משוואות דיפרנציאליות רגילות - תרגול

מתרגל: יוסי כהן

סמסטר אביב, 2004

תקציר

נכתב ע"י רונן אברבנאל. הערות, תיקונים וכו, בבקשה שלחו ל-ronen@tx.technion.ac.il. גרסאות מעודכנות של קובץ זה, במידה ויתקיימו, ניתן יהיה למצוא ב-www.technion.ac.il/~ronen.

1 תרגול ראשון

2 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

$$y' + p(x)y = g(x)$$

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= L(y_1) + L(y_2) \\ L(cy_1) &= cL(y_1) \end{aligned}$$

2.1 דוגמא ראשונה

$$\begin{aligned} y' + y &= e^x \\ y &= \frac{e^x}{2} \end{aligned}$$

הפתרון $y = \frac{e^x}{2}$ פותר את המשוואה.
נפתור את התרגיל בשיטת גורמי אינטגרציה

$$\begin{aligned} y' + y &= e^x / \cdot \mu(x) \\ \mu(x)y' + \mu(x)y &= e^x \mu(x) \end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה על 2 אגפים. נשאף לקבל $\mu' y + y' \mu = (\mu(x)y)'$ בצד שמאל.

על מנת להתאים את המשוואה לתבנית, צריך להתקיים

$$\begin{aligned}
\mu y' &= \mu y' \\
\mu' y &= \mu y \\
\frac{\mu'}{\mu} &= 1 \\
\int \frac{\mu'}{\mu} dx &= \int 1 = x \\
\ln \mu &= x \\
\mu &= e^x
\end{aligned}$$

אזי נחליף את μ ב-e^x.

$$\begin{aligned}
e^x y' + e^x y &= e^{2x} \\
(e^x y)' &= e^{2x} \\
\int (e^x y)' &= \int e^{2x} \\
e^x y &= \frac{e^{2x}}{2} + c \\
y &= \frac{e^x}{2} + \frac{c}{e^x}
\end{aligned}$$

2.2 תרגיל שני

$$\begin{aligned}
xy' + 2y &= x^2 - x + 1 \\
y(1) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

פתרון:
ננרמל את את המשוואה

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

א. נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2}{x} y &= 0 \\
y' &= -\frac{2}{x} y \\
\int \frac{y'}{y} &= \int -\frac{2}{x} \\
\ln |y| &= -2 \ln |x| + \ln c_1 = \left(\ln x^{-2} c_1\right) \\
|y| &= x^{-2} c_1 \\
y &= \frac{c_2}{x_2} |c_1 = \pm c_1
\end{aligned}$$

וזה הפתרון ההומוגני של המשוואה.
ב. פתון פרטי של המשוואה

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

מניחים, בשיטת ואריציאת הפרמטר. נניח

$$y_p = \frac{c_2(x)}{x^2}$$

נציב את הפתרון במשוואה

$$\begin{aligned}
\left(\frac{c_2(x)}{x^2}\right)' + \frac{2}{x} \cdot \frac{c_2(x)}{x^2} &= \frac{x^2 - x + 1}{x} \\
\frac{c_2' x^2 - 2xc_2}{x^4} + \frac{2c_2}{x^3} &= \frac{x^2 - x + 1}{x} \\
\frac{c_2'}{x^2} - \frac{2c_2}{x^3} + \frac{2c_2}{x^3} &= \frac{x^2 - x + 1}{x} \\
\frac{c_2'}{x^2} &= \frac{x^2 - x + 1}{x} \\
c_2' &= x^3 - x^2 + x \\
c_2 &= \int x^3 - x^2 + xdx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

הפתרון הפרטי של המשוואה הוא:

$$y_p = \frac{c_2(x)}{x^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

$$y_c = y_h + y_p = \frac{c_2}{x^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$$

ידוע כי

$$\begin{aligned}
y(1) &= \frac{1}{2} \\
\frac{c_2}{1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \\
c_2 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\
y &= \frac{1}{12x^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.3 עוד תרגיל

$$y' = \frac{1}{e^y - x}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{y'} &= e^y - x \\ x' &= e^y - x \\ x' + x &= e^y \\ x &= \frac{e^y}{2} + \frac{c_2}{e^y} \end{aligned}$$

3 משוואות לינאריות אי הומוגניות

3.1 תרגיל

למשוואה $y' - y\cot x = e^x \sin x$ יש שני פתרונות $y_1(x), y_2(x)$, שהפרשם שווה :
א. e^x ב. $2e^x$ ג. $3e^x \sin x$ ד. $4\cos x$ ה. $5\sin x$
אם יש משוואה

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= g(x) \\ y_1' + p(x)y_1 &= g(x) \\ y_2' + p(x)y_2 &= g(x) \\ (y_1 - y_2)' + p(x)(y_1 - y_2) &= 0 \end{aligned}$$

כלומר, ההפרש פותר את המשוואה ההומוגנית.
ע"מ לענות על השאלה, צריך לפתור את המשוואה ההומוגנית.

$$\begin{aligned} y' - y\cot x &= 0 \\ y' &= y\cot x \\ \frac{y'}{y} &= \cot x \\ \int \frac{y'}{y} &= \int \cot x \\ \ln|y| &= \ln|\sin x| + \ln c_1 = \ln c_1 |\sin x| \\ y &= c_2 \sin x \end{aligned}$$

ועל כן, התשובה הנכונה היא ה', $y_1 - y_2 = 5\sin x$.

3.2 משוואת ברנולי

משוואה מהצורה $y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$
נפתור את המשוואה:

$$\begin{aligned} x : /xy' - y &= xy^2; x > 0 \\ y^2 : /y' - \frac{y}{x} &= y^2 \\ \frac{y'}{y^2} - \frac{y^{-1}}{x} &= 1 \end{aligned}$$

נסמן $z = y^{-1}$ (באופן כללי, y^{-c} כאשר $c > 0$ כלשהו)

$$z' = -y^{-2} \cdot y'$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} -z' - \frac{z}{x} &= 1 \\ z' + \frac{z}{x} &= -1 \end{aligned}$$

זוהי משוואה לינארית אי-הומוגנית מסדר ראשון, עבורה

$$\begin{aligned} z &= e^{-\int p(x)dx}\left(c + \int \frac{g(x)}{e^{-\int p(x)dx}}dx\right) \\ p(x) &= \frac{1}{x} \\ g(x) &= -1 \\ &\Downarrow \\ e^{-\int p(x)dx} &= e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \\ z_c &= \frac{1}{x}\left(c + \int \frac{-1}{\frac{1}{x}}dx\right) = \frac{1}{x}\left(c - \int xdx\right) \\ &= \frac{c}{x} - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{-1} &= y = \frac{1}{z_c} = \frac{1}{\frac{c}{x} - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{2c - x^2} \\ y_c &= \frac{2x}{2c - x^2} \end{aligned}$$

בעת חילוק ב-y^2, יתכן שאיבדנו פתרון. נבדוק האם $y = 0$ הוא פתרון סינגולרי.
נציב במשוואה ונראה כי $y = 0$ הוא פתרון של המשוואה $0' - \frac{0}{x} = 0^2$.
נבדוק עם הוא מופיע ב-y_c.

$$0 = \frac{2x}{2c - x^2}$$

יש למצוא c שעבורו המשוואה מתקיימת לכל x. אין c כזה, ועל כן $y = 0$ הוא פתרון סינגולרי, עבור הפתרון הנ"ל.

3.3 משוואת ריקטי

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

תרגיל   מצא פתרון כללי למשוואה

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2$$

נמצא פתרון פרטי.
ניחוש של פתרון, $y_p = x$. נציב, ואכן

$$\begin{aligned} x' &= 1 + x^2 - 2x \cdot x + x^2 \\ 1 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י

$$y_c = y_p + \frac{1}{v(x)} = x + \frac{1}{v(x)}$$

נציב במשוואה ונחפש את $v(x)$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{v}\right)' &= 1 + x^2 - 2x\left(x + \frac{1}{v}\right) + \left(x + \frac{1}{v}\right)^2 \\ 1 - \frac{1}{v^2}v' &= 1 + x^2 - 2x^2 - \frac{2x}{v} + x^2 + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2} \\ -\frac{1}{v^2}v' &= \frac{1}{v^2} \\ v' &= -1 \\ v &= -x + c \end{aligned}$$

ועל כן,

$$y_c = x + \frac{1}{-x + c}$$

כמו כן, גם $y_p = x$ הוא פתרון (סינגולרי עקום).

3.4 משפט הקיום והיחידות למשוואה לינארית מסדר ראשון

$$y' + p(x)y = g(x)$$

משפט 3.1 אם $p(x)$ ו-$g(x)$ פונקציות רציפות בקטע (α, β) הכולל את x_0, אזי למשוואה הנ"ל קיים פתרון יחיד המקיים $y(x_0) = y_0$. פתרון זה יהיה חסום ורציף בקטע הנ"ל (גלובאלי).

תרגיל מצא פתרון בקטע $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ למשוואה:

$$y' + e^{3x}\tan(x)y = 0$$

המקיים $y(\frac{\pi}{8}) = 0$.

$y \equiv 0$ הוא פתרון, ומקיים את תנאי ההתחלה, $y(\frac{\pi}{8}) = 0$. הפונקציה $e^{3x}\tan x$ רציפה בקטע, וגם $g(x) = 0$ רציף, ועל כן הפתרון שמצאנו הוא פתרון יחיד המקיים את המשוואה ותנאי ההתחלה הנ"ל, לפי משפט הקיום והיחידות.

4 עוד מד"ר מסדר ראשון

4.1 משפט קיום ויחידות עבור משוואה לא לינארית מהצורה $y' = f(x,y)$

משפט 4.1 אם $f(x,y)$ ו-$\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ אזי בקטעהמוכל ב-(α,β) קיים פתרון יחיד המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ כאשר $\alpha < x_0 < \beta$, $\gamma < y_0 < \delta$ (לוקאלי)

4.1.1 דוגמה

נתונה המשוואה $y' = \frac{2xy}{x^2+2}\sin\left[\frac{\pi y}{2(x^2+2)}\right]$. הראה שפתרון המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$ מקיים גם $0 < y(x) < x^2 + 2$.

פתרון: צ"ל שהפתרון בין $y \equiv 0$, $y = x^2 + 2$.

נראה ששני הנ"ל פתרונות של המשוואה שאינם מקיימים את תנאי ההתחלה. פתרון שמקיים את תני ההתחלה אינו יכול לחתוך את הפתרונות האחרים, מפאת משפט היחידות.

4.2 משוואה פרידה

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)} \\ \int 2\,(y-1)\,dy &= \int \left(3x^2+3x+2\right)dx \\ y^2 - 2y &= x^2 + 2x^2 + 2x + c \end{aligned}$$

נמצא פתרון פרטי עבור תנאי התחלה $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} (-1)^2 - 2\cdot(-1) &= c \\ c &= 3 \end{aligned}$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$

הפתרון נתון באופן סתום. נרשום אותה באופן מפורש.

$$\begin{aligned}
y^2-2y-\left(x^3+2x^2+2x+3\right) &= 0\\
y_{1,2} &= \frac{2\pm\sqrt{4+4\left(x^3+2x^2+2x+3\right)}}{2}\\
&= 1\pm\sqrt{1+1\left(x^3+2x^2+2x+3\right)}\\
&= 1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}\\
y_{1,2} &= 1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}\\
y_{1,2}(0) &= 1\pm 2\\
y &= 1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}
\end{aligned}$$

4.3 משוואה עם פונקציה של קו-ישר

$$y' = f(ax+by+c)$$

נפתור את המשוואה

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{x+y}\\
v &= x+y\\
y &= v-x\\
y' &= v'-1
\end{aligned}$$

נציב את y, y' במשוואה

$$\begin{aligned}
v'-1 &= \frac{1}{v}\\
v' &= 1+\frac{1}{v}=\frac{v+1}{v}\\
\frac{dv}{dx} &= \frac{v+1}{v} \qquad (v+1\neq 0)\\
\int\frac{v}{v+1}dv &= \int dx\\
\int\frac{v+1-1}{v+1}dv &= \int dx\\
\int dv-\int\frac{dv}{v+1} &= \int dx\\
v-\ln(v+1) &= x+c\\
x+y-\ln(x+y+1) &= x+c\\
y &= \ln|x+y+1|+c
\end{aligned}$$

כמו כן, יש לזכור שחילקנו ב-$v-1$, נבדוק אם הוא פתרון סינגולרי.

$$v+1 = 0\rightarrow v=-1$$

הפתרון פותר את המשוואה ולא נכלל בכללי, משום ש-$\ln 0$ לא מוגדר.
ולכן

$$x + y = -1$$

הוא פתרון סינגולרי

5 משוואות מדוייקות

5.1 תרגיל

$$\begin{cases} 2x\left(ye^{x^2} - 1\right)dx + e^{x^2}dy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$2xe^{x^2} = P'_y \quad ?=? \quad Q'_x = 2xe^{x^2}$$

ולכן המשוואה מדויקת, ולכן קיימת פונקציה $F(x,y)$ כך ש-

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int Pdx = \int Qdy \\ F(x,y) &= \int Qdy = \int e^{x^2}dy = \\ &= y \cdot e^{x^2} + \varphi(x) \\ F'_x &= 2xye^{x^2} + \varphi'(x) = 2x\left(ye^{x^2} - 1\right) \\ \varphi'(x) &= -2x \\ \varphi(x) &= -x^2 \\ F(x,y) &= y \cdot e^{x^2} - x^2 + c \\ \\ y \cdot e^{x^2} - x^2 &= c \end{aligned}$$

נמצא c שעבורו $(0,1)$ נמצא במשוואה

$$\begin{aligned} 1 \cdot e^{0^2} - 0^2 &= c \\ c &= 1 \\ y \cdot e^{x^2} - x^2 &= 1 \end{aligned}$$

5.2 משוואה מתדייקת

$$\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + xydy = 0$$

$$\begin{aligned} P &= x^2+y^2+x \\ Q &= xy \\ \\ P'_y &= 2y \\ Q'_x &= y \end{aligned}$$

נכפול ב-μ

$$\begin{aligned} \mu\left(x^2+y^2+x\right)dx+\mu xydy &= 0 \\ \left(\mu\left(x^2+y^2+x\right)\right)'_y &= (\mu\cdot xy)'_x \\ \mu'_y\left(x^2+y^2+x\right)+2y\mu &= \mu'_x xy+\mu y \end{aligned}$$

נניח כי $\mu=\mu(y)$ ולכן $\mu'_x=0$ ומתקבל:

$$\begin{aligned} \mu'_y\left(x^2+y^2+x\right)+2y\mu &= -\mu y \\ \frac{\mu'_y}{\mu} &= \frac{-y}{x^2+y^2+x} \end{aligned}$$

והפונקציה אינה פונקציה של y בלבד, ועל כן ההנחה שגויה.
נניח כי $\mu=\mu(x)$ ו-$\mu'_y=0$ ו-

$$\begin{aligned} 2y\mu &= \mu'_x xy+\mu y \\ y\mu &= \mu'_x xy \\ \frac{\mu'_x}{\mu} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ההנחה נכונה, משום ש-x התבטל

$$\begin{aligned} \ln\mu &= \ln x \\ \mu &= x \end{aligned}$$

נכפול את המשוואה בגורם האינטגרציה :

$$\begin{aligned} \left(x^3+y^2x+x^2\right)dx+x^2ydy &= 0 \\ F(x,y) &= \int x^2ydy \\ &= \frac{1}{2}x^2y^2+\varphi(x) \\ F'_x &= xy^2+\varphi'(x)=x^3+xy^2+x^2 \\ \varphi(x) &= \frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3} \\ F(x,y) &= \frac{1}{2}x^2y^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4} \\ \frac{1}{2}x^2y^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4} &= c \end{aligned}$$

הערה 5.1 עבור משוואה מהצורה

$$Pdx + Qdy = 0$$

וידוע שקיים גורם אינטגרציה מהצורה $\mu = \frac{1}{y}$. אזי יש לבדוק את הפתרון $y \equiv 0$ ע"מ לבדוק זאת, נכתוב את המשוואה בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} p + Q\frac{dy}{dx} &= 0 \\ P + Qy' &= 0 \end{aligned}$$

6 עוד תרגול

6.1 משוואות אורטוגונליות

עבור משוואות מהצורה

$$y' = f(x,y)$$

משוואה כזו תיקרא משוואה הומוגנית אם:

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

(לדוגמה, עבור $f(x,y) = \frac{x}{y}$, $f(tx,ty) = \frac{tx}{ty} = \frac{x}{y} = f(x,y)$)

6.1.1 דוגמה

$$(x>0), y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0$$

פתרון המשוואה העובר דרך $(1,0)$, עובר גם דרך,

$$\begin{array}{ll} (12,5) & (4,0) \\ (5,12) & (3,-4) \\ (4,-3) & \end{array}$$

פתרון

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \\ &= \frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = f(x,y) \\ f(tx,ty) &= f(x,y) \end{aligned}$$

וזו משוואה הומוגנית.
נציב

$$\begin{aligned}(1)v &= \frac{y}{x}\\ y &= vx \to (2)y'_x = v'x + v\end{aligned}$$

נציב את (1) ו-(2) במשוואה

$$\begin{aligned}v'x + v &= v + \sqrt{1+v^2}\\ v'x &= \sqrt{1+v^2}\\ \frac{dv}{dx}x &= \sqrt{1+v^2}\\ \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} &= \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

נתון ש-

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \ln\left(t + \sqrt{a^2+t^2}\right) + C$$

ולכן

$$\begin{aligned}\ln\left|v + \sqrt{1+v^2}\right| &= \ln x + \ln c_1\\ v + \sqrt{1+v^2} &= c_1 x\end{aligned}$$

נציב את $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = c_1 x$$

פתרון המשוואה על פי הנתון עובד דרך $(1,0)$ ולכן $c_1 = 1$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = x$$

פתרון זה מקיים את $(5,12)$ ולכן התשובה היא ג'.

6.2 משפחות אורתוגונליות

שתי מישפ' עקומות y_1, y_2 תקראנה אורתוגונליות אם המשיקים לעקומות בכל אחת מנקודת החיתוך ניצבים זה לזה (במקרה זה מתקיים $y'_1 = \frac{1}{y'_2}$).

$$y = kx^2$$

1. חילוץ של הקבוע:

$$k = \frac{y}{x^2}$$

2. נגזור את המשפחה:

$$y' = 2kx$$

3. נציב את הקבוע מ-1 ב-2 (במידה והקבוע לא נעלם בגזירה)

$$y' = \frac{2yx}{x^2} = \frac{2y}{x}$$

4. נמצא את y'_{ort},

$$y'_{ort} = -\frac{1}{y'} = \frac{-x}{2y}$$

5. נמצא את המשפחה האורתוגונלית

$$\begin{aligned} y'_{ort} &= \frac{-x}{2y} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{2y} \\ \int 2y dy &= \int -x dx \\ y^2 &= \frac{-x^2}{2} + c \\ y^2 + \frac{x^2}{2} &= c \end{aligned}$$

6.3 סיכום - משוואות מסדר ראשון

החומר בבוחן:

- משוואה לינארית מסדר ראשון:

$$y' + p(x)y = g(x)$$

- גורמי אינטגרציה/ואריציאת הפרמטר/שיטת הנוסחא
  - ברנולי

$$y' + p(x)y = g(x)y^\alpha$$

– ריקטי

$$y' = r(x)y^0 + p(x)y' + q(x)y^2$$

∗ משוואות אלו הופכים לליניאריות בעזרת הצבה

- משפט קיום ויחידות:
  עבור משוואה לינארית $y' + p(x)y = g(x)$ (גלובלי)
  עבור משוואה לא-לינארית מהצורה $y' = f(x, y)$ (לוקלי)
- משוואה מדויקת

$$Pdx + Qdy = 0$$

משוואה שניתן לדייק אותה באמצעות $M(x)$ או $M(y)$.

- משוואה פרידה או $f(y)dy = g(x)dx$

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)}$$

ממנה יוצא פונקציה של קו ישר

$$y' = f(ax + by + c)$$

ומשוואה הומוגנית

$$y' = f(x, y)$$

כאשר $f(x, y) = f(tx, ty)$

- משפחות אורתוגונליות.

6.3.1 נתונה המשוואה

$$y' = (y - x^3 + 4x)f(x, , y) + 3x^2 - 4$$

כאשר $f(x, y)$ ו-$\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות על כל הישר xy אזי פתרון $y(x)$ המתאפס ב-$x = -1$ יכול (עם פונקציה $f(x, y)$ מתאימה) להתאפס גם ב-

- $x = 3$,$x = 2$,$x = 1$,$x = -2$,$x = -3$

פתרון ננחש פתרון למשוואה

$$y = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$$

פתרון המוסט ל--3 עובר מתחת לגרף השני, ולכן היא יכול לחתוך את ציר x רק ב-$x = -3$.

7 משוואה לינרית מסדר $n > 1$

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = g(x)$$

7.1 דוגמה

עברו $y'' + y = 0$ האם ובאיזה תחום מהווים $\{\sin x, \cos x\}$ מערכת יסודית?

פתרון $\sin x, \cos x$ מקיימים את המשוואה (פתרונות)

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

ולכן הפתרונות הנ"ל בת"ל, כלומר, $\{\sin x, \cos x\}$ מערכת יסודית של המשוואה, ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

7.2 נוסחאת אבל

משפט 7.1 נוסחאת אבל עבור הוורונסקיאן
(עבור $y'' = py' + qy = 0$)

$$W = Ce^{-\int p(x)dx}$$

7.2.1 דוגמה

נניח כי $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות של

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + 12y = 0$$

ב-$(-1, 1)$. המקיימים:

$$\begin{array}{ll} y_1(0) = 1 & y_2(0) = -1 \\ y_1'(0) = 1 & y_2'(0) = 2 \end{array}$$

אזי W שווה ל-
א. 1- ב. $\frac{1}{1-x^2}$, ג. $\frac{1}{x^2-1}$ ד. $\frac{2x}{1-x}$ ה. 0

פתרון ראשית ננרמל את המשוואה

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2} y' + \frac{12}{1-x^2} y = 0$$

מנוסחאת אבל נקבל כי

$$\begin{aligned} W &= ce^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int \frac{-2x}{1-x^2}} = \\ &= ce^{-\ln\left|1-x^2\right|} = \frac{c}{1-x^2} \end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה בדטרמיננט ונקבל כי

$$\begin{aligned} y(0) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \\ \frac{1}{1} &= -1 \\ W &= \frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

8 משווה לינארית מסדר $n > 1$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = g(x)$$

8.1 נוסחאת אבל למציאת y_2 כשידוע y_1

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{y_1} &= \int \frac{W}{y_1^2} \\ y_2 &= y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx \\ y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) Dx}}{y_1^2} \end{aligned}$$

8.2 פתוראת המשוואה

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 0$$

ננחש פתרון

$$y_1 = x^2$$

נמצא פתרון נוסף באמצעות הנוסחא

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 \int \frac{e^{-\int 0 dx}}{x^4} dx \\ &= x^2 \int \frac{c}{x^4} dx = \frac{1}{x^3} = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$y_h = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x}$$

8.3 הורדת סדר - תרגיל

פתרון את המשוואה

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+2y=0\quad x\in(-1,1)$$

פתרון ננחש

$$y_1=x$$

ולכן

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1v(x)=xv(x)\\ y_2' &= v+v'x\\ y_2'' &= 2v'+v''x \end{aligned}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} \left(1-x^2\right)\left(2v'+v''x\right)-2x\left(v+v'x\right)+2xv &= 0\\ v''+v'\left(\frac{2-4x^2}{x-x^3}\right) &= 0\\ z &= b' \end{aligned}$$

נסמן

$$\begin{aligned} z'+\left(\frac{2-4x^2}{x-x^3}\right)z &= 0\\ z_h &= ce^{-\int p(x)dx}=ce^{-\int\frac{2-4x^2}{x-x^3}dx}\\ &= ce^{-\int\left(\frac{2}{x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)dx}\\ &= \frac{c}{x^2\left(1-x^2\right)} \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} v &= \int zdx=c\int\frac{dx}{x^2\left(1-x^2\right)}c\left(\int\frac{dx}{x^2}+\frac{dx}{1-x^2}\right)\\ &= c\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\\ y_2(x) &= xvx)=1-\frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

8.4 משוואה לינארית המוגנית עם מקדמים קבועים

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=0$$

כאשר $a_1,\dots,a_n$ קבועים.
מחפשים פתרון מהצורה

$$y = e^{rx}$$

אזי

$$\begin{cases} y' = re^{rx} \\ \vdots \\ y^{(n)} = r^n e^{rx} \end{cases}$$

נציב במשוואה

$$\begin{aligned} r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a^n e^{rx} &= 0 \\ e^{rx}\left(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n\right) &= 0 \\ r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n &= 0 \end{aligned}$$

וזהו הפולינום האופייני של המשוואה הדיפרנציאלית.

8.4.1 נבחין בין ארבעה מקרים

1. לפולינום האופייני שורשים ממשיים פשוטים
2. לפולינום האופייני שורשים ממשיים ומרוכבים פשוטים
3. לפולינום האופייני שורשים ממשיים מרובים
4. לפולינום האופייני שורשים ממשיים ומרוכבים מרובים

8.4.2 שורשים ממשיים פשוטים

$$\begin{aligned} y'' - 7y' + 12y &= 0 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases} \\ r^2 - 7r + 12 &= 0 \\ r_{1,2} &= \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = 3, 4 \\ y_h &= c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} \end{aligned}$$

נציב תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} y_h(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ y_h'(0) &= 3c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 &= -1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$y_p = e^{3x} - e^{4x}$$

8.4.3 שורשים ממשיים פשוטים ומרוכבים

אם קיים שורש $\alpha + i\beta$, קיים גם השורש $\alpha - i\beta$.

$$\begin{aligned}
\overline{y_1} &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) \\
\overline{y_2} &= e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right) \\
y_1 &= \frac{\overline{y_1}+\overline{y_2}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \\
y_2 &= \frac{\overline{y_1}-\overline{y_2}}{2} = e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{aligned}$$

כלומר, עבור כל צמד מרוכב, המערכת היסודית

$$\left\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\right\}$$

דוגמה

$$y^{(5)} - y' = 0$$

$$\begin{aligned}
r^5 - r &= 0 \\
r\left(r^4-1\right) &= 0 \\
r\left(r^2-1\right)\left(r^2+1\right) &= 0 \\
r &= 0, 1, -1, ih, -i \\
y_h &= c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + c_4\sin x + c_5\cos x
\end{aligned}$$

8.4.4 מקרה (ג)

שורשים ממשיים מרובים

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

המשוואה האופיינית

$$\begin{aligned}
r^3 - 3r + 2 &= 0 \\
(r-1)^2(r+2) &= 0
\end{aligned}$$

הפתרון:

$$y_n = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x}$$

8.4.5 מקרה (ד)

שורשים מרוכבים מרובים.

$$\begin{aligned} y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} &= 0 \\ r^7 + 2r^5 + r^3 &= 0 \\ r^3\left(r^4 + 2r^2 + 1\right) &= 0 \\ r^3\left(r^2 + 1\right)^2 &= 0 \end{aligned}$$

השורשים הם $0, 0, 0, i, i, -i, -i$.

$$\begin{aligned} y_n &= c_{-1} + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \sin x + c_5 \cos x \\ &+ c_6 x \sin x + c_7 x \cos x \end{aligned}$$

9 המשך

9.1 תרגיל

נתונה המשוואה הבאה

$$y^{(6)} + A_1 y^{(5)} + A_2 y^{(4)} + A_3 y^{(3)} + A_4 y^{''} + A_5 y' + A_6 y = 0$$

עם מקדמים קבועים. ידיע כי $y_1 = x$, $y_2 = x\cos x$ הם פתרונות. יש למצוא את המקדמים A_i.

- x פתרון ולכן $y = 1$ פתרון.
- $x\cos x$ פתרון, לכן גם $x \sin x$ פתרון
- לכן, 0 הוא שורש של הפולינום לפחות מריבוי 2, ו-$\pm i$ גם הם לפחות מריבוי 2.

אלו בדיוק כל שורשי הפולינום.

$$\begin{aligned} r^2\left(r^2 + 1\right)^2 &= 0 \\ r^2\left(r^4 + 2r^2 + 1\right) &= 0 \\ r^6 + 2r^4 + r^2 &= 0 \\ y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' &= 0 \end{aligned}$$

$$A_1 = 0, A_2 = 2, A_3 = 0, A_4 = 1, A_5 = 0, A_6 = 0$$

9.2 משוואה אי-הומוגנית

לינארית עם מקדמים שאינם קבועים, ואריציאת הפרמטר.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = g(x)$$

ראשית, מוצאים פתרון כללי למשוואה הומוגנית

$$y_h(x) = c_1y_1(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

ומחפשים פתרון פרטי מהצורה,

$$y_p = c_1(x)y_0(x) + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

באמצעות פעולות אלגבריות שונות מקבלים את המערכת הבאה:

$$\begin{aligned} c_1'y_1(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= g(x) \end{aligned}$$

קבלנו מערכת משוואות עם הנעלמים $c_1', \ldots, c_n'$.

9.3 תרגיל

$$y'' - 9y = 5e^{3x}$$

פתרון המשוואה ההומוגנית

$$\begin{aligned} r^2 - 9 &= 0 \\ y_h &= c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1'e^{3x} + c_2'e^{-3x} &= 0 \\ 3c'e^{3x} - 3c_2'e^{-3x} &= 5e^{3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1' &= \frac{5}{6} \\ c_1 &= \frac{5}{6}x \\ c_2' &= -\frac{5}{6}e^{6x} \\ c_2 &= -\frac{5}{36}e^{6x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{5}{6}xe^{3x} - \frac{5}{36}e^{6x}e^{-3x} \\ y_c &= y_h + y_p \\ &= c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \frac{5}{6}xe^{3x} - \frac{5}{36}e^{3x} \\ &= c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + \frac{5}{6}xe^{3x} \end{aligned}$$

9.4 משוואה לינארית אי-הומוגנית עם מקדמים קבועים

צורה כללית:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

a_i קבועים. הפתרון הכללי

$$y = y_h + y_p$$

השיטה עבודה רק כאשר $f(x) = p_m(x) e^{\lambda x} \begin{cases} \sin mx \\ \cos mx \end{cases}$

במקרה זה, הפתרון מהצורה

$$y_p = x^S e^{\lambda x} \left[Q_m^{(1)} \cos mx + Q_m^{(2)} \sin mx \right]$$

כאשר S הוא ריבוי של $\lambda \pm mi$ בפולינום אופייני

10 אוילר אי-הומוגנית

10.1 דוגמה

למשוואה $x^3 y''' + xy' - y = x$, קיים פתרון מהצורה:

פתרון ראשית מפתור משוואה הומוגנית:

$$x^3 y''' + xy' - y = 0$$

מציבים $y = x^r$, $y' = rx^{r-1}$, $y'' = r(r-1)x^{r-2}$

$$y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$$

ומקבלים את הפולינום האופייני

$$(r-1)^3 = 0$$

השורשים הם $1,1,1$, ולכן הפתרון ההומוגני יהיה

$$y_h = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x \ln^2 x$$

כעת, על מנת למצוא פתרון פרטי של האי-הומוגנית, נציב $x = e^t$. אזי באגף שמאל נקבל משוואה עם מקדמים קבועים בעלת אותו פולינום אופייני כמו של משוואת אוילר המקורית.

$$(r-1)^3 = r^3 - 3r^2 + 3r - 1$$

ולכן המשוואה תראה כך:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^t$$

$$f(t)e^{\lambda t}P_m(t)\begin{cases}\cos\mu t\\ \sin\mu t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= t^5e^{\lambda t}\left(Q_m^{(1)}(t)\cos\mu t+Q_m^{(2)}(t)\sin\mu t\right)\\
&\lambda=1,\mu=0,m=0,s=3\\
y_p(t) &= t^3e^ta\\
y_p(x) &= \ln^3 x\cdot x\cdot a\\
y_c(x) &= y_u+y_p=c_1x+c_2x\ln x+c_3x\ln^2 x+ax\ln^3 x
\end{aligned}$$

והתשובה הנכונה היא א'

10.2 מערכת של משוואת מסדר ראשון

10.2.1 שיטת האלימינציה

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-t^2\\2t\end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\begin{cases}x_1'=x_1-x_2-t^2\\x_2'=x_1+3x_2+2t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2=-x_1'+x_1-t^2\\x_2'=-x_1''+x_1'-2t\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
-x_1''+x_1'-2t &= x_1+3\left(-x_1'+x_1-t^2\right)+2t\\
x_1''-4x_1'+4x_1 &= 3t^2-4t
\end{aligned}$$

פותרים משוואה אי הומוגניץ עם מקדמים קבועים ומקבלים

$$\begin{aligned}
x_1 &= c_1e^{2t}+c_2te^{2t}+\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\\
x_2 &= -x_1'+x_1-t^2\\
&-c_1e^{2t}-c_2te^{2t}-c_2e^{2t}-\frac{1}{4}t^2-t-\frac{3}{8}\\
\Rightarrow\vec{x} &= \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}+c_2\begin{pmatrix}t\\-t-1\end{pmatrix}e^{2t}+\begin{pmatrix}\frac{3}{4}t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\\-\frac{1}{4}t^2-t-\frac{3}{8}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10.2.2 שיטת הערכים העצמיים

$$\vec{X}'(t)-A\vec{X}=0$$

מציבים

$$\vec{x}=e^{\lambda t}\vec{v}$$

כאשר v וקטור קבועים.

$$\vec{x}'=\lambda e^t\vec{v}$$

נציב במשוואה ימפעחעבפו)01ר^{2},ר(

$$\begin{aligned}\lambda e^{t}\vec{v}-Ae^{\lambda t}\vec{v} &= 0\\ A\vec{v} &= \lambda\vec{v}\end{aligned}$$

ולכן λ ערך עצמי של A ו-$\vec{v}$ וקטור עצמי המתאים לערך העצמי λ.

$$\vec{x}'=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\vec{x}$$

נמצע ערכים עצמיים

$$\begin{aligned}|A-\lambda I| &= \begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2=0\\ \lambda_{1,2} &= -1,2\end{aligned}$$

נמצע וקטור עצמי עבור $\lambda_1=-1$,

$$\begin{aligned}(A-\lambda I)\,\vec{v_1} &= 0\\ \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\\ 4v_1-2v_2 &= 0\\ 2v_1-v_2 &= 0\end{aligned}$$

ולכן $v_2=2v_1$. בגלל שהדטרמיננט 0, אז לפחות 2 מהמשוואות הן תלויות לינארית, אבל יש רק 2 משוואות ולכן היא תלויה.

אזי $\begin{pmatrix}v_1\\ 2v_1\end{pmatrix}$ הוא וקטור עצמי. נבחר $v_1=1$, ונקבל את הוקטור העצמי $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, באותו אופן, מוצאים עבור $\lambda_2=2$ נקבל את הוקטור העצמי $\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$.

ולכן, הפתרון יהיה

$$x_h=c_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+c_2e^{2t}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

10.2.3 ערכים עצמיים מרוכבים ושונים

$$e^{(\alpha+i\beta)t}=e^{\alpha t(\cos\beta t+i\sin\beta t)}=e^{\alpha t}\cos\beta t+ie^{\alpha t}\sin\beta t$$

$$\begin{aligned}\vec{X}'(t) &= \begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}\vec{X}(t)\\ |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+5=0\\ \lambda_1=1+2i & \qquad \lambda_2=1-2i\end{aligned}$$

עבור הערך העצמי $\lambda_1 = 1+2i$, נקבל את הוקטור העצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

$$\left(A-\lambda I\right)\vec{v} = 0$$

ולכן עבור $\lambda_1 = 1+2i$ והוקטור העצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ נקבל את האיבר הבא במערכת היסודית:

$$\begin{aligned}
\vec{X_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{t}\left(\cos 2t + is\in 2t\right)\left|A-\lambda I\right| \\
&= e^{t}\begin{pmatrix} \cos t2 + i\sin 2t \\ \cos 2t + i\sin 2t - i\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} \\
&= e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + ie^{t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} \\
X_n &= c_1 e^{t}\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10.2.4 ערכים עצמיים ממשיים מרובים

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\vec{X}$$

הערכים העצמיים הם $1,1,2$, נמצא וקטור עצמי עבור $\lambda_1 = 2$, נקבל

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נחפש את הוקטור העצמי עבור הערך העצמי $\lambda_2 = 1$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ולכן הוקטור העצמי $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$, והריבוי הגיאומטרי אינו שווה לריבוי האלגברי.

נחפש פתרון עבור ערכים עצמיים $\lambda_2 = 1$, מריבוי 2. נניח שהפתרון מהצורה,

$$u = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} P_{m-1}^{(1)} \\ \vdots \\ P_{m-1}^{(n)}(t) \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} \alpha_0 t + \beta_0 \\ \alpha_1 t + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \beta_2 \end{pmatrix}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$e^{t}\begin{pmatrix} \alpha_0 t + \alpha_0 + \beta_0 \\ \alpha_1 t + \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 t + \alpha_2 + \beta_2 \end{pmatrix} = e^{t}\begin{pmatrix} \alpha_0 t + \beta_0 \\ -4\left(\alpha_0 t + \beta_0\right) + \alpha_1 t + \beta_1 \\ 3\left(\alpha_0 t + \beta_0\right) + 6\left(\alpha_1 t + \beta_1\right) + 2\alpha_2 t + \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= \alpha_0 \\
\alpha_0 + \beta_0 &= \beta_0 \\
\alpha_1 &= -4\alpha_0 + \alpha_1 \\
\alpha_1 + \beta_1 &= -4\beta_0 + \beta_1 \\
\alpha_2 &= 3\alpha_0 + 6\alpha_1 + 2\alpha_2 \\
\alpha_2 + \beta_2 &= 3\beta_0 + 6\beta_1 + 2\beta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 &= 0 \\
\beta_0 &= \underbrace{-\frac{1}{4}\alpha_1}_{\alpha_1 = -4c_1} = c_1 \\
\alpha_2 &= -6\alpha_1 = 24c_1 \\
\alpha_2 &= \underbrace{3\beta_0 + 6\beta_1 + \beta_2}_{\beta_1 = c_2} = 24c_1 \\
\beta_2 &= 21c_1 - 6c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= e^t \begin{pmatrix} c_1 \\ -4c_1 t + c_2 \\ 24c_1 t + 21c_1 - 6c_2 \end{pmatrix} \\
&= c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 24t + 21 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

אזי הפתרון ההומוגני יהיה

$$
x = u + c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

10.2.5 נניח שהפתרון

$$
x(t) = \left(\vec{a}t + \vec{b}\right) e^{\alpha t}
$$

כיוון ש-$x'(t) = x(t)$, נובח כי

$$
\left(\vec{a} + \alpha\left(\vec{a}t + \vec{b}\right)\right) \cancel{e}^{\alpha t} = A\left(\vec{a}t + \vec{b}\right) \cancel{e}^{\alpha t}
$$

נבצע השוואת מקדמים ונקבל:

$$
A\vec{a} = \alpha\vec{a}
$$

ולכן α הוא ערך עצמי של A שמתאים לוקטור העצמי $\vec{a}$. ונותר למצוא רק את b. שובת על ידי השוואת

מקדמים

$$
\begin{aligned}
\vec{a}+\alpha\vec{b} &= A\vec{b}\\
(A-\alpha I)\,\vec{b} &= \vec{a}\\
\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\3&6&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\-1\\6\end{pmatrix}\\
0 &= 0\\
-4b_1 &= -1\\
3b_1+6b_2+b_3 &= 6\\
b_1 &= \frac{1}{4}\\
b_3 &= \frac{21}{4}-6b_2
\end{aligned}
$$

אזי

$$
\begin{aligned}
b &= \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ b_2\\ \frac{21}{4}-6b_2\end{pmatrix}\\
&= b_2\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\21\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

אזי

$$
x_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}t+\left(\begin{pmatrix}1\\0\\21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}b_2\right)e^t \quad = \quad \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-6\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}1\\0\\21\end{pmatrix}\right)e^t
$$

10.3 הריבוי האלגברי = ריבוי הגיאומטרי

$$
\vec{X}' = \begin{pmatrix}4&-1&-1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\vec{X}
$$

מוצאים ע"ע, 2,3,3

נמצא וקטור עצמי עבור $\lambda_1=2$, ונקבל את הוקטור:

$$
\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}
$$

כעת, נחפש וקטור עצמי עבור $\lambda_2 = 3$, מריבוי 2.

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\,\vec{v_2} &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
v_1 - v_2 + v_3 &= 0 \\
v_1 &= v_2 + v_3 \\
\begin{pmatrix} v_2 + v_3 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_3 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= v_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$x_n = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10.4 מערכת משוואות אי הומוגנית

$$\vec{X}'(t) - A\vec{X} = B(t)$$

10.4.1 ואריאצית הפרמטר

מוצאים פתרון למערכת ההומוגנית

$$\vec{X_n} \quad = \quad c_1\vec{X_1} + \ldots + c_n\vec{X_n}$$

ולאחר מכן מחפשים פתרון פרטי מהצורה

$$\vec{X_P} = C_1\,(t)\,\vec{X_1} + \ldots + c_n(t)\vec{X_n}$$

על ידי הדרישה כי

$$c_!(t)\vec{X_1} + \ldots + c_n'(t)\vec{X_n} = B(t)$$

ואז $\vec{X_c} = \vec{X_h} + \vec{X_p}$.

דוגמה

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{X} + \begin{pmatrix} 16te^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית, פותרים את המשוואה ההומוגנית:

$$\vec{X_h} = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לאחר מכן, מוצאים פתרון מהצורה

$$\vec{X}_P = c_1(t)e^{-et}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + c_2(t)e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

על ידי הדרישה כי

$$c_1'(t)e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + c_2'(t)e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16te^t\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}c_1'(t)e^{-3t} + 2c_2'(t)e^{2t} &= 16te^t\\ -2c_1'(t)e^{-3t} + c_2'(t)e^{2t} &= 0\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}c_1'(t) &= \frac{16}{5}te^{4t}\\ c_2'(t) &= \frac{32}{5}te^{-t}\end{aligned}$$

על ידי אינטגרציה, נקבל ש-

$$\begin{aligned}c_1(t) &= \frac{1}{5}e^{4t}\left(4t-1\right)\\ c_2(t) &= -\frac{32}{5}e^{-t}\left(t+1\right)\end{aligned}$$

ולכן, עלפי המשוואה,

$$\begin{aligned}\vec{X}_p &= \frac{1}{5}e^{45}\left(4t-1\right)e^{-3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - \frac{32}{5}e^{-t}\left(t+1\right)e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\ &= e^t\begin{pmatrix}-12t-13\\-8t-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

10.4.2 פתרון בשיטת השוואת מקדמים

$$\vec{X}_P = \begin{pmatrix}a_1t+b_1\\c_1t+d_1\end{pmatrix}e^{\lambda t}$$

כאשר λ איננו הערך העצמי של המטריצה A.

$$\begin{aligned}\vec{X}_P &= \begin{pmatrix}a_1t+b_1\\c_1t+d_1\end{pmatrix}e^t\\ \vec{X}_P' &= \begin{pmatrix}a_1t+a_1+b_1\\a_2t+a_2+b_2\end{pmatrix}e^t\end{aligned}$$

ונציב במשוואה:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_1t+a_1+b_1\\a_2t+a_2+b_2\end{pmatrix}e^t &= \begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1t+b_1\\c_1t+d_1\end{pmatrix}e^t+\begin{pmatrix}16t\\0\end{pmatrix}e^t\\ \begin{pmatrix}a_1t+a_1+b_1\\a_2t+a_2+b_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1t+b_1\\c_1t+d_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}16t\\0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}a_1t+a_2+b_1\\a_2t+a_2+b_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a_1t+b_1+2a_2t+2b_2+16t\\2a_1t+2b_1-2a_2t-2b_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

נבצע השוואת מקדמים:

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1+2a_2+16\\ a_1+b_1 &= b_2+2b_2\\ a_2 &= 2a_1-2a_2\\ a_2+b_2 &= 2b_1-2b_2\end{aligned}$$

פותרים את המשוואות ומקבלים

$$\begin{aligned}a_1 &= -12\\ b_1 &= -6\\ a_2 &= -8\\ b_2 &= -13\end{aligned}$$

ולכן $X_P=\begin{pmatrix}-12t-13\\-8t-6\end{pmatrix}e^t$

11 פתרון משוואות ליניאריות באמצעות טורים

11.1 תרגיל

$$y''-2xy'+\lambda y=0$$

יש למצוא פתרון סביב $x_0=0$.

נניח כי $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$$\begin{aligned}y' &= \sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}\\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\left(n-a\right)a_nx^{n-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(n-a)\,a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\,a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)\,a_{n+2} - 2n a_n + \lambda a_n\right]x^n &= 0 \\
(n+1)(n+2)\,a_{n+2} - 2n a_n + \lambda a_n &= 0 \\
a_{n+2} &= \frac{2n-\lambda}{(n+1)(n+2)}\cdot a_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-\lambda}{2}a_0 \quad n=0 \\
a_3 &= \frac{2-\lambda}{6}a_1 \quad n=1 \\
a_4 &= \frac{4-\lambda}{12}\cdot a_2 = \frac{4-\lambda}{12}\cdot\frac{-\lambda}{2}a_0 \\
a_5 &= \frac{6-\lambda}{20}\cdot\frac{2-\lambda}{6}\cdot a_1 \\
y &= a_0 + a_1 x - \frac{\lambda}{2}a_0 x^2 + \frac{2-\lambda}{6}a_1 x^3 + \ldots \\
&= a_0\left(1-\ldots\right) + a_1\left(x+\ldots\right)
\end{aligned}$$

$\lambda = 10, \lambda(0) = 0, \lambda'(0) = 3$. לחשב את $y(\frac{1}{2})$.

11.2 עוד תרגיל

$$y'' - xy' - y = 0$$

יש למצוא פתרון סביב $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\
y' &= n a_n (x-1)^{n-1} \\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,a_n (x-1)^{n-2}
\end{aligned}$$

נציב במשוואה

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n\left(x-1\right)-x\sum_{n=0}^{\infty} na_n\left(x-1\right)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-1\right)^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n\left(x-1\right)^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} na_n\left(x-1\right)^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-1\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-1\right)^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}\left(x-1\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}\left(x-1\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty} na_n\left(x-1\right)^n & \\
-\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-1\right) &= 0\\
\left(n+1\right)\left(n+2\right)a_{n+2}-\left(n+1\right)a_{n+1}-\left(n+1\right)a_n &= 0\\
a_{n+2} &= \frac{a_n+a_{n+1}}{n+2}
\end{aligned}$$

11.3 קבע את רדיוס ההתכנסות

של הטור הפוטר את המשוואה בנקודות $x_0=0$ ו-$x_0=\frac{1}{2}$.
נמצא את השורשים של $x^2+1=0$, הם $\pm i$.
ותחום ההתכנסות הוא $|x|<1$.

12 פתרון משוואות באמצעות טורים בקרבת נקודה סינגולרית רגולרית

כאשר $P(x_0)\neq 0$, הנקודה x_0 רגולרית.
כאשר $P(x_0)=0$ הנקודה x_0 **סינגלריות**.
כאשר $P(x_0)=0$ אבל

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)\frac{Q(x)}{P(x)} &< \infty\\
\lim_{x\to x_0}\left(x-x_0\right)^2\frac{R(x)}{P(x)} &< \infty
\end{aligned}$$

הנקודה מכונה **סינגולרית-רגולרית**.
במקרה זה, נניח כי הפתרון מהצורה $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^{n+r}$.

12.1 תרגיל

$$2x^2y''+x\left(2x+1\right)y'-y = 0$$

נפתח **סביב** $x_0=0$.
ברור כי-$P(x_0)=0$. נראה כי זוהי נקודה **סינגולרית** רגולרית:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{xx\left(2x+1\right)}{2x^2} &= \frac{1}{2}\\
\lim_{x\to 0}x^2\frac{-1}{2x^2} &= -1
\end{aligned}$$

לכן זוהי נקודה סינגולרית רגולרית.

נניח כי הפתרון מהצורה

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\ y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+r-1} \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\,(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2} \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} 2\,(n+r)\,(n+r-1)\, a_n x^{n+r} \\ + & \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2\,(n+r)\, a_n x^{n+r+1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r-1)a_{n-1}x^{n+r}} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r} \\ - & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \\ = & \; 2r\,(r-1)\, a_0 x^r + r a_0 x^r - a_0 x^r \\ + & \sum_{n=1}^{\infty} \left(2\,(n+r)\,(n+r-1)\, a_n + 2\,(n+r) + a_n + (n+r)\, a_n - a_n\right) x^{n+r} \\ = & \; 0 \\ 0 = & \left(2r^2 - r - 1\right) a_0 x^r = 0 \\ & r = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

כמו כן, מתקבלת נוסחאת הנסיגה:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-2}{2n+2r+1} a_{n-1} \\ r_1 = 1 &\rightarrow a_n = \frac{-2}{2n+3} a_{n-1} \\ r_2 = -\frac{1}{2} &\rightarrow a_n = \frac{-2}{2n} a_{n-1} \\ y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

אם $r_1 = r_2$, $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_1 \ln x$.

12.2 משוואת בסל

משוואה מהצורה

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - v^2\right) y = 0$$

נפטור עבור $v=0$, סביב $x_0=0$.

$$\begin{aligned} x^2y''+xy'+x^2y &= 0 \\ y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \end{aligned}$$

נגזור כמקודם, ונציב במשוואה:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+r-1)a_n x^{n+1} \\ + & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} \\ + & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+r-1)a_n x^{n+1} \\ + & \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} \\ + & \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n+r} = 0 \\ & (r(r-0)a_0x^r + ra_0x^r) + r(r+1)a_1x^{r+1} + (r+1)a_a \\ + & \sum_{n=2}^{\infty} \left((n+1)(n+r-1)a_n x^{n+1} + (n+r)a_n x^{n+r} + a_{n-1}x^{n+r}\right) \\ r^2=0 \quad \rightarrow \quad & r=0 \end{aligned}$$

מריבוי 2. על פי המשוואה, $a_1=0$. ולפי הטור,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$$