עם מקדמים ממשיים שורש לא ממשי Z_n אז גם- $\overline{Z_n}$ שורש שלו. ולכן, אם לפולינום מספר אי-זוגי של שורשים, אחד מהם לפחות הוא ממשי.
- למשוואה עם מספר מרוכב והצמוד שלו אין בהכרח n שורשים כי Z ו- $\overline{Z}$ הם שני משתנים שונים.
- אם מתבקשים למצוא את סכום כל השורשים של מספר מרוכב נתון: $\sqrt[n]{a+ib}=Z_1,Z_2,...,Z_n$ אז זה כמו לסכם את כל השורשים (במרוכבים בלבד) של הפולינום: $Z^n=a+ib$. כלומר: $Z^n+0*Z^{n-1}+\cdots+a+ib$.
  סכום שורשי הפולינום ע"פ וייטה הוא: $0=\frac{-0}{1}=\frac{-a_{n-1}}{a_n}$. כלומר, סכום השורשים של מספר מרוכב הוא תמיד אפס.

שורשים של 1 – שורש יחידה:

שורשים מסדר n של-1

$$\boxed{1=\cos(\frac{360k}{n})+i\sin(\frac{360k}{n}) \quad {}_{k=0,1,2,\dots,n-1}}$$

לכן שורשי היחידה מסדר n הם: $1,w,w^2,w^3,\dots,w^{n-1}$

סדרת השורשים מהווה סדרה הנדסית כאשר $q=w$.

משפט: סכום שורשי היחידה מסדר-n הוא אפס עבור $2\le n$.

סכום סדרת השורשים ע"פ נוסחת סכום סדרה הנדסית הוא: $S_n=a_1*\frac{(q^n-1)}{q-1}=1*\frac{(w^n-1)}{w-1}$

*בחישוב הסכום, האינדקס הרץ הוא-n כי יש n איברים בסדרה (0 - n-1).

w הינו אחד מהשורשים של $\sqrt[n]{1}$ ולכן: $\sqrt[n]{1}=w\xrightarrow{(\ )^n}w^n=1$, כלומר, המונה מתאפס והסכום יוצא אפס.

(באופן כללי, סכום השורשים יהיה אפס עבור הוצאת שורש מכל מספר מרוכב).

מטריצות

הגדרה: מטריצה מעל שדה F היא טבלה של איברים של F.

מטריצה מוחלפת (transpose): תהי $A_{m\times n}$ מטריצה כלשהי. A^t היא מטריצה המתקבלת מA ע"י הפיכת שורותיה לעמודות, תוך הקפדה על אותו סדר. $A^t{}_{n\times m}=(a_{ji})$.

שלושה כללים תקפים:

- $(A^t)^t=A$
- $(A+B)^t=A^t+B^t$; $(AB)^t=(B^tA^t)$
- $(kA)^t=kA^t$ (k סקלר).

שוויון מטריצות: נתונות שתי מטריצות A,B מעל אותו שדה F.

$$A=A_{m\times n}=(a_{ij}) \qquad B=B_{k\times s}=(b_{ij})$$

$$A=B \longrightarrow m=k,\ n=s,\ a_{ij}=b_{ij}\ \forall i,j$$

מונחי מטריצות:

1. **מטריצה ריבועית:** בעלת מספר שווה של שורות ועמודות, כלומר מסדר $n\times n$.
2. **מטריצה סימטרית:** מטריצה ריבועית שבה $a_{ij}=a_{ji}$. כלומר, סימטרית ביחס לאלכסונה הראשי. היא מקיימת $A^t=A$.
3. **מטריצה אנטי-סימטרית:** מטריצה ריבועית שבה $a_{ij}=-a_{ji}$. היא מקיימת $A^t=-A$. נובע מכך שבשדות רגילים $a_{ii}=-a_{ii}=0$ (אברי האלכסון הראשי). לכן, פרט לשדות מודולו Z, איברי האלכסון הראשי שווים לאפס.
4. **מטריצה אלכסונית:** מטריצה ריבועית שכל איבריה מחוץ לאלכסון הראשי הם אפסים. מתקיים $a_{ij}=0$ לכל $i\neq j$.
5. **מטריצה סקלרית:** מטריצה אלכסונית שכל איברי אלכסונה שווים זה לזה.
6. **מטריצת יחידה:** מטריצה סקלרית שכל איברי אלכסונה הם-1. מסמנים ב I_n כשהיא מסדר $n\times n$. **סימון איבר:** $\delta_{ij}=\begin{Bmatrix}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{Bmatrix}$
   - כל מטריצה סקלרית היא כפולה בסקלר של מטריצת היחידה.
7. **מטריצת אפס:** מטריצה שכל איבריה הם איבר האפס. $0=0_{m\times n}$
8. **משולשת עליונה/תחתונה:** מטריצה ריבועית שכל איבריה מתחת/מעל לאלכסונה הראשי הם אפסים, כלומר $a_{ij}=0$ לכל $i>j$-עליונה / לכל $i<j$-תחתונה.
9. **וקטור שורה/עמודה:** מטריצה בעלת שורה/עמודה אחת.

כפל בסקלר:

A מטריצה מעל F $\quad A = A_{m\times n} = (a_{ij})$

יהא $\alpha \in F$ אז: $\alpha * A = (\alpha a_{ij})$

חיבור וחיסור:

מוגדרים רק עבור מטריצות מאותו שדה ומאותו סדר.

$B = B_{k\times s} = (b_{ij}) \qquad A = A_{m\times n} = (a_{ij}) \qquad A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

משפט: (תכונות חיבור, חיסור וכפל בסקלר)

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0 = A$
4. $A + (-A) = 0$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
8. $(A + B)^t = A^t + B^t$
9. $(A - B)^t = A^t - B^t$
10. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
11. $(A^t)^t = A$

כפל מטריצות:

A ו-B שתי מטריצות מעל שדה הכפל AB, כפל ביניהן מוגדר רק עבור A עם מספר עמודות כמספר השורות של B:

$$A_{m\times n} * B_{n\times r} \longrightarrow AB = C_{m\times r} = (c_{ij})$$

הערות:

1. באופן כללי $AB \neq BA$ (ההגדרה אינה סימטרית).
2. A^2, A^3 מוגדרים רק עבור מטריצות ריבועיות. נגדיר: $A^0 = I$
3. נוסחאות כפל מקוצר לא מתקיימות במטריצות (בעיקר בגלל ש $XY \neq YX$).
4. ייתכן $A \neq 0$, $B \neq 0$ ו-$AB = 0$.

משפט: (עבור מטריצות)

1. אסוציאטיביות $(AB)C = A(BC)$
2. פילוג $(B + C)D = BD + CD$
3. $A * 0 = 0 * A = 0$
4. $A * I = I * A = A$ (מטריצת היחידה מתחלפת בכפל עם כל מטריצה).
5. $(AB)^t = B^t * A^t$

עקבת המטריצה: סכום אברי האלכסון הראשי: $trace(A_{n\times n})=tr(A_{n\times n})=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$$

$$tr(A+B)=tr(B+A)$$

$$tr(AB)=tr(BA)$$

$$tr(\alpha A)=\alpha\cdot tr(A)$$

פעולות יסודיות (אלמנטריות) על שורות של מטריצה:

כל אחת מהפעולות הבאות נקראת פעולה יסודית על שורות של מטריצה

1. **כפל שורה בסקלר (שונה מאפס):** $Ri\longrightarrow \alpha Ri$
2. **החלפת שתי שורות זו בזו:** $Ri\longleftrightarrow Rj$
3. **הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת:** $Ri\longrightarrow Ri+\alpha Rj$

הגדרה: שתי מטריצות A ו-B נקראות שקולות שורה אם ניתן להגיע מאחת לאחרת ע"י סדרה סופית של פעולות יסודיות על שורות.

(לכל פעולה יסודית על שורה, יש פעולה יסודית על שורה שמבטלת אותה).

הערה: יש גם פעולות יסודיות על עמודות (בדיוק באותו האופן) אבן הן פחות שימושיות.

מטריצות מדורגות:

הגדרה:

מטריצה נקראת מדורגת אם:

1. שורות האפסים מופיעות לאחר השורות שאינן אפס
2. מספר האפסים משמאל לאיבר המוביל גדל משורה לשורה עד שמגיעים (אם בכלל) לשורת אפסים.

(האיבר הראשון השונה מאפס משמאל בכל שורה של מטריצה נקרא **האביר המוביל של השורה**)

מדורגת מצומצמת: מטריצה קאנונית (C) שעונה לתנאים הבאים:

1. מטריצה מדורגת
2. כל איבר מוביל שווה ל-1
3. איבר מוביל הוא היחיד השונה מאפס בעמודה שלו.

דרגה: מספר השורות השונות מאפס בצורה מדורגת של מטריצה A נקרא הדרגה של המטריצה.

סימון: $r(A)$. (כלומר, מספר השורות הב.ת.ל המקסימאלי).

משפט: כל מטריצה שקולה שורות למטריצה מדורגת מצומצמת, **אחת ויחידה.**

הערה: מטריצה A שקולה שורות למטריצה B אם ורק אם $C_A = C_B$ (הצורות הקנוניות שלהן שוות) ואם $C_A \neq C_B$ אז A ו-B בהכרח לא שקולות שורה.

מטריצות יסודיות (אלמנטריות):

מטריצה יסודית: מטריצת יחידה לאחר שעברה פעולה יסודית אחת על שורות או עמודות.

שתי פעולות שקולות: במקום לעשות פעולות על שורות של מטריצה, ניתן להכפיל אותה במטריצה אחרת ולקבל את התוצאה המבוקשת.

משפט: תהא A מטריצה, ϕ פעולה יסודית על שורות ו ψ פעולה יסודית על עמודות. אז:

1. $\phi(I)*A = \phi(A)$
2. $A*\psi(I) = \psi A$

הערה-1: כדי לעשות n פעולות על מטריצה ניתן להכפיל אותה n פעמים במטריצה אלמנטרית שבוצעה עליה הפעולה נדרשת.

הערה-2: שתי מטריצות A ו-B הן שקולות שורה אם ורק אם קיימות מטריצות יסודיות $E_1,...,E_k$ כך ש: $E_1 * E_2 * \cdots * E_k * B = A$ (לא צריך סוגריים בגלל תכונת האסוציאטיביות, סדר ההכפלה של המטריצות לא משנה כל-עוד לא משנים את סדר הכתיבה).

מרחבים וקטורים

הגדרה: קבוצה V נקראת מרחב וקטורי מעל שדה F, אם קיימות:

1. פעולה + (חיבור) בין איברי V
2. פעולה * (כפל) בין אברי F לאברי V

כך שמתקיימות התכונות הבאות:

1. סגירות בחיבור: $\forall v,u \in V \longrightarrow v+u \in V$
2. אסוציאטיביות בחיבור: $v,u,w \in V \longrightarrow (v+u)+w = v+(u+w)$
3. אדיש חיבורי: $\forall v \in V \longrightarrow v+0=v$
4. קיום נגדי: $\forall v \in V \longrightarrow v+(-v)=0$
5. קומוטטיביות בחיבור: $\forall v,u \in V \longrightarrow v+u=u+v$

6. סגירות בכפל בסקלר: $\forall \alpha \in F, \forall v \in V \longrightarrow \alpha v \in V$
7. פילוג(1): $\forall \alpha \in F, \forall u,v \in V \longrightarrow \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
8. פילוג(2): $\forall \alpha,\beta \in F, \forall v \in V \longrightarrow (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
9. אסוציאטיביות: $\forall \alpha,\beta \in F, \forall v \in V \longrightarrow (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$
10. קיום איבר יחידה: $\forall v \in V \longrightarrow 1*v=v$

דוגמאות למרחבים וקטוריים ידועים:

- כל המטריצות $m \times n$ מעל F $\longleftarrow F^{m\times n}$
- אוסף כל הפונקציות מ-R ל-R מעל השדה R.
- כל הפולינומים עם מקדמים בשדה F
- כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-n עם מקדמים בשדה F.
- שדה הוא תמיד מ"ו מעל תת-קבוצה שלו.
- איברים ב Z_n הם מ"ו רק מעל Z_n (כאשר n קטן יותר, אין אלו תת קבוצות של Z_n).

"טיפים" מתי יש לחשוד שקבוצה נתונה איננה מ"ו:

1. המילה או מרמזת על איחוד
2. כשיש תנאי עם $\sqrt{\ }\,/\,(\ )^2$ או עם $|\ |$
3. אם התנאי מוגדר ע"י אי-שוויון.
4. אם התנאי הוא של מערכת משוואות אי-הומוגנית (אם התנאי הוא של מערכת משוואות הומוגנית, קרוב לוודאי שזהו כן תמ"ו).

משפט: יהא V מ"ו מעל שדה F. אזי:

1. $0\in V,\alpha\in F\longrightarrow\alpha*0=0$
2. $v\in V,0\in V\longrightarrow 0*v=0$
3. $v\in V,\alpha\in F$ כך ש- $\alpha v=0$, אז או: $\alpha=0$ או $v=0$
4. $v\in V,\alpha\in F\longrightarrow(-\alpha)v=-(\alpha v)=\alpha(-v)$

תתי-מרחבים:

הגדרה: V מ"ו מעל שדה F ו-W תת-קבוצה של V.

אם גם W היא מ"ו ביחס לאותן פעולות של V, אזי: W נקראת **תת מרחב של V.**

הערה-1: בכל תת-קבוצה של V מתקיימות רוב תכונות המ"ו. כדי לבדוק אם W היא אכן תמ"ו של V יש צורך לבדוק רק מספר תכונות בלבד שלא מתקיימות עבור כל תת-קבוצה:

1. הקבוצה לא ריקה (קיום אפס)
2. סגירות לחיבור
3. סגירות לכפל בסקלר

(כדי לבדוק את שניהם ביחד ניתן לבדוק: $\forall\alpha,\beta\in F,\forall w_1,w_2\in W\longrightarrow\alpha w_1+\beta w_2\in W$)

אם 3 התכונות הנ"ל מתקיימות נובע מהן שגם התכונה "קיום נגדי" מתקיימת וזה מספיק כדי להוכיח שזהו אכן תמ"ו.

הערה-2: $\{0\}$ ו-V עצמו הם תמיד תת-מרחבים.

דוגמאות לתתי-מרחבים ידועים:

- ב- F^n או ב- $F^{m\times n}$ (F שדה) כשיש אפסים במקומות קבועים בניגוד להנ"ל כשאומרים שיש להם 0 ולא מדובר על מקום קבוע.
- פונקציות זוגיות $\{f\mid f(x)=f(-x)\}$
- המטריצות הסימטריות והאנטי-סימטריות ב- $R^{n\times n}$

הערה: להוכחת מ"ו מספיק להראות שקבוצה מסוימת היא תת-קבוצה של מ"ו מפורסם ואז להוכיח רק את שלושת התנאים לקיום תמ"ו.

משפט: יהיו U,W שני תתי-מרחבים של מ"ו V אז גם $U\cap W$ הוא תת-מרחב של V.

הערה: איחוד שני תתי-מרחבים אינו תת-מרחב מלבד מקרים שבהם אחד התתי-מרחבים מוכל בשני או שאחד מהם הוא $\{0\}$ (ואז הוא כמובן מוכל בשני).

משפט: יהיו V מ"ו ו- U,W תת-מרחבים. אז $U\cup W$ הוא תת-מרחב אם"ם $W\subset U$ או $U\subset W$ (אם לא מתקיימת ההכלה- לא, אז- או V לא ת"מ או אחד מהם כן מתקיים).

U+W (סכום): U,W תתי-מרחבים של מ"ו V. נגדיר: $U+W=\{u+w \mid u\in U, w\in W\}$.

כלומר, כל איבר בסכום ניתן להציג כחיבור של וקטור מU ווקטור מW.

משפט: יהיו U,W תתי-מרחבים של מ"ו V, אז גם $U+W$ הוא תת-מרחב של V.

סכום ישר: U,W הם תתי-מרחבים של מ"ו V. אם כל איבר בסכום W+U ניתן לרשום באופן יחיד (רק כחיבור של שני וקטורים מסוימים) אז הסכום הוא סכום ישר. **סימון:** $u\oplus w$.

משפט: V מ"ו U,W הם תתי-מרחבים של V. אז: $U+W$ הוא סכום ישר אם ורק אם: $U\cap W=|0|$.

קומבינציה ליניארית: V מ"ו מעל F. $v_1,\dots,v_n,w\in V$. w נקרא ק"ל של $v_1,\dots,v_n$ אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F$ כך ש: $w=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n$.

מרחב נפרש:

מרחב נפרש: V מ"ו ו-A תת-קבוצה של V עם מספר סופי של איברים. אוסף הצירופים הליניאריים של אברי A נקרא **המרחב הנפרש** ע"י A. סימון: $span(A)$ ($L(A)$).

משפט: יהא V מרחב וקטורי ו-A תת-קבוצה סופית של V. אז $span(A)$ הוא תת-מרחב של V ה"קטן" ביותר המכיל את A (כל ת"מ אחר שיכיל את A, יכיל גם את $span(A)$).

מרחב שורות ומרחב עמודות:

הגדרה: A מטריצה $m\times n$ מעל F.

מרחב השורות של- A הוא המרחב הנפרש ע"י שורות A והוא תת-מרחב של F^n.

מרחב העמודות של- A הוא המרחב הנפרש ע"י עמודות A והוא תת-מרחב של F^m.

משפט: למטריצות שקולות שורה, אותו מרחב שורות.

משפט: A,B מטריצות כך ש- AB מוגדר. אז:

1. העמודות של AB הן צירופים לינאריים של העמודות של A.
2. השורות של AB הן צירופים לינאריים של השורות של B.

מערכת של משוואות ליניאריות

מערכת הומוגנית: מערכת $Ax=0$.

משפט: במערכת הומוגנית עם n נעלמים, אוסף הפתרונות הוא תת-מרחב של F^n.

הערה: במערכת הומוגנית מעל שדה אינסופי, או שיש פיתרון יחיד או שיש אינסוף פתרונות (אין מצב ביניים).

אינסוף- כאשר $r(A)<n$ ופתרון $x=0$ כאשר $r(A)=n$.

משפט: תהא $Ax=b$ מערכת משוואות

ויהא $x=x_0$ פיתרון שלה

אז: אוסף כל הפתרונות של המערכת הוא: $\{x_0+d \mid x=d \longrightarrow Ax=0$ פיתרון של $\}$

(כלומר, חיבור של הפתרונות עם פתרונות המשוואה ההומוגנית המתאימה).

הערה: למערכת משוואות $Ax=b$ מעל שדה אינסופי יש:

או- פתרון יחיד; או- אינסוף פתרונות; או- אף פיתרון.

מטריצה מורחבת: מטריצה המייצגת $Ax=b$ (העמודה האחרונה היא איברי b). סימון: A^*.

משפט: נתונה מערכת $Ax=b$ עם n נעלמים מעל שדה.

1. למערכת יש פתרון אם ורק אם $r(A)=r(A^*)$
2. כאשר יש פתרון, מספר דרגות החופש לבחירה חופשית של נעלמים הוא: $n-r(A)$.
3. קיים פתרון יחיד אם ורק אם $r(A)=r(A^*)=n$.

הערות חשובות:

- קבוצת הפתרונות של מערכת הומוגנית היא מ"ו עם $n-r(A)$ דרגות חופש (קבוצת הפתרונות של האי-הומוגנית היא לא מ"ו). זהו גם מימד המרחב.
- למערכת $Ax=b$ יש פיתרון $\leftrightarrow$ b הוא צירוף ליניארי של עמודות A. המקדמים בצירוף הליניארי הם רכיבי הפתרון $(x_1,x_2,...,x_n)$.
- $x=x_H+x_P$ - פתרון פרטי כלשהו של לא הומוגנית+ פתרון כללי של ההומוגנית = הפתרון הכללי של מערכת לא הומוגנית

– הפרש שני פתרונות של מערכת $Ax=b$ הוא פתרון של ההומוגנית המתאימה (וגם כפל שלו בסקלר יתן פתרונות נוספים כי זהו מ"ו). ופתרונות למערכת $Ax=b$ יתקבל מחיבור של פיתרון הומוגנית כללי (כפל בסקלר כלשהו) עם אחד הפתרונות הקיימים.

$x_{H1}+x_{P1}=x_{P3}$ $\quad$ $x_{P1}-x_{P2}=x_{H1}$.

מטריצות הפיכות

הגדרה: מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה B כך ש- $AB = BA = I$.

סימון: $B = A^{-1}$.

משפטי הפיכות:

- תהא A מטריצה הפיכה, אז קיימת B יחידה כך ש- $AB = I$.
- אם A ו- B ריבועיות כך ש- $AB = I$ אז A הפיכה ו- B ההפכית שלה.
  (בנוסף: $AB = I \rightarrow BA = I$).
- אם A הפיכה ו- B ההפכית שלה אז AB הפיכה, $AB = B^{-1}A^{-1}$.
- A, B ריבועיות, אז AB הפיכה אם"ם A הפיכה וגם- B הפיכה.
- אם A הפיכה אז A^t הפיכה ו- $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

הערה: סכום מטריצות הפיכות אינו מטריצה הפיכה בהכרח.

משפט השקולים החלקי: תהא A מטריצה ריבועית מסדר n. אז התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה.
2. $r\left(A\right) = n$
3. A שקולה שורות ל- I.
4. למערכת $Ax = b$ יש פיתרון יחיד לכל b.
5. למערכת $Ax = 0$ יש פיתרון יחיד.
6. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטאריות.
7. A מאפסת פולינום עם מקדם חופשי שונה מאפס.

משפט: תהא A מטריצה הפיכה, אז אותן פעולות שמעבירות את A ל- I, מעבירות את I ל- A^{-1}.

הערה: כל מטריצה אלמנטארית היא הפיכה, וגם ההפכית שלה היא אלמנטארית.

משפט: A, B שקולות שורה אם"ם $A = PB$ עבור איזשהי מטריצה P הפיכה (כלומר P היא מכפלת מטריצות אלמנטאריות, ומכפלה של הפיכות הינה הפיכה).

תלות ליניארית, בסיס ומימד

תלות: V מ"ו מעל F. $v_1,\dots,v_n$ נקראים תלויים ליניארית אם קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ לא כולם אפס כך ש: $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\cdots\_\alpha_n v_n=0$. אם בהכרח כל הסקלרים הם אפס, הקבוצה בלתי תלויה ליניארית.

משפטי תלות:

- כל קבוצה שמכילה אפס היא ת"ל.
- קבוצה המכילה קבוצה ת"ל, גם היא ת"ל.
- קבוצה המוכלת בקבוצה בת"ל גם היא בת"ל.
- קבוצה היא ת"ל אם"ם אחד מאיבריה הוא צירוף ליניארי של האחרים.
- בקבוצה תלויה ליניארית יש לפחות איבר אחד שהוא צירוף ליניארי של קודמיו.
- שני איברים הם תלויים אם"ם הם פרופורציונאליים, כלומר אחד מהם הוא כפולה בסקלר של האחר.
- שורות שונות מאפס של מטריצה מדורגת הן בת"ל.
- כל קבוצה של פולינומים שמעלותיהם שונות זו מזו, בהכרח בלתי תלויה (הדרך היחידה לאפס את המקדמים היא ע"י הכפלה בסקלר-אפס, ולכן כל הסקלרים הם אפס).

בסיס: קבוצה פורשת ובת"ל.

מרחב ממימד סופי: מרחב שיש לו בסיס עם מספר סופי של איברים.

משפט ההחלפה: יהא V מ"ו, אז מספר האיברים בכל קבוצה פורשת גדול או שווה ממספר האיברים בכל קבוצה בת"ל.

משפט: V מ"ו ממימד סופי, אז בכל הבסיסים של V יש אותו מספר איברים.

משפט: V מ"ו ממימד סופי, B קבוצה ב-V. התנאים הבאים שקולים:

1. B בסיס.
2. B קבוצה בת"ל מקסימאלית (כל קבוצה שמכילה אותה ממש היא ת"ל).
3. B קבוצה פורשת מינימאלית (כל תת-קבוצה ממש אינה פורשת).

מימד: מספר האיברים בבסיס של מ"ו ממימד סופי.

משפט: יהא V מ"ו ממימד-n. אזי:

1. כל $n+1$ איברים ב-V הם ת"ל.
2. כל קבוצה בת"ל בת n איברים היא בסיס.
3. כל קבוצה פורשת בת n איברים היא בסיס.
4. כל קבוצה בת"ל ניתנת להשלמה לבסיס.

משפט: יהא B בסיס של מ"ו V, אז כל איבר ב- V ניתן לרשום כצירוף ליניארי של איברי B באופן יחיד.

משפט המימדים: V מ"ו. U,W הם תתי-מרחבים של V. אזי:

$$\boxed{\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)}.$$

מסקנה: $\boxed{\dim(U\oplus W)=\dim(U)+\dim(W)}$.

דרגת מטריצה:

הערה: מימד מרחב השורות של מטריצה A הוא $r(A)$.

משפטים:

1. $\boxed{r(AB)\le r(A)}$ ו- $\boxed{r(AB)\le r(B)}$
2. אם A הפיכה אז: $r(AB)=r(B)$ ואם B הפיכה אז: $r(AB)=r(A)$.
3. מימד מרחב השורות של מטריצה שווה למימד מרחב העמודות, כלומר: $r(A)=r(A^t)$.

ניסוח נוסף: מספר השורות בת"ל של מטריצה שווה למספר העמודות בת"ל שלה.

טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה: נתונים שני מ"ו V_1,V_2 מעל אותו שדה- F. הפונקציה $T:V_1\to V_2$ נקראת טרנספורמציה ליניארית אם מתקיימים שני התנאים:

1. $\forall v,u\in V_1,\quad T(v+u)=T(v)+T(u)$
2. $\forall \alpha\in F,\quad v\in V_1,\quad T(\alpha v)=\alpha\cdot T(v)$

מסקנות:

- $T(0)=0$
- $T(-v)=-T(v)$

גרעין ותמונה: $T:V_1\to V_2$ ט"ל. הגרעין של T הוא: $\ker(T)=\{v\in V_1 \mid T(v)=0\}$

התמונה של T היא: $\operatorname{Im}(T)=\{T(v)\mid v\in V_1\}$. אפסיות של T: $n(T)=\dim(\ker T)$

משפט: $T:V_1\to V_2$ ט"ל אזי:

1. $\ker(T)$ הוא תת-מרחב של V_1.
2. $\operatorname{Im}(T)$ הוא תת-מרחב של V_2.
3. T "על" אם"ם $\operatorname{Im}(T)=V_2$.
4. T חח"ע אם"ם $\ker(T)=\{0\}$.

משפט: $T:V_1\to V_2$ ט"ל. אם $v_1,v_2,\dots v_k$ פורשים את V_1 אזי: $T(v_1),T(V_2),\dots,T(v_k)$ פורשים את $\operatorname{Im}(T)$.

משפט המימדים: $T:V_1\to V_2$ ט"ל. אז: $\boxed{\dim(V_1)=\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im} T)}$.

דרגה: $\dim(\operatorname{Im} T)$. **סימון:** $r(T)$.

משפט: A מטריצה מסדר $m\times n$. נגדיר $T:F^n\to F^m$ ע"י: $T(v)=Av$. אז T היא ט"ל.

הערות:

- התמונה של T היא מרחב העמודות של A.
- $r(A)=r(T)$.

מסקנה: תהא A מטריצה $m\times n$ מדרגה- r, אז מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$ הוא: $n-r(A)$.

הסבר: נגדיר- $T:F^n\to F^m$ ע"י: $T(v)=Av$. אז מרחב הפתרונות של $Ax=0$ הוא $\ker(T)$.

$$\underbrace{\dim(F^n)}_{n}=\dim(\ker T)+\underbrace{\dim(\operatorname{Im} T)}_{r(A)=r(T)}\Rightarrow \boxed{\dim(\ker T)=n-r(A)}.$$

משפט: יהיו V,W מ"ו מעל שדה F. יהא $B=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ בסיס ל- V. ו- $w_1,w_2,\ldots,w_n$ איברים כלשהם ב- W. נגדיר: $T:V\to W$ כך ש- $T(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\cdots+\alpha_2w_n$ אז T היא הט"ל היחידה שמקיימת: $T(v_1)=w_1,\ T(v_2)=w_2,\ldots,T(v_n)=w_n$.

מרחבים של טרנספורמציות ליניאריות:

הגדרה: V,U מ"ו מעל אותו שדה. אוסף כל הט"ל מ- V ל- U יסומן: $Hom(V,U)$.

טרנספורמציית האפס: $0(v)=0 \quad \forall v\in V \quad 0:V\to U,$.

טרנספורמציית הזהות: $I(v)=v \quad \forall v\in V \quad I:V\to V,$.

הגדרת חיבור וכפל בסקלר: $S,T\in Hom(V,U)$, נגדיר: $T+S,\alpha T\in Hom(V,U)$ כך:

- $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$
- $(\alpha T)(v)=\alpha T(v)$

משפט: V,U מ"ו מעל F אז: $Hom(V,U)$ הוא מ"ו ביחס לפעולות שהגדרנו. ומתקיים: $\dim(Hom(V,U))=\dim(V)\cdot\dim(U)$.

כפל טרנספורמציות ליניאריות: V,U,W מ"ו מעל אותו שדה. $S:V\to U,\ T:U\to W$ ט"ל. נגדיר: $TS:V\to W$ ע"י: $(TS)(v)=T(S(v))$. אז TS היא תמיד ט"ל.

הערות:

- $\ker(T)\subseteq\ker(T^2)$
- $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq\operatorname{Im}(T)$
- $T^2=0\leftrightarrow\operatorname{Im}(T)\subseteq\ker(T)$

הפיכה: ט"ל הינה הפיכה אם היא חח"ע ועל, ואז קיימת לה טרנספורמציה הופכית. נקראת גם: רגולרית או לא סינגולארית.

משפט: נתונה ט"ל $T:V\to V$ חח"ע ועל. אזי היא הפיכה וגם: $T^{-1}:V\to V$ היא ט"ל.

משפט: $T:V\to V$ ט"ל. אז T חח"ע $\leftrightarrow$ T היא על. (זה נכון רק אם זה על אותו מרחב!)

איזומורפיזם: ט"ל חח"ע ועל.

מרחבים איזומורפיים: שני מ"ו שקיים ביניהם איזומורפיזם. סימון: $V\cong U$

משפט: V,W מ"ו מעל אותו שדה. אזי הם איזומורפיים אם"ם יש להם אותו מימד.

ייצוג טרנספורמציות ליניאריות ע"י מטריצות

מוטיבציה: מציאת בסיס שייתן מטריצה אלכסונית, כי היא תאפשר חישובים קלים יותר כמו: מציאת הדרגה והעלאה בחזקה.

נתונה ט.ל $T:V\to W$. ונתון: $e=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ בסיס ל- V, $f=\{f_1,f_2,\dots,f_m\}$ בסיס ל- W. נסתכל על המטריצה:

$$\begin{cases} T(e_1)=a_{11}f_1+\dots+a_{1m}f_m \\ \vdots \\ T(e_n)=a_{n1}f_1+\dots+a_{nm}f_m \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^t$$

המטריצה המתקבלת (לאחר טראנספוז על מטריצת המקדמים) הינה **המטריצה המייצגת** של T ביחס לבסיסים: e,f. סימון: $[T]_e^f$ (מה שלמעלה הינו הבסיס אליו עברנו, מתאים למקדמים).

וקטור קואורדינאטות: V מ"ו, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ בסיס. $v\in V$,

$v=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n$. אז: $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ הם וקטור הקואורדינאטות של v בבסיס B.

סימון: $$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

משפט: תהא A מטריצה כך ש- $Av=0$ לכל v. אז: $A=0$.

מסקנה: תהיינה A,B מטריצות ונתון ש- $Av=Bv$ לכל v, אז: $A=B$.

משפט: $T:V\to W$, e בסיס של V, f בסיס של W. אז לכל $v\in V$ מתקיים:

1. $[T(v)]_f=[T]_e^f\cdot[v]_e$, כלומר: כפל במטריצה המייצגת שקול לטרנספורמציה.
   - $[T]_B\cdot[v]_B=[T(v)]_B$
2. $r(T)=r\left([T]_e^f\right)$
3. אם $S:V\to W$ (אותו Hom) אז: $[T+S]_e^f=[T]_e^f+[S]_e^f$
4. α סקלר, אז: $[\alpha T]_e^f=\alpha[T]_e^f$

הערה: $[T(v)]_f$ - רשימת $T(v)$ לפי המקדמים של איברי בסיס f

הגדרה: $T:V\to V$, e בסיס ל- V. $[T]_e=[T]_e^e$.

משפט: V,U מ"ו מעל שדה F. אז: $Hom(V,U)\cong F^{m\times n}$ כאשר: $\dim(V)=n$, $\dim(U)=m$. בפרט: $\dim(Hom(V,U))=m\cdot n$.

משפט: V,U,W מ"ו מעל שדה F ו- e,f,g בסיסים בהתאמה. T,S ט"ל:

$V \xrightarrow{S} U \xrightarrow{T} W$, אז מתקיים: $[TS]_e^g = [T]_f^g \cdot [S]_e^f$

מסקנה: $T:V \to V$, e בסיס ל- V, הפיכה אם"ם $[T]_e$ הפיכה, אז: $[T^{-1}]_e = ([T]_e)^{-1}$.

שינוי בסיסים:

מטריצת מעבר: V מ"ו, e,f שני בסיסים. מטריצה $P=[I]_f^e$, היא מטריצת המעבר מ- e ל- f - (למרות שבפועל המעבר היה הפוך- כתיבת איברי f עם ק"ל של- e). ומתקיים גם:

1. $P[v]_f = [v]_e$
2. $P^{-1}[v]_f = [v]_e$ (ההופכית הינה מטריצת המעבר לכיוון השני).
3. $T:V \to V$ אז: $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$.

מטריצות דומות: שתי מטריצות A,B ריבועיות מאותו סדר, תקראנה דומות אם יש מטריצה הפיכה P כך ש: $A=P^{-1}BP$

הערה: עבור $T:V \to V$ ט"ל, כל המטריצות המייצגות שלה בבסיסים שונים, הן דומות.

משפט: A,B אם"ם הן מייצגות את אותה העתקה- T.

משפט: למטריצות דומות יש אותה דרגה.

משפט: למטריצות דומות יש אותה עקבה ($trace$).

דטרמיננטים

דטרמיננטה: מספר שמתקבל ממטריצה ריבועית A. סימון: $\det(A), \ |A|$.

מינור: הדטרמיננטה של המטריצה המתקבל מ-A ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j. סימון: M_{ij}.

הגדרה: $\boxed{|A|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-\cdots+(-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}}$

הערה: סימן המינור נקבע לפי מיקום האיבר המקדם שלפיו מחוקים שורה ועמודה.

משפט: $A_{n\times n}$, אזי: $|A|=|A^t|$. מכאן שכל משפט על שורות של דטרמיננטה הוא נכון גם לעמודות.

משפט: ניתן לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה (לפי כל עמודה), למשל פיתוח לפי שורה i:

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}M_{in}$$

הערה: כדאי לפתח לפי שורה/עמודה המכילה יותר אפסים.

כללים לפיתוח דטרמיננטה:

1. דטרמיננטה בעלת שורות (עמודות) אפסים שווה לאפס.
2. דטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי.
3. אם יש שתי שורות (עמודות) פרופורציונאליות (או שוות), הדטרמיננטה שווה לאפס.

פעולות אלמנטאריות על דטרמיננטים:

1. אם מחליפים שתי שורות (עמודות) שונות זו בזו, סימן הדטרמיננטה מתחלף.
2. ניתן להוציא גורם משותף משורה (עמודה) בדטרמיננטה. $|\alpha A|=\alpha^n|A|\neq\alpha|A|$
3. אם מוסיפים לשורה (עמודה) כפולה של שורה (עמודה) אחרת, הדטרמיננטה אינה משתנה.

משפט: הדטרמיננטה של A שווה לאפס אם"ם השורות (העמודות) שלה תלויות ליניארית.

דטרמיננטים ומטריצות הפיכות:

adjoint: A מטריצה ריבועית $n\times n$. נגדיר מטריצה ששמה: $adj(A)$ מאותו סדר של-A.

במקום ה-i,j שלה מופיע המינור המתאים: $(-1)^{i+j}M_{ij}$

הערה: זוהי למעשה הטרנספוז של כתיבת כל מינור במקום שלפיו פיתחנו אותו.

משפט: עבור כל מטריצה $A_{n\times n}$ מתקיים: $\boxed{A\cdot adj(A)=|A|\cdot I}$ ואם A הפיכה אז נחלק ב-$A\neq 0$ ונקבל: $\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)}$

משפט:

1. אם A הפיכה אז $adj(A)$ הפיכה ואם $r(A)=n$ אז $adj(A)=n$
2. אם $r(A)=n-1$ אז $r(adj\ A)=1$
3. אם $r(A)<n-1$ אז $r(adj\ A)=0$

תכונות נוספות:

- $|adjA|=|A|^{n-1}$
- $adj\left(A^{-1}\right)=\left(adj\ A\right)^{-1}$
- $adj\left(adj\ A\right)=|A|^{n-2}\cdot A$
- $|adj\left(adj\ A\right)|=|A|^{(n-1)^2}$

דטרמיננטים ומערכות משוואות:

הכלל של קרמר: נתונה מערכת $Ax=b$ ריבועית כאשר ידוע ש: $|A|\neq 0$. נסמן: $\Delta=|A|$.

נסמן ב: Δ_i - דטרמיננטה של המטריצה המתקבלת ע"י החלפת העמודה ה-i בעמודה ה-b ב-A.

אז מתקיים: $\boxed{x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}}$ כלומר, כך ניתן לקבל פתרונות למערכת.

דטרמיננטה של מכפלת מטריצות:

משפט: A,B מטריצות ריבועיות מגודל $n\times n$. אז: $|AB|=|A|\cdot|B|$

מסקנה: אם $A\neq 0$ אז: $\boxed{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}$

טריקים לחישוב דטרמיננטים:

- **סכום כל עמודה שווה:** מחברים את כל המודות לעמודה הראשונה ואז מחסרים מכל השורות את הראשונה לקבלת עמודה עם מקסימום אפסים:

$$\begin{vmatrix}7&10&0\\1&-1&17\\5&4&8\end{vmatrix}\xrightarrow{C_1\to C_1+C_2+C_3}\begin{vmatrix}17&10&0\\17&-1&17\\17&4&8\end{vmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-R_1}\begin{vmatrix}17&10&0\\0&-11&17\\0&-6&8\end{vmatrix}$$

- **מטריצה משני איברים: באלכסון ומחוצה לו:** $\boxed{\left((n-1)\alpha+\beta\right)\cdot\left(\beta-\alpha\right)^{n-1}}=\begin{vmatrix}\beta&&\alpha\\&\ddots&\\\alpha&&\beta\end{vmatrix}$

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים ולכסון

וקטורים וערכים עצמיים:

טרנספורמציה לכסינה: $T:V\to V$ נקראת לכסינה אם יש בסיס B ל- V כך שהמטריצה המייצגת לפי בסיס B $[T]_B$ היא אלכסונית.

מטריצה לכסינה: מטריצה ריבועית A, שקיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית.

הערה: A,B דומות אם קיימת P הפיכה כך ש- $P^{-1}AP=B$. ולכן להיות לכסין פירושו: להיות דומה לאלכסונית.

וקטור עצמי: $T:V\to V$, $v\neq 0$ נקרא ו"ע אם קיים $\lambda\in F$ כך ש- $T(v)=\lambda v$.

ערך עצמי: λ הנ"ל נקרא ערך עצמי השייך לו"ע v.

הגדרה למטריצות: $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה F, $0\neq v\in F^n$ נקרא ו"ע של A אם קיים α כך ש- $Av=\alpha v$. ו- α נקרא הע"ע שייך ל- v.

משפט: $T:V\to V$ היא לכסינה אם"ם קיים ל- V בסיס שמורכב כולו מו"ע של T.

הערה: כל $T(v)$ שווה ל- v כפול סקלר כלשהו, ושאר האיברים בק"ל מוכפלים באפס כדי שמטריצת המקדמים תצא אלכסונית.

משפט: $A_{n\times n}$ לכסינה אם"ם יש לה n וקטורים עצמיים בת"ל.

משפט: למטריצות דומות אותה דטרמיננטה (ועבור T נסמן ב- $|T|$).

פולינום אופייני:

הגדרה: $|\lambda I-T|$ נקרא הפולינום האופייני של- T.

הערה: עבור A מסדר $n\times n$ הפ"א הוא ממעלה- n.

משפט: תהא $T:V\to V$ ט.ל אזי:

1. הערכים העצמיים של T הם השורשים של הפולינום האופייני.
2. הווקטורים העצמיים של ערך עצמי- λ הם האיברים השונים מאפס ב- $\ker(\lambda I-T)$.
3. אוסף הוקטורים העצמיים השייכים לערך עצמי λ בתוספת האפס הוא תת-מרחב של V.

סימון: V_λ ונקרא גם- המרחב העצמי של λ ומימדו שווה לריבוי הגיאומטרי של- λ.

משפט: A מטריצה לכסינה מסדר $n\times n$. יהיו $v_1,v_2,\dots,v_n$ ו"ע בת"ל. נסמן ב- $P=(v_1,v_2,\dots,v_n)$ אז:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \cdots & 0\\ & \alpha_2 & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

משפט: לע"ע שונים יש ו"ע בת"ל.

מסקנה: $T:V\to V$ ט.ל, $\dim(V)=n$, אם לפולינום האופייני של T יש n שורשים שונים אזי T לכסינה.

הערה: המשפט ההפוך אינו נכון! ייתכן שהיא לכסינה למרות שיש פחות מ- n שורשים שונים.

ריבוי גיאומטרי ואלגברי:

משפט: למטריצות דומות יש אותו פ"א, ולכן גם אותם ע"ע.

ריבוי אלגברי של ע"ע: הריבוי שלו בפולינום האופייני.

ריבוי גיאומטרי של ערך עצמי: מספר הו"ע בת"ל שיש לו.

משפט: $T:V\to V$ ט.ל, α ע"ע של T, אזי הר"ג של α קטן או שווה ל-ר"א.

$$\boxed{1\le R.G\le R.A\le n}$$

מסקנה-1: T לכסינה אם"ם עבור כל ע"ע, הר"א שווה לר"ג.

מסקנה-2: A מטריצה מסדר $n\times n$ בעלת n ע"ע שונים, אז A לכסינה (ההפך לא נכון).

משפט: T הפיכה אם"ם אפס אינו ע"ע שלה.

משפט: ל- AB ול- BA יש אותם ערכים עצמיים.

משפט: תהא A מטריצה מסדר $n\times n$ מעל שדה- F. נניח שיש ל- A n ע"ע בשדה, אז A דומה למטריצה משולשת. $\begin{pmatrix}\alpha_1 & - & - & - \\ & \alpha_2 & - & - \\ \vdots & 0 & \ddots & - \\ 0 & \cdots & & \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ הם ה-ע"ע של A.

מסקנה: 1. סכום הע"ע של מטריצה שווה לעקבה.

2. מכפלת הע"ע של מטריצה שווה לדטרמיננטה.

משפט:

1. ל- A ול- A^t אותם ע"ע.

2. אם סכום האיברים בכל <u>שורה</u> של מטריצה הוא קבוע-k. אז k הוא ע"ע ששייך לו"ע $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

3. אם סכום האיברים בכל <u>עמודה</u> של מטריצה הוא קבוע k אז k הוא ע"ע.

הצבת מטריצות וט.ל לפולינום:

הגדרה: $T:V\to V$ ט.ל, V מ"ו מעל F ו- A מטריצה ריבועית.

פולינום: $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$. נגדיר: $f(T)=a_oI+a_1T+a_2T^2+\cdots+a_nT^n$; $f(A)=a_oI+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$

משפט קיילי-המילטון: אם $f(x)$ הוא הפולינום האופייני של מטריצה A, אז $f(A)=0$.

<u>הערה:</u> כל T^k בחזקה טבעית הוא ק"ל של: $I,T,T^2,\dots,T^{n-1}$ ($\dim(V)=n$).

משפטים נוספים:

משפט: A מטריצה מסדר $n\times n$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ ע"ע לאו דווקא שונים. אז מתקיים:

$$\prod_{j=1}^{n}\lambda_j=|A|=(-1)^n a_0 \qquad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=tr(A)-a_{n-1},$$ (מגיע מנוסחאות וייטה).

כאשר a_0 - האיבר החופשי ו- a_{n-1} המקדם של λ^{n-1} בפולינום האופייני.

חזקות של מטריצות לכסינות: A לכסינה אז: $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & \cdots & 0\\ & \alpha_2 & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \alpha_n\end{pmatrix}$ ומתקיים:

$$A^k=P\begin{pmatrix}\alpha_1{}^k & & \cdots & 0\\ & \alpha_2{}^k & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \alpha_n{}^k\end{pmatrix}P^{-1}$$

תכונות חשובות:

1. A מטריצה $n\times n$, λ ע"ע של A עם ו"ע v ($Av=\lambda v$).
ו- $p(x)=a_0+\cdots+a_kx^k$ פולינום כלשהו ממעלה k כלשהי. אז: $\underbrace{p(A)}_{matrix}v=\underbrace{p(\lambda)}_{scalar}v$ כלומר:
$p(\lambda)$ הוא ע"ע של המטריצה- $p(A)$ עם אותו ו"ע.
2. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A אז: $\frac{1}{\lambda}$ הוא ע"ע של A^{-1} עם אותו ו"ע.
3. אם- λ ע"ע מרוכב ו- v ו"ע של A ממשית אז גם $\bar{\lambda}$ הינו ע"ע ו- $\bar{v}$ ו"ע מתאים של- A.
4. אם λ ע"ע ו- v ו"ע מתאים של A, אז λ^n הינו ע"ע ו- v ו"ע מתאים של- A^n.