משוואות דיפרנציאליות רגילות - ח

מרצה: דניאלה אבידן

סמסטר אביב, 2004

תקציר

הוקלד על ידי רונן אברבנאל. הערות, תיקונים והצעות ל- ronen@tx.technion.ac.il.
עדכונים, במידה ויהיו, ניתן למצוא ב- www.technion.ac.il/~ronen

תוכן עניינים

1 מבוא

הגדרה 1.1 משוואה דיפרנציאלית היא משוואה שהנעלם בה היא פונקציה המופיעה במשוואה יחד עם נגזרותיה.

$$f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \tag{1}$$

הגדרה 1.2 סדר של משוואה - סדר הנגזרת הגבוהה ביותר שבמשוואה.

לדוגמה: $x^3y^4 + y'' \tan x = x^7$, משוואה מסדר שני.

הגדרה 1.3 פתרון של משוואה באינטרול (α, β) הוא פונקציה $y = y(x)$ המקיימת:

1. $y(x)$ מקיימת את המשוואה ב-(α, β)
2. $y(x)$ היא פונקציה בעלת n נגזרות רציפות ב-(α, β). סימון: $y \in C^n(\alpha, \beta)$

דוגמה:

$$\begin{aligned} y' &= f(x) \\ y' &= \int^x f(t)dt + c \end{aligned}$$

כאשר $\int^x f(t)dt$ הוא נציג ממשפחת כל הפונקציות הקדומות.
נניח $y' = x$

$$y(x) = \int^x tdt + c = \frac{x^2}{2} + c$$

זוהי משפחת פתרונות חד-פרמטרית. אם בנוסף, נתון תנאי התחלה, למשל $y(1) = 2$, אז נציב ונקבל $2 = \frac{1}{2} + c \to c = \frac{2}{3}$.

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$$

וזהו פתרון בעיית ההתחלה. זו עקומה אחת מכל המשפחה.

דוגמה

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -g \\ \frac{dx}{dt} &= \int^t -g dt + c_1 \\ \frac{dx}{dt} &= -gt + c_1 \\ x(t) &= \int^t (-gt+c_1)\, dt + c_2 \\ x(t) &= -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

כאן יש משפחה דו פרמטרית של פטרונות למשוואה מסדר שני.

בפרט, אם נצרף תנאי התחלה, למשל: $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \frac{dx}{dt}(0) = v(0) = v_0 \end{cases}$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

הערה 1.4 למשוואה דיפרנציאלית מסדר n, מתאימה משפחת פתרונות n-פרטמטרית (בתנאי שיש פתרון).

גם ההפך נכון - בהנתן משפחה n פרמטרית, מתאימה לה משוואה דיפרנציאלית מסדר n, כך שהמשפחה מהווה את פתרונותיה.

דוגמה: שחזר את המשוואה הדיפרנציאלית, שמשפחת פתרונותיה היא משפחת כל הישרים במישור העוברים בראשית הצירים.

המשפחה היא $y = cx$, והיא חד-פרמטרית.

$$\begin{aligned} y &= cx \\ y' &= c \\ y &= y'x \end{aligned}$$

הצבנו את ה-c, משום שמשוואה דיפרנציאלית אינה תלויה בפרמטר.

1.0.1 מטרות הקורס

1. דרכי פתרון (טכניקה)
2. האם קיים פתרון למשוואה נתונה? (קיום)
3. האם הפתרון שנמצא הוא היחיד? (יחידות)

1.0.2 משוואות דיפרנציאליות לינאריות

הגדרה 1.5 משוואה לינארית מנורמלת מסדר n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2}$$

.

אנו מעוניינים בפתרון באינטרוול (α, β) ובו כל המקדמים רציפים.

הגדרה 1.6 אם $g(x) \equiv 0$, המשוואה נקראית לינארית-הומוגנית.

טענה 1.7 אגף שמאל של 6 הוא למעשה ט"ל $L : C^n(\alpha, \beta) \to C(\alpha, \beta)$ (משום ש-$L(y) = g(x)$).

הוכחה: יש להוכיח כי מתקיים:

1. $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$
2. $L(\alpha y) = \alpha L(y)$

הוכחה: נוכיח את 1.

$$\begin{aligned} L(y_1+y_2) &= (y_1+y_2)^{(n)} + a_{n-1}(y_1+y_2)^{n-1} + \\ & \ldots + a_1(y_1+y_2)' + a_0(y_1+y_2) = \\ &= y_1^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \\ & \ldots + a_1 y_1' + a_0 y_1 + y_2^{(n)} + \ldots a_0 y_2 = \\ &= L(y_1) + L(y_2) \end{aligned}$$

■

■

משפט 1.8 הפתרון הכללי של משוואה לינארית הוא סכום של 2 חלקים: סכום של פתרון פרטי 1 ופתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה. עבור y כללי, y_p פרטי ו-y_c פתרון של ההומוגנית:

$$y = y_c + y_p$$

הוכחה: נסמן $L(y) = g(x)$,

ראשית נראה כי $L(y)$ אכן פותר את המשוואה.

$$\begin{aligned} L(y_c) &= 0 \\ L(y_p) &= g(x) \\ L(y_c + y_p) &= L(y_c) + L(y_p) = g(x) \end{aligned}$$

שנית, נראה כי כל פתרון של המשוואה ניתן לתיאור כאיבר בסכום $y_c + y_p$.

יהי y_0 פתרון כלשהו של

$$\begin{aligned} L(y_0) &= g(x) \\ L(y_p) &= g(x) \\ L(y_0) - L(y_p) &= 0 \\ L(y_0 - y_p) &= 0 \\ y_0 - y_p &\in y_c \\ y_0 &\in y_c + y_p \end{aligned}$$

.

■

2 פתרון משוואות מסדר ראשון

2.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

2.1.1 ווריאצית הפרמטר

$$y' + p(x)y = g(x) \tag{3}$$

מניחים כי $p(x), g(x)$ רציפות באינטרול משותף (α, β).

שלב א' פתרון המשוואה ההומוגנית $y' + p(x)y = 0$

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= 0 \\ y' &= -p(x) / : y (y \neq) \\ \frac{y'}{y} &= -p(x) \\ \int \frac{y'}{y} dx &= \int -p(x) dx \\ \ln|y(x)| &= \int^x -p(x)dx + c_1 \\ |y(x)| &= e^{-\int^x p(x)dx} \cdot e^{c_1} \\ & e^{c_1} = c_2 > 0 \\ y(x) &= \pm c_2 e^{-\int^x p(x)dx} \\ &= c \cdot e^{-\int^x p(x)dx} \end{aligned}$$

נוסיף גם את המקרה של $c = 0$, ונקבל למעשה c כלשהו, כי רוצים גם פתרון $y \equiv 0$.

$$y_c = c \cdot e^{-\int^x p(x)dx}$$

שלב ב' נמצא את y_p,
נציע $y_p = c(x)\cdot e^{-\int^x p(x)dx}$.
זוהי שיטת ואריאצית הפרמטר.
נציב הצעה זו במשוואה $y' + p(x)y = g(x)$

$$\begin{aligned}
y_p' &= c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) \\
p(x)y_p &= y_p' + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} \\
g(x) &= c'(x)e^{-\int p(x)dx} \\
c'(x) &= g(x)e^{\int p(x)dx} \\
c(x) &= \int g(x)e^{\int p(x)dx}dx
\end{aligned}$$

נציב את $c(x)$ בהצעה לפתרון,

$$y_p(x) = e^{-\int p(x)dx}\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

שלב ג' $y = y_c + y_p$

דוגמה פתור את המשוואה: $xy' + y = x$ $(x \neq 0)$
שלב א', נמצא את y_c, פתרון ההומוגנית

$$\begin{aligned}
xy' + y &= 0 \\
xy' &= -y| : x, : y \\
\frac{y'}{y} &= -\frac{1}{x} \\
\ln|y(x)| &= -\ln|x| + \ln|c_1|\ (c_1 \neq 0) \\
|y(x)| &= \left|\frac{c_1}{x}\right| \\
y(x) &= \pm\frac{c_1}{x} = \frac{c}{x}
\end{aligned}$$

שלב ב', נמצא את y_p בשיטת ואריאצית הפרמטר
נציע:

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{c(x)}{x} \\
x\left(\frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}\right) + \frac{c(x)}{x} &= x \\
c'(x) &= x \\
c(x) &= \int xdx = \frac{x^2}{2}(+d) \\
y_p &= \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}(+\frac{d}{x})
\end{aligned}$$

הפתרון הפרטי הוא $y_p = \frac{x}{2}$.
ניתן להשמיט את ה-d כי הפתרון הוא פתרון פרטי, ולא כללי.
שלב ג' - חיבור

$$y = y_c + y_p = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}$$

2.1.2 משפט קיום ויחידות למשוואה לינארית מסדר ראשון

משפט 2.1 נתונה המשוואה $y' + p(x)y = g(x)$ שמקדמיה רציפים ב-(α,β) ונניח ש-$x_0 \in (\alpha,\beta)$.
אזי קיים למשוואה פתרון אחד ויחיד המקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$ (כש-y_0 כלשהו).

עקרון הגלובליות פתרון זה קיים בכל אינטרול הרציפות (α,β) לפחות.

לדוגמה: הסבר מדוע לא יתכן שהפונקציה $y = x - 1$ מהווה פתרון של משוואה לינארית הומוגנית שמקדמיה רציפים ב-$(-2,7)$.
ראשית נשים לב שלכל משוואה לינארית הומוגנית קיים תמיד הפתרון הטרוויאלי $y = 0$.

אזי, לפי משפט היחידות, על כל פתרון אחר של המשוואה אסור לחתוך את העקומה $y=0$ (ציר ה-x) באינטרוול הנתון. הפתרון $y=x-1$ אינו מקיים את התנאי הנ"ל, ולכן אינו יכול להיות פתרון תקף. כלומר, לו $y=x-1$ היה גם פתרון, היינו מקבלים 2 פתרונות המקימים תנאי התחלה ב-$x_0=1$ כש-$x_0=1\in(-2,7)$.

משפט קיום ויחידות מבטות פתרון יחיד דרך כל נקודה (x_0,y_0) כש:$x_0\in(-2,7)$ (או באופן כללי, (α,β))

הדוגמה מהשיעור הקודם

$$\begin{aligned} xy' &= y+x \\ y'+\frac{1}{x}y &= 1 \end{aligned}$$

הפתרון הכלי $y=\frac{c}{x}+\frac{x}{2}$. עם תנאי התחלה $y(1)=2$, נקבל $c=\frac{3}{2}$, ואת הפתרון הפרטי $y=\frac{3}{2x}+\frac{x}{2}$. הפתרון קיים בכל אינטרול הריציפות, הוא $(0,\infty)$.

לו היינו מציבים תנאי התחלה אחת, $y(1)=\frac{1}{2}$, היינו מקבלים $c=0$, המשוואה היא $y=\frac{x}{2}$, והפתרון קיים לכל x.

2.2 משוואות שניתן להפוך ללינאריות

2.2.1 משוואת ברנולי

$$y'=p(x)y=g(x)\cdot y^n, n\in\mathbb{R} \tag{4}$$

מקרים פרטיים

1. $n=1$, המשוואה לינארית הומגנית, $y'+y\left(p(x)-g(x)\right)=0$, פתרונה ידוע.
2. $n=0$, משוואה לינארית רגילה, $y'+yp(x)=g(x)$, פתרונה ידוע.
3. $\forall n>0$, קיים הפתרון הטרוויאלי $y\equiv 0$.

פתרון כללי נחלק ב-y^n (בהנחה ש-$y\neq 0$) ונקבל

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)y^{1-n}=g(x)$$

נציב $z(x)=y^{1-n}(x)$. $z'(x)=(1-n)\,y^{-n}y'$, וכן $\frac{y'}{y^n}=\frac{z'(x)}{1-n}$. נציב במשוואה ונקבל

$$\frac{z'(x)}{1-n}+p(x)\cdot z(x)=g(x)$$

וזוהי משוואה לינארית ב-$z(x)$, אותה פותרים כמשוואה לינארית, וחוזרים ל-y.

2.2.2 משוואת ריקטי

$$y'+p(x)y=g(x)+d(x)\cdot y^2 \tag{5}$$

מקרים פרטיים

1. $d(x)=0$, נקבל משוואה לינארית רגילה.
2. $g(x)=0$, מתקבלת משוואת ברנולי עבור $n=2$.

מקרים אחרים נניח שידוע פתרון פרטי אחד, $y_y(x)$.
ניתן להציע פתרון $y=y_1(x)+v(x)$, ומציבים אותו למשוואה

$$y_1'+v'+p(x)y_1+p(x)v=g(x)+d(x)y_1^2+2d(X)y_1v+d(x)v^2 \tag{6}$$

אבל y_1 פתרון, ולכן הוא מקיים את המשוואה.

$$y_1'+p(x)y_1=g(x)+d(x)\cdot y_1^2$$

ונקבל ממשוואה 6.

$$v'+v\left(p(x)-2d(x)y_1\right)=d(x)\cdot v^2x$$

והגענו למשוואת ברנולי ב-v, שפתרונה ידועה.

דרך חליפית ניתן גם להציע $y = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$, כאשר $z(x)$ לא ידועה. מציבים ומקבלים משוואה לינארית ב-$z(x)$.

הערה 2.2 בשיטה זו, יש לקחת בחשבון שיש להוסיף את הפתרון $y_1(x)$, שאינו כלול בביטוי הכללי.

2.3 משוואות לא לינאריות

2.3.1 משואה פרידה

משוואה שאותה ניתן לבטא כ:

$$y' = F(x) \cdot G(y) \tag{7}$$

ואז נרשום

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= F(x)G(y) \\ \frac{dy}{G(y)} &= F(x)dx \\ \int \frac{dy}{G(y)} &= \int F(x)dx + C \end{aligned}$$

נניח כרגע שהמכנים שונים מאפס, ונבדוק אותם בסוף.

דוגמה פתור:

$$\begin{aligned} \left(x^2+1\right)\left(y^2-1\right)dx + xydy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{(x^2-1)(y^2-1)}{xy} \\ \frac{y}{y^2-1}dy &= \left(-x-\frac{1}{x}\right)dx + C \quad (y \neq \pm 1, x \neq 0) \\ \int \frac{y}{y^2-1}dy &= \int \left(-x-\frac{1}{x}\right)dx + C \\ \frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| &= -\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C \end{aligned}$$

וזוהי גרסא ראשונה לפתרון הכללי.

נבדוק את הפתרונות שהסרנו, ונראה כי $y = \pm 1$ הוא פתרון, משום שהוא מקיים את המשוואה, והוא אינו כלול הפתרון הכללי.

פתרון כזה, שאינו ניתן ע"י הביטוי הכללי, מכונה פתרון סינגולרי.

$$y = \pm 1$$

נבדוק את $x = 0$, ונראה שגם הוא מאפס את המשוואה. הוא לא נובע מהפתרון הכללי עבור שום ערך מספרי של C ולכן גם $x \equiv 0$ הוא פתרון סינגולרי.

הגדרה 2.3 פתרון סינגולרי הוא פתרון הנוסף לפתרון הכללי.

נניח שהמשכנו לפתח את הפתרון הכללי, גרסה I.

$$\begin{aligned} \ln\left|y^2-1\right| &= -x^2 - \ln x^2 + C \\ \left|y^2-1\right| &= \frac{e^{-x^2}}{x^2}C \end{aligned}$$

וזוהי הגרסא השניה של הפתרון. בפתרון זה, $y = \pm 1$ מתקבל עבור $C = 0$. והוא אינו פתרון סינגולרי.

כאשר בפיתוח ראשוני של המשוואה, $C > 0$, משום ש-$e^c > 0$, אבל ניתן להרחיב את C לכל $\mathbb{R}$ על ידי הפטרות מהערך המוחלט, ובדיקת הפתרונות הסינגולריים.

2.3.2 משפט קיום ויחידות של משוואה כללית מסדר ראשון

אין צורך להפעילו על משוואה לינארית, משום שקיים משפט חזק יותר

משפט 2.4 נתונה המשוואה $y' = f(x, y)$.

נניח ש-$f(x,y)$ ו-$\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות במלבן $\begin{cases} \alpha < x < \beta \\ \gamma < y < \delta \end{cases}$ המכיל את (x_0, y_0) נקודה פנימית,

אזי קיים למשוואה הנ"ל פתרון אחד ויחיד המקיים גם את תנאי ההתחלה $y(x_0) = y_0$.

עקרון הלוקאליות פתרון זה קיים באינטרול מסויים, (x_0-h, x_0+h) שמוכל ב-(α, β), לאו דווקא בכל אינטרול הרציפות (α, β).

הוכחה: ההוכחה מכונה שיטת פיקארד (Picard), והיא לא תובא במסגרת קורס זה. ■

דוגמאות פתור: $\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$. המשוואה פרידה ונרשום

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^{\frac{1}{3}}} &= \int dx + C \quad (y \neq 0) \\ \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} &= x + c \\ y^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} \cdot (x + c) \end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{3}(0 + c) \\ \Rightarrow \quad & c = 0 \end{aligned}$$

נמצא את כל הפתרונות בצורה מפורשת:

$$\begin{aligned} y^{\frac{2}{3}} &= \frac{2}{3} \cdot x \\ y &= \pm \left(\frac{2}{3} \cdot x \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

כמו כן, אם נציב $y = 0$, נראה שגם הוא פתרון (סינגולרי...).
יש כאן שלושה פתרונות...
הסיבה לריבוי הפתרונות

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^{\frac{1}{3}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

הנגזרת החלקית לא רציפה עבור במלבן המקיף את $(0,0)$, בכל נקודה שעל ציר x, ועל כן תנאי היחידות אינו מתקיים.

דוגמה שניה

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

משוואה פרידה שפתרונה, לאחר הצבת תנאי התחלה, $y = -\frac{1}{x-1}$. הפונקציה רציפה בכל המישור, כמו גם הנגזרת החלקית לפי y, והפתרון, ע"פ עקרון הלוקאליות, קיים רק ב-$(-\infty, 1)$.

המלצה לתרגילים: 1-5,9
6-8,10,11,12

2.3.3 משווה פרידה - צורה נוספת

$$y' = f(ax + by + c) \tag{8}$$

נציב:

$$\begin{aligned} z(x) &= ax + by + c \\ z'(x) &= a + by' = a + b \cdot f(z) \end{aligned}$$

וזו משוואה פרידה ב-x ו-z.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{a + b \cdot f(z)} &= dx \quad (a + b \cdot f(z) \neq 0) \\ \int \frac{dz}{a + b \cdot f(z)} &= \int dx + c \end{aligned}$$

לדוגמה

$$y' = (x + y)^2$$

נציב:

$$\begin{aligned} z &= x+y \\ \frac{dz}{dx} &= 1+y' = 1+(x+y)^2 = 1+z^2 \\ \frac{dz}{1+z^2} &= dx \\ \int \frac{dz}{1+z^2} &= \int dx + c \\ \arctan z &= x+c \\ \arctan(x+y) &= x+c \end{aligned}$$

אם דרוש למצוא את y בצורה מפורשת

$$\begin{aligned} x+y &= \tan(x+c) \\ y &= \tan(x+c) \end{aligned}$$

הערה 2.5 כשנתונה בעיית התחלה, יש לעיטים להשגיח במיוחד בבחירת הענף המתאים של הפתרון.

לדוגמה מצא פתרון בצורה מפורשת לבעיית ההתחלה:

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ y(0) &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int y dy &= -\int x dx + c_1 \\ \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + c_1 \\ y^2 &= -x^2 + c \end{aligned}$$

לפי תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} 4 &= 0+c \\ c &= 4 \\ y &= \pm\sqrt{4-x^2} \\ y(0) &= -2 \end{aligned}$$

נדגיש שרק אחד מהפתרונות של y נכון, וזה נקבע לפי תנאי ההתחלה.

2.3.4 משוואות מדויקות

דוגמה נתון מעגל, נגזור את שני אגפיו לפי x.

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= c \\ \frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right) &= \frac{d}{dx}(c) \\ 2x+2y\frac{dy}{dx} &= c \end{aligned}$$

עבור משוואה כללית

$$\psi(x,y)' = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

אם נתונה המשפחה

$$\psi(x,y) = c$$

ע"מ למצוא משוואה דיפרנציאלית שאלו פתרונותיה, נגזור את ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} &= 0 \\ M(x,y)+N(x,y)y' &= 0 \\ M(x,y)dx+N(x,y)dy &= 0 \end{aligned}$$

אם קיימת $\psi(x,y)$ כך ש:

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ N(x,y) &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{aligned}$$

אז פתרון המשוואה הוא $\psi(x,y)=c$.

הגדרה 2.6 נתונה המשוואה

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{9}$$

אם קיימת פונקציה $\psi(x,y)$ כך שהקשר $\psi(x,y)=c$ מגדיר בהתאמה את y כפונקציה גזירה של x וכך ש:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} & =M(x,y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & =N(x,y) \end{cases}$$

אז המשוואה 9 נקראת משוואה מדויקת, ופתרונה אז יהיה $\psi(x,y)=c$.

משפט 2.7 תהיינה $M(x,y),N(x,y)$, $\frac{\partial M}{\partial y},\frac{\partial N}{\partial y}$ רציפות בתחום (פשוט קשר) D, מש-ואה 9.

אזי המשוואה 9 מדוייקת $\Longleftrightarrow$ $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ (השוויון שמשמאל נקרא תנאי האינטגר-ביליות).

הוכחה: $\Leftarrow$ נראה שתנאי האינטגרביליות הוא הכרחי לכך שהמשוואה מדויקת.

אם היא מדוייקת, יש $\psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{aligned} \frac{\partial(M)}{\partial y} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 y}{2x\partial y}=\frac{\partial(N)}{\partial x} \end{aligned}$$

וזה משפט ידוע מאינפי שלוש (או 2 , או משהו כזה.).

$\Rightarrow$ נראה שתנאי האינטגרביליות מספיק.

נראה שאכן קיימת ψ(שמגדירה את y כפונקציה של x) כך ש:

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x}= & M(x,y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}= & N(x,y) \end{cases}$$

נבנה ψכזו

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \int^x M(x,y)dx+h(y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= N(x,y)=\int^x\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx+h'(y) \end{aligned}$$

יש להוכיח ש-$h(y)$ אכן תלוי רק ב-y. כלומר, נראה ש:

$$N(x,y)-\int\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx$$

אכן תלוי רק ב-y.

מספיק להראות שכשנגזור ביטוי זה לפי x, הנגזרת תתאפס.

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=0$$

■

לדוגמה

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx=+\left(5x^2y+4y^3\right)dy=0$$

האם היא מדויקת?

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy=\frac{\partial N}{\partial x}$$

והיא אכן מדויקת.

נחפש פונקציה ψ כך ש-

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial y} & = 3x^2+6xy^2 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & = 6x^2y+4y^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi\left(x,y\right) &= \int^{x}\left(3x^2+6xy^2\right)dx+h(y) \\ &= x^3+3x^2y^2+h(y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=x^2y+h'(y)$$

אף זהו ה-N של המשוואה, ולכן

$$\begin{aligned} x^2y+h'(y) &= 6x^2y+4y^3 \\ h'(y) &= 4y^3 \\ h(y) &= y^4 \end{aligned}$$

ומתקבל כי

$$\psi(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4=c$$

מה וקרה כשמשוואה איננה מדויקת? ראשית, אם מנסים לכפות עליה אותה שיטת פתרון, מגיעים למבוי סתום.

2.3.5 הבאת משוואה למצב מדויק

לדוגמה

$$\begin{aligned} -ydx &= xdy \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= -1 \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 1\neq -1 \end{aligned}$$

ולכן המשוואה לא מדויקת. ננסה למצוא ψ כך ש-

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} & = -y \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} & = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi &= \int^{x}-ydx+h(y) \\ \psi &= -yx+h(y) \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= -x+h'(y)=x \\ h'(y) &= 2x \end{aligned}$$

ותנאי האינטגרביליות לא מתקיים.

ננסה לכפול את המשוואה ב-$\frac{1}{x^2}$.

$$\begin{aligned} -\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy &= 0 \quad (x\neq 0) \\ \frac{\partial M_0}{\partial y} &= \frac{-1}{x^2}=\frac{\partial N_0}{\partial x} \end{aligned}$$

המשוואה היא מדויקת ופתרונה ידוע, ושווה למפתרון המשוואה המקורית (עד כדי $x=0$)

מטרתינו למצוא גורמי אינטגרציה $\mu=\mu(x,y)$ כך שלאחר הכפלה בהם, המשוואה מדויקת.

$$
\begin{aligned}
\mu\cdot/M(x,y)dx+N(x,y)dy &= 0\\
(\mu M)\,dx+\mu N dy &= 0
\end{aligned}
$$

והמשוואה מדוייקת אם ורק אם מתקיים תנאי אינטגרביליות:

$$\frac{\partial\mu M}{\partial y}=\frac{\partial\mu N}{\partial x}$$

הערה 2.8 נסמן נגזרת חלקית של z לפי x $z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$\mu_y M+\mu M_y=\mu_x N+\mu N_x$$

נטפל במשוואה זו במקרים הפרטיים הבאים:

1. אם $\mu=\mu(x)$ - μ תלוי רק ב-x.

$$
\begin{aligned}
\mu M_y &= \mu'(x)\cdot N+\mu N_x\\
\mu\left(M_y-N_x\right) &= \mu'\cdot N\\
\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} &= \frac{M_y-N_x}{N}
\end{aligned}
$$

אם הביטוי הנ"ל תלוי רק ב-x, אזי ההנחה נכונה וקיים μ כזה.

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}dx &= \int\frac{M_y-N_x}{N}dx\\
\ln|\mu(x)| &= \int\frac{M_y-N_x}{N}dx\\
\mu(x) &= e^{\int\frac{M_y-N_x}{N}dx}
\end{aligned}
$$

2. אם $\mu=\mu(y)$, כלומר, μ התלוי רק ב-y, נקבל

$$
\begin{aligned}
\mu'(y)M+\mu M_y &= \mu N_x\\
\mu\left(M_y-N_x\right) &= -\mu'(y)\cdot M\\
\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} &= -\frac{M_y-N_x}{M}
\end{aligned}
$$

גם כאן, בודקים האם הביטוי אכן תלוי רק ב-y. ואז הנחתינו, כי קיים $\mu=\mu(y)$ נכונה.

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{M_y-N_x}{M}dy}$$

הערה 2.9 באופן מעשי, ניתן לחפש את $\frac{M_y-N_x}{M}$,$\frac{M_y-N_x}{N}$, ואם הוא תלוי אך ורק ב-x או ב-y, אזי μ הוא אחד מהנ"ל.

דוגמה פתור:

$$xdx+\left(x^2+y^2+y\right)dy=0$$

נבדוק תנאי אינטגרציה

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0\neq\frac{\partial N}{\partial y}=2x$$

נבדוק

$$
\begin{aligned}
M_y-N_x &= -2x\\
-\frac{M_y-N_x}{M} &= \frac{-2x}{x}=2
\end{aligned}
$$

ולכן

$$\mu(y)=e^{\int 2dy}=e^{2x}$$

נכפול בגורם האינטגרציה:

$$e^{2y}xdx + e^{2y}\left(x^2+y^2+y\right)dy = 0$$

המשוואה אכן מדויקת כי

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ועכשיו פותרים את המשוואה כמשווה מדיוקת.

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial x} & = e^{2y}x \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & = e^{2y}\left(x^2+y^2+y\right) \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \psi &= \int^x e^{2y}xdx + h(y) \\ &= e^{2y}\frac{x^2}{2} + h(y) \\ e^{2y}\left(x^2+y^2+y\right) &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = e^{2y}x^2 + h'(y) \\ h'(y) &= e^{2y}\left(y^2+y\right) \end{aligned}$$

מבצעים פעמיים אינטגרציה בחלקים ומקבלים

$$h(y) = \frac{e^{2y}\cdot y^2}{2}$$

ולכן

$$\psi(x,y) = \frac{e^{2y}}{2}\left(x^2+y^2\right) = c$$

מקרים אחרים[1] נניח שאין גורם אינטגרציה שתלוי רק ב-x או רק ב-y. כדאי לנסות אולי $\mu=\mu(x,y)$ תלוי בפונקציה נוחה z של x,y.

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \tag{10}$$

במשוואה זו,

$$\begin{aligned} \mu_y &= \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = \mu'(z)\cdot z_y \\ \mu_x &= \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \mu'(z)\cdot z_x \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mu'(z)\cdot z_y M + \mu M_y &= \mu'(z)\cdot z_x N + \mu N_x \\ \mu\left(M_y - N_x\right) &= \mu'(z)\left[z_x N - z_y M\right] \\ \frac{\mu'(z)}{\mu(z)} &= \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M} \end{aligned}$$

ואם אכן הביטוי תלוי רק ב-z, ההשארה נכונה וניתן להמשיך, ומקבלים

$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{z_x N - z_y M}dz}$$

לדוגמה מצא פתרון אם ידוע שיש גורם אינטגרציה שתלוי ב-$x\cdot y$.

$$\begin{aligned} z &= x\cdot y \\ \mu &= \mu(z) \end{aligned}$$

[1]לא באמת בחומר..

$$
\begin{aligned}
\mu_y M + \mu M_y &= \mu_x N + \mu N_x \\
\mu_y &= \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \mu'(z) \cdot x \\
\mu_y &= \frac{d\mu}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \mu'(z) \cdot y
\end{aligned}
$$

בחוברת 11

13,14

16 - בשיטה אחת בלבד

2.4 משוואה הומוגנית

אם $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ אז המשוואה תקרא משוואה דיפרנציאלית הומוגנית.

לדוגמה

$$y' = \frac{4x^3 - 2y^2x}{7yx^2}$$

בכל מחובר יש אותה חזקה, ועל כן ניתן להפוך את המשוואה להומוגנית על ידי חלוקת מונה ומכנה ב-x^3.

$$y' = \frac{4 - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{7\frac{y}{x}}$$

הגדרה 2.10 אומרים ש-$f(x,y)$ היא פונקציה הומוגנית מסדר h אם לכל λ (פונקציה או מספר) מתקיים

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^h f(x,y)$$

טענה 2.11 אם $y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ כש-$M(x,y), N(x,y)$ פונקציות הומוגניות מאותו סדר h, אז המשוואה הדיפרנציאלית היא הומוגנית (כלומר, ניתן לרשום אותה כ-$y' = \varphi(\frac{y}{x})$).

הוכחה: נתבונן במנה $t(x,y) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$.

$$t(\lambda x, \lambda y) = \frac{M(\lambda x, \lambda y)}{N(\lambda x, \lambda y)} = \frac{\lambda^h M(x,y)}{\lambda^h N(x,y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

קיבלנו שהמנה היא פונקציה הומוגנית מסדר 0.
בפרט, נציב: $\lambda = \frac{1}{x}$.

$$y' = t(x,y) = t(1, \frac{y}{x})$$

וזוהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית. ■

2.4.1 טכניקת הפתרון

נציב $\frac{y}{x} = v(x)$ ונחזור למשוואה הדפרנציאלית הנתונה $y' = F(\frac{x}{y})$, ומתקבל

$$
\begin{aligned}
y &= v(x)x \\
y' &= v'x + v \\
v'x + v &= F(v)
\end{aligned}
$$

ומתקבלת משוואה פרידה ב-F ו-v.

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dx}x &= F(v) - v \\
\int \frac{dv}{F(v) - v} &= \int \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

ויש לבדוק $F(v) - v \neq 0$, $x \neq 0$.

2.4.2 דוגמה

פתור $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$, כאשר $x > 0$.

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

הכנסה זו ניתן לבצע רק כאשר $x > 0$. כאשר x כללי, יש להפריד למקרים, עבור $x > 0$ ועבור $x < 0$.

$v = \frac{y}{x}$,

$$\begin{aligned} v'x + v &= \sqrt{1 - v^2} + v \\ (x \neq \pm 1) \quad \int \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} &= \int \frac{dx}{x} + c \\ \arcsin v &= \ln x + c \\ \arcsin \frac{y}{x} &= \ln x + c \end{aligned}$$

ואם ברצוננו להביא את המשוואה לצורה מפורשת,

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \sin(\ln x + c) \\ y &= x \sin(\ln x + c) \end{aligned}$$

נבדוק פטרונות סינוגלריים:

$\frac{x}{y} = v = 1$, כלומר, $y = x$.

$$x \cdot 1 = \sqrt{x^2 - x^2} + x = x$$

וזהו פטרון סינגולרי.

האם הוא נובע מהכללי עבור c קבוע מסויים?

$$\begin{aligned} x &=? \quad x \sin(\ln x + c) \\ \sin(\ln x + c) &= 1 \\ c &= \frac{\pi}{2} - \ln x \end{aligned}$$

וזהו c שתלוי ב-x, ולכן אינו קבוע, והפטרון הוא באמת סינגולרי.

באופן דומה, ניתן להראות כי $y = -x$ הוא פטרון סינגולרי.

2.5 משפחות אורטוגונליות (ניצבות)

נתונה משפחה של עקומות $\varphi_1(x, y) = c$. מבוקשת משפחה שניה $\varphi_2(x, y) = c$ כך שבכל נקודת פגישה של נציג מ-φ_1 ונציב מ-φ_2 מתקבלת זווית ישרה.

2.5.1 התהליך

$$\varphi_1(x, y) = c$$

1. משחזרים את המשוואה הדיפרנציאלית שאלה פתרונותיה. משווה זו היא מבדר ראשון והיא נטולת קבוע (c).
2. דורשים ש-$y_2' = -\frac{1}{y_1'}$.
3. פוטרים את המשוואה הדיפרנציאלית שהתקבלה.

2.5.2 דוגמאות

פרבולות נסתכל על המשפחה $y = cx^2$.

1. נגזור ונקבל $y' = 2cx$. משתי המשוואות, נחלץ את ה-c ונקבל

$$\begin{aligned} y' &= 2\frac{y}{x^2}x \\ y' &= \frac{2y}{x} \end{aligned}$$

2. נדרוש

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

זו המשוואה של המשפחה הניצבת.

3. זוהי משוואה פרידה, ונפטור אותה.

$$\begin{aligned}
\int y dy &= -\int \frac{x}{2}dx + c \\
\frac{y^2}{2} &= -\frac{x^4}{2} = c \\
\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2} &= c
\end{aligned}$$

זוהי משפחת אליפסות.

מעגלים נמצא את המשפחה הניצבת למשפחת המעגלים שמרכזיהם על ציר x והם משיקים לציר y.

כלומר, מעגלים שמרכזם ב-$(c,0)$ ורדיוסם c.

$$\begin{aligned}
(x-c)^2+y^2 &= c^2 \\
2(x-c)+2yy' &= 0 \\
c &= x+yy' \\
x^2-2xc+c^2+y^2 &= c^2 \\
x^2-2x(x+yy')+y^2 &= 0 \\
y' &= \frac{y^2-x^2}{2xy}
\end{aligned}$$

זוהי המשווה הדיפרנציאלית הנתונה, המשפחה הניצבת ניתנת על ידי

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$$

זוהי משוואה הומוגנית, אבל, משוואה זו היא בעצם

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2}{2xy}$$

ופטרונה זהה לפטרון של המשוואה הראשונה,

$$x^2+(y-c)^2 = c^2$$

היפרבולות/אליפסות מצא משפחה אורתוגונלית למשפחה

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1} = 1$$

אם $|a|>1$ אז אלו אליפסות ואם $|a|<1$ אלו היפרבולות.

$$\begin{aligned}
\frac{\cancel{2}x}{a^2}+\frac{\cancel{2}yy'}{a^2-1} &= 0 \quad / \cdot a^2\left(a^2-1\right) \\
xa^2-x+a^2yy' &= 0 \\
a^2 &= \frac{x}{x+yy'} \\
a^2-1 &= \frac{x-(x+yy')}{x+yy'} = \frac{yy'}{x+yy'} \\
\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}(x+yy')-\frac{y^{\cancel{2}}}{\cancel{y}y'}(x+yy') &= 1 \quad / \cdot y' \\
xy(y')^2+y'\left(x^2-1-y^2\right)-yx &= 0
\end{aligned}$$

זוהי המשוואה של המשפחה הנתונה. ה-y אינו מוצג בצורה מפורשת, ועל כן, ע"מ להגיע למשוואה הדיפרנצאילית שמ המשפחה היצבת, נציב $-\frac{1}{y'}$ במקום y'.

$$\begin{aligned}
xy\left(-\frac{1}{y'}\right)^2-\frac{1}{y'}\left(x^2-1-y^2\right)-yx &= 0 \quad / \cdot y'^2 \\
xy-y'\left(x^2-1-y^2\right)-(y')^2yx &= 0
\end{aligned}$$

וזו המשוואה (2 מצבים) הדיפרנציאלית שיש לפתור. אבל עד כדי סימן, משוואה זו זהה למוואה הדיפרנציאלית של המשפחה הנתונה.

כלומר, פטרונותיה הם

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1} = 1$$

כלומר, המשפחה היא אוטורורטוגנלית, אורטוגונלית לעצמה. כלומר, האליפסות ניצבות להיפרבולות וההפך.

מהמשוואה הדיפרנציאלית המקורית, ניתן לראות ש-$-1 = \frac{c}{a}$, כלומר, מכפלת הפתרונות היא -1, ומשפחה זו היא אוטואורתוגונלית.

3 משוואות ליניאריות מסדר $2 \le n \in \mathbb{N}$

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (11)$$

מניחים שכל המקדמים $a_i(x)$ ו-$g(x)$ רציפים ב-(α, β) משותף.

הפטרון הכללי y_g של משוואה ניתן כסכום של y_c פטרון כללי של הומוגנית ו-y_p פטרון פרטי

$$y_g = y_c + y_p$$

3.1 משפט קיום ויחידות למשוואה ליניארית מסדר $2 \le n \in \mathbb{N}$

משפט 3.1 נתונה המשוואה 11 שמקדמיה רציפים ב-(α, β), ותהי $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

אזי <u>קיים</u> למשוואה 11<u>אחד ויחיד</u> המקיים n תנאי התחלה מהצורה

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0^1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^n \end{aligned}$$

כאשר $y_0^1 \ldots y_0^n$ הם מספרים שרירותיים (לא מדובר בחזקות..).

פטרון זה קיים בכל אינטרול הרציפות (α, β).

3.1.1 דוגמאות

1. הסבר מדוע לא יתכן שהפונקציה $y = x^2$ תהווה פתרון של משוואה ליניארית <u>הומוגנית</u> מסדר II שמקדמיה רציפים על כל הישר.

   <u>הסבר:</u> למשוואה ליניארית הומוגנית קיים הפתרון הטריוויאלי $y_1 \equiv 0$.
   נניח גם כי $y_2 = x^2$, ונבדוק את תנאי ההתחלה

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 0 = y_2(0) \\ y_1'(0) &= 0 = y_2'(0) \end{aligned}$$

התקבלו כביכול 2 פתרונות שונים למשוואה מסדר II, שמקיימים את אותם 2 תנאי התחלה: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

2. האם יתכן כי 2 פתרונות של משוואה ליניארית מסדר II שמקדמיה רציפים ב-(α, β) יראו כלהלן: (שתי עקומות החותכות זו את זו באינטרול מסויים, אך שיפועיהם שונים)?
   כן, משום שרק תנאי התחלה אחד $(y_0 = x_0)$ אבל הנגזרות בנקודה שונות.
   לעומת זאת, 2 עקומות המשיקות זו לזו באינטרול הרציפות אינן יכולות להיות 2 פטרונות של אותה משוואה ליניארית מסדר שני.

הערה 3.2 קבוצת הפטרונות של משוואה לינרית הומוגנית $(L(y) = 0)$ מהווה גרעין של הטרנספורמציה הליניארית L ולכן קבוצת הפטרונות של משוואה ליניארית הומוגנית היא מרחב וקטורי. לכן, במשוואה הומוגנית מתקיים עקרון הסופרפוזיציה: כל צירוף ליניארי של פטרונות של ליניארית הומוגנית הוא גם פטרון שלה.

3.1.2 תלות ואי-תלות של פונקציות באינטרול (α, β)

הגדרה 3.3 אומרים שהפונקציות $y_1(x), \ldots, y_k(x)$ תלויות ליניארית בקטע (α, β) אם קיימים $C_1, \ldots, C_k$ שלא כולם אפסים כך שמתקיים

$$C_1 y_1(x) + C_1 y_2(x) + \ldots + C_k y_k(x) = 0$$

לכל $x \in (\alpha, \beta)$.

לדוגמה

1. $\{x^2, x^3\}$ בלתי תלויה ליניארית בכל אינטרול (מעל R).

2. $\{x, x^2, 3x^2 - x\}$ תלויה לינארית בכל אינטרול (מעל R)

3.

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 \\ y_2 &= \begin{cases} 2x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

כאשר $x \geq 0$, הקבוצה תלויה לינארית ($2 \cdot y_1 + (-1) \cdot y_2$) וכאשר $x < 0$.
אבל בכל אינטרול המכיל את 0 כנקודה פנימית, הפונקציות הן בלתי תלויות.

בחוברת

- הומוגניות, עמוד 3,
  - תרגילים 15
    - סעיפים א-ו, ח'
  - 16 בדרך נוספת
  - 20

3.2 התאוריה של משוואה לינארית הומוגנית

נתונה המשוואה

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y' + a_n(x) = 0 \qquad (12)$$

נניח שכל מקדמיה רציפים ב-(α, β).
ניזכר שקבוצת הפתרונותיה היא מרחב וקטורי (גרעין של טרנספורמציה לינארית).

משפט 3.4 מימד מרחב הפתרונות של משוואה 12 מסדר n הוא n.

הוכחה: נראה שיש n פונקציות פתרון שמהוות בסיס למרחב הפתרונות.

1. נמצא קבוצת פתרונות בת"ל (בעלת n איברים)
יהיו $y_1(x), y_2, \ldots, y_n$ פתרון של המקיים: ($x_0 \in (\alpha, \beta)$)

$$\begin{array}{ccc} y_1(x_0) = 0 & y_2(x_0) = 0 & \ldots \\ y_1'(x_0) = 0 & y_2'(x_0) = 1 & \\ \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 & \ldots \\ \ldots & y_n(x_0) = 0 & \\ & y_n'(x_0) = 0 & \\ & \vdots & \\ \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 & \end{array}$$

לפי משפט קיום ויחידות, יש פתרון יחיד כזה.
נראה שהקבוצה בת"ל: נתבונן ב-

$$\forall x \in (\alpha, \beta) : c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

ובפרט, עבור $x = x_0$

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) &= 0 \\ c_1 + 0 + \ldots + 0 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

נגזור את הביטוי ונקבל

$$\begin{aligned} 0 \cdot y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n' y_n(x_0) &= 0 \\ 0 + c_2 + 0 + \ldots + 0 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

וכך ממשיכים לגזור ולהציב x_0 עד שמקבלים $c_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$).

2. נראה שהקבוצה הנ"ל , $\{y_1, \ldots, y_n\}$ אכן פורשת את כל מרחב הפתרונות.
יהי $y(x)$ פתרון כל של משוואה 12, יש להראות שהוא ניתן לכתיבה כת"ל של $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ הנ"ל.
נחשב תנאי התחלה ב-x_0 של ה-y שלנו.

$$y(x_0) = \alpha_1, y_2(x_0) = \alpha_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n$$

נבנה

$$\tilde{y} = y(x_0)y_1(x) + y'(x_0)y_2(x)\ldots + y^{n-1}(x_0)y_n(x)$$

על כן $\tilde{y}$ הוא פתרון, משום שהוא צירוף לינארי של פתרונות. אם נראה ש- $y(x) = \tilde{y}(x)$ אז תושלם ההוכחה.
נבדוק תנאי התחלה של $\tilde{y}(x)$ ב-x_0.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x_0) &= y(x_0)\cdot 1 + 0 + \ldots \\ \tilde{y}'(x_0) &= y'(x_0)\cdot 1 \\ &\vdots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) &= y^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}$$

התקבלו 2 פתרונות, $\tilde{y}, y$ המקיימים את אותם תנאי התחלה ב-x_0, וממשפט קיום ויחידות, נובע $y(x) = \tilde{y}(x)$

■

מסקנה 3.5 אם במשוואה 12 נמצאו n פתרונות בת"ל, מדובר בבסיס למרח הפתרונות.

הגדרה 3.6 בסיס למרחב הפתרונות נקרא גם מערכת יסודית של פתרונות.

מסקנה 3.7 אם $y_1, \ldots, y_n$ פתרונות בת"ל, אזי

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$$

איך יודעים אם n הפתרונות אכן בת"ל?

הגדרה 3.8 הוורנסקיאן של $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ מוגדר כלהלן:

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

לדוגמה

$$W(x, \sin x) = \begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$$

משפט 3.9 אם הקבוצה $\{y_1(x)\ldots y_n(x)\}$ תלויה בקטע (α, β) אז $W(y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$ לכל $x \in (\alpha, \beta)$

דוגמה

$$W(x, -2x) = \begin{vmatrix} x & -2x \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x + 2x = 0$$

הוכחה: נניח שהקבוצה $y_1, \ldots, y_n$ תלויה ב-(α, β). כלומר, קיימים $c_1, \ldots, c_n$, לא כולם 0, כך ש-

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0$$

נגזור:

$$\begin{aligned} c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + \ldots + c_ny_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x) + c_2y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

וקיבלנו מערכת של n משוואות ב-n נעלמים. ידוע שלמערכת הנ"ל יש פתרון שונה מאפס. וכידוע, למערכת הומוגנית $n \times n$ יש פתרון שונה מאפס אם ורק אם מטריצת המקדמים לא הפיכה. $\iff$ דטרמיננטת המקדמים שווה לאפס $\iff$ הוורונסקיאן שווה לאפס.

■

משפט 3.10 אם $W(y_1, \ldots, y_n) = 0$ בנקודה x_0 בלבד ב-(α, β) כש-$y_1, \ldots, y_n$ הם הפתרונות של משוואה 12 מסד n אז $\{y_1, \ldots, y_n\}$ תלויה ב-(α, β).

מסקנה 3.11 ה-W של n פתרונות $y_1, \ldots, y_n$ יקיים רק אחד מהשניים באינטרוול הרציפות (α, β):

או ש-$\forall x \in (\alpha, \beta), W = 0$ כלומר, יש תלות

או ש-$\forall x \in (\alpha, \beta), W \neq 0$, ויש אי תלות.

כי אם $W(x_0) = 0$ אזי הפתרונות תלויים ו-$W \equiv 0$.

הערה 3.12 באשר לדוגמה

$$W(x,\sin x)=\begin{vmatrix} x & \sin x \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}$$

אם בנקודה $x=0$.

אם מקבלים ש-W אינו מקיים את המשוואה האחרונה, סימן שאין משוואה שמקדמיה רציפים בנקודה הבעייתית (לדוגמה, $x=0$) שאלו פתרונותיה.

המשך הדוגמה הוכך שאין משוואה שמקדמיה רציפים על כל הישר, וכך ש-x ו-$\sin x$ הם פתרונותיה.

שיטה 1, $W(x=0)=0$ וזו סתירה לתאוריה, מכאן שלא יתכן וכו'

שיטה 2, $y_1'(x)=\cos x, y_2'(x)=1$ ויש כאן איזשהי סתירה

שיטה 3, בנבה את המשוואה ש-x ו-$\sin x$ פתרונותיה.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

נציב $y_1=\sin x$

$$\begin{aligned} -\sin x+p(x)\cos x+q(x)\sin x &= 0 \\ p(x)+q(x)x &= 0 \\ p(x) &= -q(x)x \\ -\sin x+q(x)\left(-x\cos x+\sin x\right) &- 0 \\ q(x) &= \frac{\sin x}{\sin x-x\cos x} \end{aligned}$$

המקדם הנ"ל אינו רציף ב-0.

שיטה 4, נבנה את המשוואה בדרך אלגנטית.

$$\begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ x & 1 & 0 \\ \sin x & \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 0$$

מציאת ה-W של משוואה 12 מבלי להשתמש בפתרונות - נוסחאת אבל.

$$W=ce^{-\int a_{n-1}(x)dx}$$

הוכחה: מספיק להראות ש-W מקיים משוואה

$$W'+a_{n-1}(x)W=0$$

ואז פתרונה,

$$W=ce^{-\int a_{n-1}(x)dx}$$

נדגים את ההוכחה עבור $n=2$

נראה ש-

$$W'+a_q(x)\cdot W=1$$

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ W' &= \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

אבל y_1,y_2 מקיימים את המשוואה

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1y'-a_0y_1 & -a_1y_2'-a_0y_2 \end{vmatrix} \\ &= l_2\to l_2+a_0l_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1y_1' & -a_1y_2' \end{vmatrix} \\ &= -a_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}-(a_1)\,W \end{aligned}$$

■

הערה 3.13 אם ידוע $W(x_0)$, אזי

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}a_{m-1}(x)dx}$$

3.3 מציאת פתרונות נוספים למשוואה לינארית הומוגנית, כשידוע פתרון 1 שלה, $y_1(x)$

נניח $n=2$, ידוע $y_1(x)\neq 0$ פתרון אחד של משוואה 12.

3.3.1 שיטה 1

נתבונן בביטוי

$$\begin{aligned}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' &= \frac{y_2'y_1-y_1'y_2}{y_1^2}\\ &= \frac{W(y_1,y_2)}{y_1^2}\\ \frac{y_2}{y_1} &= \int\frac{W}{y_1^2}dx\\ y_2(x) &= y_1(x)\int\frac{W}{y_1^2}dx\end{aligned}$$

ואת W מחשבים לפי נוסחאת אבל.

דוגמה

$$x^2y''+3xy'+y=0$$

פתור את המשוואה אם ידוע פתרון אחד שלה, $y_1=\frac{1}{x}$.
ראשית

$$W=c\cdot e^{-\int\frac{3}{x}dx}=c_1e^{-3\ln|x|}=\frac{c}{x^3}$$

$$y_2=\frac{1}{x}\cdot\int\frac{\frac{c}{x^3}}{\frac{1}{x^2}}dx=\frac{1}{x}\int\frac{c}{x}dx=\frac{1}{x}\left[c\ln|x|+d\right]$$

ניתן לבחור $c=1,d=0$

$$y_2=\frac{\ln|x|}{x}$$

מצד שני, הפתרון הכללי הוא

$$y=\frac{1}{x}\left[c\ln|x|+d\right]$$

3.3.2 שיטה שניה (גם ל-$n>2$)

נניח שנתונה משוואה הומוגנית מסדר n'וידוע מפתרון אחד שלה, $y_1(x)\neq 0$.
האם הגיוני להציע

$$y_2(x)=v(x)y_1(x)$$

כוף כי לפחות עבור $v(x)=c$, y_2הוא פתרון.
נציב

$$\begin{aligned}y &= v(x)\cdot y_1(x)\\ y' &= v'(x)y_1(x)+v(x)y_1(x)\\ y'' &= v''(x)y_1(x)+2v'(x)y_1(x)+v(x)y_1\end{aligned}$$

למשוואה

$$y''+p(x)y+q(x)y=0$$

$$\begin{aligned}v''(x)y_1(x)+2v'y_1'+vu_1'+\\ +p(x)y_1'v+pp(x)y_1v'+q(x)c\cdot y_1 &= 0\\ v''y_1+v'\left(2y_1+p(x)y_1\right)+v\left(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1\right) &= 0\\ v''y_1+v'\left(2y_1+p(x)y_1\right) &= 0\end{aligned}$$

נבצע הורדת סדר - נציב $v' = u(x)$ ונקבל

$$u'y_1 + u\left(2y_1' + p(x)y_1\right) = 0$$

משוואה מסדר ראשון, הומוגנית, שניתן לפתור.

$$v(x) = \int u(x)dx$$

ומציבים ב-$y_2(x)$.

3.4 פתרון של משוואות הומוגניות עם מקדמים קבועים.

$$L(y) = a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

כאשר a_i $(0 \le i \le n)$ מספרים.
משפט קיום ויחידות יתקיים לכל n תנאי התחלה ב-x_0 כלשהי.

הצעה לפטרון

$$y = e^{rx}$$

כאשר r לא ידוע.

$$L(e^{rx}) = e^{rx}\left[a_n r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0\right] = 0$$

יש לפתור את המשוואה האופיינית $\ell(r) = 0$
$y = e^{r_0 x}$ פתרון של $L(y) = 0 \iff \ell(r_0) = 0$.

3.4.1 מקרה ראשון

אם כל השורשים האופייניים ממשיים ושונים (פשוטים) אז $y_i = e^{r_i x} \iff \ell(r_i) = 0$
לדוגמה:

$$y'' - 7y' + 10y = 0$$

נעבור למשוואה האופיינית

$$\begin{aligned} r^2 - 7r + 10 &= 0 \\ (r-5)(r-2) &= 0 \\ r_1 = 5 \qquad & r_2 = 2 \end{aligned}$$

אזי

$$y_1 = e^{5x} \qquad y_2 = e^{2x}$$

הפתרון הכללי

$$y_c = c_1 e^{5x} + c_2 e^{2x}$$

נוכיח שאכן $\{y_i\}_{i=1}^n = \{e^{r_i x}\}_{i=1}^n$ הוא בלתי תלויה, אם מדובר ב- $\begin{matrix} r_i \neq r_j \\ i \neq j \end{matrix}$.

$$W(e^{r_1 x}, \ldots, e^{r_n x}) = \begin{vmatrix} r^{r_1 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ & & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{rx} & & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix}$$

נוציא מכל שורה $e^{r_n x}$ ונקבל

$$= e^{r_1 x + r_2 x + \ldots + r_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ r_1 & r_2 & & r_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

זוהי הדטרמיננטה של ואן-דרמונדה ולכן

$$= e^{r_1 x + r_2 x + \ldots + r_n x} \prod_{\substack{i > j \\ i,j = 1}}^{n} (r_i - r_j) \neq 0$$

הערה 3.14 אותו טיעון תקף גם על מרוכבים

3.4.2 מקרה שני

נניח שבין השורשים יש זוג מספרים מרוכבים צמודים.

$$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

משתמשים בנוסחאת אוילר

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

יהיו

$$\begin{aligned}
\tilde{y_1} &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right)\\
\tilde{y_2} &= e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\\
y_1 &= \frac{\tilde{y_1}+\tilde{y_2}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x\\
y_2 &= \frac{\tilde{y_1}-\tilde{y_2}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x
\end{aligned}$$

אלו גם פתרונות כי במשוואה הומוגנית, קבוצת הפתרונות היא מרחב וקטורי, ולכן כל צירוף לינארי של פתרונות היא פתרון.

הערה 3.15 ניתן להראות שהקומבינציות הלינאריות הנ"ל לא יהרסו את אי התלות של קבוצת הפתרונות.

דוגמאות פתרון: $y'' - 2y' + 10y = 0$. עוברים למשווה האופיינית

$$\begin{aligned}
r^2 - 2r + 10 &= 0\\
r_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1-10}}{1} = 1 \pm 3i\\
y_1 &= e^x\cos 3x\\
y_2 &= e^x\sin 3x\\
y_c &= e^x\left(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x\right)
\end{aligned}$$

ודוגמה נוספת,

פתור: $y^{(6)} - y = 0$. המשוואה האופיינית

$$\begin{aligned}
r^6 - 1 &= 0\\
r^6 &= \text{cis}2\pi\\
r_{1\ldots 6} &= \text{cis}\,\frac{2\pi k}{6}\Big|_{k=0,1,\ldots 5}\\
&= \text{cis}\frac{1}{3}\pi k\Big|_{k=0,1,\ldots 5}
\end{aligned}$$

$$r_1 = 1 \qquad r_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad r_4 = \text{cis}\pi = -1$$

$$r_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad r_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = e^x \qquad y_2 = e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y_3 = e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad y_6 = e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$y_4 = e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad y_5 = e^{-x}$$

$$y_c = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(x)$$

3.4.3 מקרה שלישי

אם r_0 ממשי מריבוי $k > 1$ הפתרונות שנציע הם

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{r_0 x}\\
y_2 &= xe^{r_0 x}\\
&\vdots\\
y_k &= x^{k-1}e^{r_0 x}
\end{aligned}$$

לדוגמה

$$\begin{aligned} y''-6y'+9y &= 0\\ r^2-6r+9 &= 0\\ (r-3)^2 &= 0\end{aligned}$$

נציע

$$y_1=e^{3x} \qquad y_2=xe^{3x}$$
$$y_c = e^{3x}\left(c_1+c_2x\right)$$

הערה 3.16 אם מופיעים שורשים לא ממשיים עם ריבוי, משתמשים ביישום 2+3

דוגמה נוספת

$$\begin{aligned} y^{(7)}+2y^{(5)}+y''' &= 0\\ r^7+2r^5+r^3 &= 0\\ r^3\left(r^4+2r^2+1\right) &= 0\\ r_{1,2,3} &= 0\\ \left(r^2+1\right)^2 &= 0\\ r^2=1 \quad &\wedge \quad r^2=-1\\ r_{6,7}=\pm i \quad & \quad r_{4,5}=\pm i\end{aligned}$$

ונרשום את הפתרונות בצורה מפורשת:

$$\begin{array}{ll} y_1=e^{0x}=1 & y_2=x\\ y_3=x^2 & \\ y_6=x\cos x & y_4=e^{0x}\cos x=\cos x\\ y_7=x\sin x & y_5=e^{0x}\sin x=\sin x\end{array}$$

הוכחה: נסביר מדוע $y=x^m e^{r_0x}$ הוא פתרון.

ראשית, המשוואה אופיינית תראה כמו

$$\ell(r)=(r-r_0)^k\cdot\ldots$$

ולכן

$$\begin{aligned} \ell(r_0) &= 0\\ \ell'(r_0) &= 0\\ &\vdots\\ \ell^{(k-1)}(r_0) &= 0\end{aligned}$$

נבדוק

$$L(x^m\cdot e^{rx})=L\left(\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(e^{rx}\right)\right)=$$

ועקב רציפות הנגזרות המעורבות

$$\frac{\partial^m}{\partial r^m}\left(L\left(e^{rx}\right)\right) = \frac{\partial^m}{\partial r^m}\left[e^{rx}\ell(r)\right]$$

$$=C_m^0x^me^{rx}\ell(r)+C_m^1x^{m-1}e^{rx}\ell'(r)+\ldots$$

$$\ldots+C_m^{m-1}xe^{rx}\cdot\ell^{m-1}(r)+C_m^me^{rx}\ell^{(m)}(r)=0$$

ומשום ש-r_0 הוא שורש מריבוי k של $\ell(r)$, אז הפולינום מתאפס עד נגזרתו ה-$k-1$ ב-r_0. ■

3.4.4 תרגילים

1. ידוע פתרונה הכללי של המשוואה. שחזר אותה.

$$y_c=c_1x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}\cos x+c_4e^{2x}\sin x+c_5$$

יש כאן 5 פתרונות בת"ל ולכן סדרה - 5.

$$r_{1,2}=0 \qquad r^3=-1$$
$$r_{4,5}=2\pm i$$

נבנה את המשוואה האופיינית:

$$\begin{aligned} r^2(r+1)(r-(2+i))(r-(2-i)) &= 0 \\ (r^3+r^2)(r^2+Br+C) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{B}{1} &= 2+i+2-i=4 \\ B &= -4 \quad (B=-2\mathrm{Re}(z_0)) \\ \frac{C}{1} &= (2+i)(2-i)=5 \quad \left(C=|z_0|^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r^3+r^2)(r^2-4r+5) &= 0 \\ r^5-3r^4+r^3+5r^2 &= 0 \end{aligned}$$

לאחר שקיבלנו את המשוואה האופיינית, מציבים $y^{(n)}$

$$y^{(5)}-3y^{(4)}+y'''+5y''=0$$

2. עבור איזה n טבעי יכולה הפונקציה $y=x^3$ להוות פתרון של משוואה לינארית הומוגנית מסדר n שמקדמיה רציפים על כל הישר?
ראשית, עבור משוואה עם מקדמים קבועים, צריך $r=0$ להיות מריבוי 4 לפחות.
כלומר, צורת המשוואה האופיינית היא

$$\ell(r)=r^4\cdot(\ldots)=0$$

מסדר $n\geq 4$ יש לפחות משוואה עם מקדמים קבועים.
$n=1$ לא יתכן משום ש-$y_1\equiv 0$ אזי $y_1(0)=0=y_2(0)$ וזו סתירה
$n=2,3$ לא יתכן קי קיימים 2 (3) תנאי התחלה זהים עבור אותו פתרון.

3.5 מציאת פתרון פרטי של משוואה לינארית אי-הומוגנית $L(y)=g(x)$

ראשית, נזכר כי פתרון כללי של משוואה אי-הומוגנית הוא סכום של פתרון כללי של הומוגנית ופתרון פטרי של אי-הומוגנית.

כעת, נמצא את y_p, הפתרון הפרטי של הא-הומוגנית.

3.5.1 השוואת מקדמים

שיטה זו יישימה רק כאשר מקדמי המשוואה הם קבועים ואגף ימין מאחת מהצורות הבאות:

- פולינום
- אקספוננט
- $\sin\beta x/\cos\beta x$.

לדוגמה

$$y''+y=x^2$$

נציע $y_p=Ax^2$.

$$\begin{aligned} y_p'' &= 2A \\ 2A+Ax^2 &= x^2 \end{aligned}$$

נשווה מקדמים:

$$\begin{aligned} x^0:2A &= 0\to A=0 \\ x^1:0 &= 0 \\ x^2:A &= 1 \end{aligned}$$

ויש כאן סתירה.
נציע $y_p=Ax^2+Bx+C$

$$\begin{aligned} y2A+Ax^2+Bx+C &= x^2 \\ x^0: & \quad 2A+C=0 \\ x^1: &= B=0 \\ x^2: & \quad A=1 \\ y_p &= x^2-2 \end{aligned}$$

דוגמה שניה

$$y'' + y' = x^2$$

נציע $Ax^2 + Bx + C$

$$2A + 2Ax + B = x^2$$

וזה לא יתכן...
נציע $y_p = x\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ **וזה עובד...**

תקציר של דוגמה שלישית

$$y'' = x^2$$

ונציע

$$y_p = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$$

ועוד דוגמה

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$$

נציע $y_P = Ae^{3x}$

$$\begin{aligned} 9Ae^{3x} - 4 \cdot 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} &= e^{3x} \\ 0 \cdot e^{3x} &= e^{3x} \end{aligned}$$

וזה בעצם היה הפתרון של ההומוגנית.
הצעה מתוקנת: $y = xe^{3x}$.

דוגמה עם אקספוננט

$$y'' - 6y' + 7y = e^{7x}$$

נציע $y_p = Ae^{7x}$

$$\begin{aligned} 49Ae^{7x} - 42Ae^{7x} - 7Ae^{7x} - 7Ae^{7x} &= e^{7x} \\ 0A &= 1 \end{aligned}$$

כלומר, Ae^{7x} **הוא פתרון של ההומוגנית.**
עתה נציע xAe^{7x}, **הוא הפתרון הנכון.**

השיטה

- $P_m(x), m \in \mathbb{N}$
  - **האם 0 היה שורש אופייני?**
    - **אם לא, אז מיצעים** $y_p = Q_n(x)$
    - **אם כן, מריבוי** S, **אז מציעים** $y_p = X^S Q_m(x)$
- $P(x)e^{\alpha x}$,
  - **האם** α **היה שורש אופייני?**
    - **אם לא, אז מציעים** $y_p = Q_m(x)e^{\alpha x}$
    - **אם כן, מריבוי** S, $y_p = x^S Q_m(x)e^{\alpha x}$
- $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ **או** $P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$
  - **האם** $\alpha + i\beta$ **היה שורש אופייני?**
    - **אם לא,**

$$y_p = e^{\alpha x}\left[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$$

    - **אם כן, מריבוי** s,

$$y_p = x^s e^{\alpha x}\left[Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x\right]$$

עוד דוגמאות   מצא צורת פתרון פרטי במשוואה

$$y''' + y' = x + x\sin x$$

אם y_{p_i} הוא פתרון פרטי לבעיה, $Ly = g_i(x)$.
אז הפתרון הפרטי

$$y_p = \sum_{i=1}^{m} y_{p_i}$$

הוכחה: נתון $L(y_{p_i}) = G_i(x)$, $1 \le i \le m$.

$$L\left(\sum_{i=1}^{m} y_{p_i}\right) = \sum_{i=1}^{m} L(y_{p_i}) = \sum_{i=1}^{m} g_i(x)$$

■

ראשית, המשוואה האופיינית:

$$\begin{aligned} r^3 + r &= 0 \\ r\left(r^2+1\right) = 0 \qquad & r_1 = 0, r_{2,3} = \pm i \end{aligned}$$

נפריד ל-2 בעיות.

1. $Ly = x$
   $m = 1$. האם 0 היה שורש אופייני? כן, מריבוי $S = 1$. לכן נציע $y_{p_I} = x^1(Ax+B)$.
2. $Ly = x\sin x$
   $m = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$. האם $0+i$ היה שורש אופייני? כן, מריבוי $S = 1$, נציע

$$y_{p_{II}} = x^1 e^{0x}\left[(Cx+D)\cos 1x + (Ex+F)\sin 1x\right]$$

$$y_p = y_{p_I} + y_{p_{II}}$$

תרגיל שני   פתרון לכל a ממשי את המשוואה:

$$y'' - 3y' - 4y = e^{ax}$$

$$r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0$$

$$y_c = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

הוא הפתרון של ההומוגנית.
נמצא את y_p,

- $m = 0$, האם a היה שורש אופייני? תלוי ב-a
  - אם לא, $a \ne -1, 4$, נציע $y_p(x) = Be^{ax}$. נציב למשוואה

$$\begin{aligned} a^2Be^{ax} - 3Bae^{ax} - 4Be^{ax} &= e^{ax} \\ B\left(a^2 - 3a - 4\right) &= 1 \\ B &= \frac{1}{a^2 - 3a - 4} \end{aligned}$$

$$y_p = \frac{e^x}{a_2 - 3a - 4} \qquad (a \ne -1, 4)$$

  - אם כן, $a = -1, 4$, אז ריבויו $S = 1$, נציע $y_p(x) = Cxe^{ax}$. נגזור ונציב

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^{ax}(axC + C) \\ y_p''(x) &= e^{ax}\left(a^2xC + 2aC\right) \\ e^{ax}\left[a^2xC + 2aC - 3axC - 3C - 4xC\right] &= e^{ax} \end{aligned}$$

נשווה מקדמים:

$$\begin{aligned} x^1 : C\left(a^2 - 3a - 4\right) &= 0 \\ x^0 : C(2a - 3) &= 1 \\ C &= \frac{1}{2a - 3} \end{aligned}$$

$$y_p = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2-4a-3} & a \neq -1, 4 \\ -\frac{1}{5}xe^{-x} & a = -1 \\ \frac{1}{5}xe^{4x} & a = 4 \end{cases}$$

דוגמה 4 (מי סופר?) רשום צורת פטרון פרטי

$$y'' - 4y' + 4y = 2 + \sin 2x + e^{2x}\cos 2x$$

נמצא שורשים אופייניים

$$\begin{aligned} r^2 - 4r + 4 &= (r-2)^2 = 0 \\ r_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

- $L(y) = 2$
  אפס אינו שורש אופייני, ולכן נציע $y_{p_I} = A$.
- $Ly = \sin 2x$
  האם $0 + 2i$ שורש אופייני? לא! נציע $y_{p_{II}} = B\cos 2x + C\sin 2x$
- $Ly = e^{2x}\cos 2x$. האם $2 + 2i$ היה שורש אופייני? לא!

$$y_{p_{III}} = e^{2x}\left[D\cos 2x + E\sin 2x\right]$$

-

$$y_p = \sum_{i=1}^{3} y_{p_i}$$

3.5.2 שיטה 2 למציאת y_p, ואריציאת הפרמטרים.

טובה למשוואה לינארית כלשהי.
מניחים שידוע פתרון כללי של המשוואה הלינארית ההמוגנית המתאימה

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y' + a_0(x)y(x) = g(x)$$

והפתרון הוא כלהלן:

$$y_C = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

ונציע פתרון פרטי:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

נדרוש $n-1$ תנאים שרירותיים כלהלן:

$$\begin{aligned} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_1(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ (*) \quad c_1'(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y^{(n-1)}(x) &= g(x) \quad (*) \end{aligned}$$

יש להציב למשוואה $L(y) = g(x)$ את y_p ונגזרותיו.

$$\begin{aligned} a_0 \cdot |y_p &= c_1(x)y_1(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x) \\ a_1 \cdot |y_p' &= c_1(x)y_1'(x) + \ldots + c_n(x)y_n'(x) + \underbrace{c_1'(x)y_1 + \ldots + c_n'(x)y_n(x)}_{=0} \\ a_2 \cdot |y_p'' &= c_1(x)y_1''(x) + \ldots + c_n(x)y_n''(x) + \underbrace{c_1'(x)y''(x) + \ldots c_n'(x)y_n(x)}_{=0} \\ &\vdots \\ a_{n-1} \cdot |y^{(n-1)}p(x) &= c_1(x)y^{(n-1)}x + \ldots + c_n(x)y^{(n-1)}(x) + \underbrace{c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots}_{=0} \\ a_n \cdot |y_p^{(n)}(x) &= c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \ldots + c_n(x)y^{(n)}(x) + \\ &+ \quad c_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

נחבר את המשוואה:

$$\cancel{c_1(x)}\ \cancel{L}(y_1)+\ \cancel{c_2}(x)\ \cancel{L}(y_2)+\ldots+\ \cancel{c_n}(x)\ \cancel{L}(y_n)+c_1'(x)y^{(n-1)}+\ldots+c_n'(x)y^{(n-1)}=g(x)$$

כלומר, התנאי ה-n-י הוא ש-

$$c_1'(x)y_n^{(n-1)}+\ldots+c_n'(x)y^{(n-1)}(x) = g(x)$$

יש לה פתרון יחיד כי דטרמיננטית המקדמים הוא הורונסקיאן של המערכת היסודית של פתרונות ההומוגנית, שהיא כידוע $\neq 0$

דוגמה פתור $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

שלב 1,

$$\begin{aligned} r+1 &= 0 \\ r &= \pm i \end{aligned}$$

$$y_c=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

שלב שני, נציא

$$y_p=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$$

אזי המשוואות שעלינו לפתור:

$$\begin{aligned} c_1'(x)\cos x+c_2'(x)\sin x &= 0 \\ -c_1'(x)\sin x+c_2'(x)\cos x &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

נזכר בשיטת קרמר לפתרון משוואת ליניאריות

$$\begin{aligned} c_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \frac{1}{\cos} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}=\frac{0-\frac{\sin x}{\cos x}}{1} \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} \\ c_1'(x) &= \int c_1(x)dx=\ln\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \frac{1}{\cos x} \end{vmatrix}}{1}=1 \\ c_2(x) &= x \end{aligned}$$

נקבל

$$y_p=\cos x\ln\cos x+x\sin x$$

לבסוף, נחבר את פתרון ההומוגנית

$$y=y_c+y_p$$

בחוברת 41-44.

3.6 משוואת אוילר

$$E(y)=a_nx^ny^{(n)}+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1xy'+a_0y=g(x)$$

3.6.1 פטרו המשוואה ההומוגנית.

3.6.2 פטרון האי-הומוגנית

$$y = y_c + y_p$$

שיטה א' ואיצית הפרמטרים, אפשר תמיד, לכל לינארית. זכור לנרמל את המערכת.

שיטה ב' השוואת מקדמים - כיוון שהמקדמים לא קבועים, לא ניתן ליישמה כפי שהיא.
כיוון שב-$y(t)$ המשוואה במקדמים קבועים, עם $G(t)$ מצורה מוטרת, ניתן להשתמש בהשוואת מקדמים.

לדוגמה, פתור

$$x^3y'' + x^2y'' - 2xy + 2y = \frac{\ln x}{x}$$

זוהי משוואת אויילר.
בשלב הראשון, נמצא את פתרון ההווגנית, אזי

$$\begin{aligned}
1 \cdot r\left(r-1\right)\left(r-2\right) + 1r\left(r-1\right) - 2r + 2 &= 0 \\
\left(r-1\right)\left(r^2 - 2r + r - 2\right) &= 0 \\
\left(r-1\right)\left(r-2\right)\left(r+1\right) &= 0
\end{aligned}$$

כל השורשים הם ממשיים ושונים, אזי

$$y_c = c_1x^1 + c_2x^2 + \frac{c_3}{x}$$

ננסה השוואת מקדמים ב-$Y(t)$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\ln x}{x} = x^{-1}\ln x \\
G(t) = g(e^t) &= e^{-t}\ln e^t \\
&= te^{-t}
\end{aligned}$$

אפשרי השוואת מקדמים. האם -1 היה שורש אופייני? כן, מריבוי $s = 1$.

$$\begin{aligned}
y_p(t) &= t\left(At + B\right)e^t \\
y_p(x) &= \ln x\left(A\ln x + B\right)\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

גוזרים, מציבים למשוואה ומשווים מקדמים.

$$\frac{\ln^2 x}{x}\left(A - 2A - A\right) + \frac{12A\ln x}{x} - \frac{10A + 12B}{x} = \frac{n}{x}x$$

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{12} \\
B &= \frac{-5}{72}
\end{aligned}$$

הערה 3.17 בתחום בו $x < 0$, מסתבר שאם נציב

$$-x = \alpha$$

תתקבל משוואת אוילר זהה לנתונה ב-$y(\alpha)$.

4 פטרון מערכות משוואות דיפרנציאליות (לינאריות) מסדר ראשון

4.1 מבוא

t המשתנה החופשי.
$x_1(t), \ldots, x_n(t)$ פונקציות נעלמות.

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= F_1\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\right) \\
x_2'(t) &= F_n\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\right) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= F_n\left(t, x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)\right)
\end{aligned}$$

הפונקציות F_k פונקציות נתונות, יש למצוא $x_k(t)$.

לדוגמה

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= v_1\left(t, x_1(t), x_2(t)\right) \\
v_y(t) &= v_2\left(t, x_1(t), x_2(t)\right)
\end{aligned}
$$

מחפשים מיקום של החלקיק כפונקציה של זמן.

יתכנו גם תנאי התחלה, למשל $x_1(t_0)=x_0^2$, $x_2\left(t_0\right)=x_0^1$.

הערה 4.1 מספיק לדעת על מערכות מסדר ראשון, כי למערכת מסדר גבוהה יותר, ניתן לבצע הורדת סדר.

לדוגמה

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= f_1\left(t, x_1(t), x_2(t), \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right) \\
\frac{d^2x_2}{dt^2} &= f_2\left(t, x_1(t), x_2(t), \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

נוריד את הפונקציה מסדר שני לסדר ראשון. נציב

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= x_1(t) & y_3(t) &= x_2(t) \\
y_2(t) &= \frac{dx_1}{dt} & y_4(t) &= \frac{dx_2}{dt}
\end{aligned}
$$

ונקבל:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 & y_3' &= y_4 \\
y_2' &= f_1\left(t, y_1, y_3, y_{2,}, y_4\right) & y_4' &= f_2\left(t, y_1, y_3, y_{2,}, y_4\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1(t)a_{11}(t) &= x_1(t)+a_{12}(t)x_2(t)+\ldots+a_{1n}(t)x_n(t)+g_1(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_{!}(t)+\ldots+a_{mn}(t)x_n(t)+g_n(t)
\end{aligned}
$$

מסמנים את מטריצת המקדמים $A(t)=\left(a_{ij}(t)\right)$. וקטור המקדמים $X(t)=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix}$

והאיבר החופשי $g(t)=\begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{pmatrix}$

ובכתיב מטריצי

$$X'(t)+A(t)X(t)=g(t)$$

בפרט, אם $g(t)=(0)$, המערכת תקרא הומוגנית.

לדומה

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= 4tx_2-x_1+e^t \\
x_2'(t) &= x_1-2x_2+3x_3 \\
x_3'(t) &= 5x_1-x_2+x_3+t^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \\
A(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 4t & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
G(t) &= \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ t^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.1.1 משפט קיום ויחידות למערכת לינארית מסדר ראשון.

משפט 4.2 נתונה המערכת $X'(t) = A(t)X(t) + g(t)$ ונניח שכל $n^2 + m$ מקדמיה רציפים ב-(α, β). , ותהי $t \in (\alpha, \beta)$.
אזי קיים למערכת וקטור פטרונות אחד ויחיד המקיים גם n תנאי התחלה מהצורה

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1^0 \\ &\vdots \\ x_n(t_0) &= x_n^0 \end{aligned}$$

כאשר x_k^0 מספרים נתונים כלשהם.

הערה 4.3 וקטור הפתרונות הנ:ל קיים בכל אינטרו הרציפים (α, β)

לדוגמה פתרון של מערכת פשוטה

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X \\ x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= 2x_1 + 4x_2 \\ & x_2 = x_1 - x_1' \\ x_1' - x_1'' &= 2x_1 + 4(x_1 - x_1') \\ x_1 &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ x_2(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - \left(2c_1 e^{2t} + ec_2 e^{3t}\right) \end{aligned}$$

זו הייתה שיטת האלמינציה.
נרשום את הפטרו כוקטור

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t} \end{pmatrix} \\ X_c(t) &= c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ -2e^{3t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2 התיאוריה של מערכת הומוגנית לינארית מסדר I

כאן, $X^{(7)}$ וקטור מספיר שבע.

$X_3^{(2)}$ הרכבי שלישי של וקטור מספר 2.

עקרון הסופרפוזיציה: אם $X^{(1)}, \dots X^{(n)}$ מרחב וקטורי, פתרונות של מערכת הומוגנית $X' = A \cdot X$, אז גם כל קומבינציה לינארית שלהם היא וקטור פתרון של המשוואה .
תון $X^{(m)} = A \cdot X^{(m)}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X^{(1)} = A \sum_{i=1}^{k} c_i X^{(1)}$$

הגדרת תלות אומרים ש-$\{X^{(1)}, \dots, X^{(n}\}$ קבוצת וקטורי פונקציות תלויה לינארבית ב-(α, β), אם קיימים $c_1, \dots, c_n$, לא כולם אפסים, כך ש-$c_1 X_1 + \dots c_k X_k = (0)$, לכל $t \in (\alpha, \beta)$.

משפט 4.4 מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית $X' = AX$ הוא ממימד n.

מסקנה 4.5 אם $X^{(1)}(t), \dots, X^{(n)}(t)$ וקטורי פתרונות של מערכת $A_{n \times n} X = 0$ בת"ל אז הפתרון הכללי

$$X_C = c_1 X^{(1)}(t) + \dots c_n X^{(n)}(t)$$

מערכת יסודית.

הגדרה 4.6 קבוצה של n וקטורי פתרונות בת"ל במערכת $n \times n$ הומוגנית נקראת מערכת יסודית של פתרונות.

הגדרה 4.7 W של n וקטורים

$$W\left(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\right) = \left| \left(X^{(1)}\right) \left(X^{(2)}\right) \dots \left(X^{(n)}\right) \right|$$

משפט 4.8 אם $\left\{X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\right\}$ קבוצת וקטורים תלויה לינרית ב-(α, β) אז $W\left(X^{(1)}, \dots, X^{(n)}\right) \equiv 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$

הוכחה: הקבוצה תלויה, לכן יש $c_1,\dots,c_n$, לא כולם אפסים, כך ש-

$$c_1\cdot X^{(1)}+\cdots+c_n\cdot X^{(n)}=(0)$$

זוהי מערכת משוואות הומוגנית $n\times n$ במשתנים $c_1,\dots c_n$. היא בעלת פתרון $\neq 0$, (כי הקבוצה תלויה). כידוע, למערכת $n\times n$ הומוגנית יש פתרון לא טריוויאלי $\iff$ דטרמיננטת המקדמים שווה לאפס, וזהו ה-W. ■

משפט 4.9 אם $\left\{X^{(1)},\dots,X^{(n)}\right\}$ קבוצת וקטורי פתרונות של $x'=Ax$, כש-A רציפה ב-(α,β), ואם $W\left(X^{(1)},\dots,X^{(n)}\right)(t_0)=0$ כש-t_0 נקודה כלשהי, אז וקטורי הפתרונות הנ"ל הם תלויים לינארית ב-(α,β).

מסקנה 4.10

$$W\left(X^{(1)},\dots,X^{(n)}\right)=\begin{cases}\equiv 0 & \forall t\in(\alpha,\beta)\\ \neq 0 & \forall t\in(\alpha,\beta)\end{cases}$$

השוויון מתקבל כאשר הוקטורים אינם בסיס, ואי-השוויון כאשר זהו בסיס.

4.3 טכניקת הפתרון של מערכות הומוגניות.

(אנו פותרים רק למערכות בהן A מטריצת קבועים)
נציע

$$X(t)=e^{rt}(\alpha)$$

כאשר r מספר לא ידוע -(α) וקטור מקדמים לא ידוע.
נציב במערכת $X'=AX$.

$$\begin{aligned}X' &= r(\alpha)\cdot e^{rt}=A\cdot e^{rt}(\alpha)\\ r(\alpha) &= A(\alpha)\end{aligned}$$

כלומר, r הוא ערך עצמי של A עם וקטור עצמי מתאים (α).

4.3.1 דוגמאות

מקרה א', A לכסינה, וכל ערכיה העצמיים ממשיים

במקרה א' (וגם לו הערכים העצמיים היו מרוכבים, עם A לכסינה) יתקבלו n וקטורי פתרונות מהצורה:

$$\left\{e^{r_1 t}\left(\alpha^{(i)}\right)\right\}_{i=1}^{n}$$

נראה ראשית שהקבוצה הנ"ל בת"ל (בעזרת הוורונסקיאן)

$$\begin{aligned}W(\dots) &= \left|\; e^{r_1 t}\left(\alpha^{(1)}\right) \quad e^{r_2 t}\left(\alpha^{(2)}\right) \quad \dots \quad e^{r_n t}\left(\alpha^{(n)}\right)\;\right|\\ &= e^{r_1 t}e^{r_2 t}\dots e^{r_n t}\left|\;\left(\alpha^{(1)}\right) \quad \left(\alpha^{(n)}\right) \quad \dots \quad \left(\alpha^{(n)}\right)\;\right|\end{aligned}$$

והדטרמיננטה שונה מאפס כי n עמודותיה הם וקטורים עצמיים בת"ל.

$$e^{r_1 t}e^{r_2 t}\dots e^{r_n t}=e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)t}\cdot C=e^{\mathrm{trace}(A)t}\cdot C$$

זוהי למעשה נוסחאת אבל.

פתור:

$$\begin{aligned}X' &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}X\\ |\lambda I-A| &= 0\\ \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -4 & \lambda-1\end{vmatrix} &= (\lambda-1)^2-4=(\lambda-3)(\lambda+1)=0\\ \lambda_1=3 & \qquad \lambda_2=1\end{aligned}$$

המטריצה לכסינה, כי כל הערכים העצמיים שונים.
עבור $\lambda_2=3$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} &= (0)\\ 2\alpha_1-\alpha_2 &= 0\end{aligned}$$

יהי $\alpha_2=2$, $\alpha_1=1$.

דוגמה 2: פתור:

$$X' = \begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} X$$

סכומי כל השורות קבועים, ולכן 2 הוא ע"ע ו- $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלו.

$$\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix}\lambda-4 & 1 & 1\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= {}_{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 1\\ \lambda-3 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= {}_{c_2 \to c_2 - c_1} (\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}\\
&= (\lambda-3)(\lambda-3)(\lambda-2)\\
&= (\lambda-3)^2(\lambda-2)\\
\lambda_{1,2} = 2 & \qquad \lambda_3 = 2
\end{aligned}$$

$\lambda_{1,2} = 3$, נמצא ו"א מתאימים.

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = (0)\\
\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0
\end{aligned}$$

אזי הריבוי הגיאומטרי הוא 2.

$$\begin{aligned}
\alpha^{(1)} &= \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \to X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} e^{3t}\\
\alpha^{(2)} &= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \to X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} e^{3t}
\end{aligned}$$

כבר הערנו שעבור $\lambda = 2$, ו"ע יהיה $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, אזי

$$\begin{aligned}
X^{(3)} &= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} e^{2t}\\
X_c &= \sum_{i=1}^{3} c_i X^{(i)}(t)
\end{aligned}$$

מקרה ב' - A לכסינה, ויש זוג ערכים עצמיים מרוכבים צמודים $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

נזכר שאם A ממשית והערכים העצמיים מקיימים $\lambda_2 = \bar{\lambda_1}$ אזי הוקטורים העצמיים מקיימים $v_2 = \bar{v_1}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{X^{(1)}}(t) &= e^{(\alpha+i\beta)t}(v_1) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(v_1)\\
\tilde{X^{(1)}}(t) &= e^{(\alpha-i\beta)t}(\bar{v_1}) = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)(\bar{v_1})\\
X^{(1)}(t) &= \frac{\tilde{X^{(1)}}(t) + \tilde{X^{(2)}}(t)}{2} = \mathrm{Re}\tilde{X^{(1)}}(t)\\
X^{(2)}(t) &= \frac{\tilde{X^{(1)}}(t) - \tilde{X^{(2)}}(t)}{2i} = \mathrm{Im}\tilde{X^{(1)}}(t)
\end{aligned}$$

דוגמה 3

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix} X \\ |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -4 & \lambda+1\end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1)+8 \\ &= \lambda^2-2\lambda+5=0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1\pm\sqrt{1-5}}{1} = 1\pm 2i \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1+2i$, נציב במערכת.

$$\begin{pmatrix}-2+2i & 2\\ -4 & 2+2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = (0)$$

המשוואות חיבות להיות תלויות ולכן נעבוד רק על הראשונה

$$(-1+i)\,\alpha_1+\alpha_2 = 0$$

יהי $\alpha_1 = 1$ חופשי,

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1-i \\ \alpha^{(1)} &= \begin{pmatrix}1\\ 1-i\end{pmatrix} \end{aligned}$$

נבדוק על ידי הצבה:

$$\begin{aligned} (-4)\cdot 1+2\,(1+i)\,(1-i)^2 &= 0 \\ -4+2\cdot 2 &= 0 \end{aligned}$$

מצאנו וקטור עצמי 1.

$$\begin{aligned} \tilde{X^{(1)}}(t) &= \begin{pmatrix}1\\ 1-i\end{pmatrix} e^t\,(\cos 2t + i\sin 2t) \\ X^{(1)}(t) &= \mathrm{Re}\left(\tilde{X^{(1)}}(t)\right) = e^t\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix} \\ X^{(1)}(t) &= \mathrm{Im}\left(\tilde{X^{(1)}}(t)\right) = e^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix} \end{aligned}$$

מקרה ג': כאשר A לא לכסינה

הצעת פתרון:

$$X(t) = e^{\lambda_0 t}\left((\alpha)\,t+(\beta)\right)$$

נגזור ונציב למערכת:

$$\begin{aligned} \cancel{e}^{\lambda_0 t}\left(\lambda_0\,(\alpha)\,t+\lambda_0\,(\beta)\right) &= A\ \cancel{e}^{\lambda_0 t}\left[(\alpha)\,t+\beta\right] \\ t^1 : \lambda_0\,(\alpha) &= A\,(\alpha) \\ t^2 : \lambda\,(\beta)+(\alpha) &= A\,(\beta) \end{aligned}$$

כלומר,

$$(\lambda_0 I - A)\,(\beta) = (\alpha)$$

למערכת כזו יש פתרון תמיד.

α הוא וקטור מקדמי החזקה הגבוהה ביותר.

באופן כללי אם λ_0 מריבוי אלגברי k ו-A לא לכסינה, מציעים וקטור פתרונות:

$$X(t) = e^{\lambda}t\begin{pmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\\ \vdots\\ P_n(t)\end{pmatrix}$$

כש-$P_i(t)$ הם פולינומים ממעלה $k-1$. כל kb מקדמי הפולינומים נמצאים כתלות ב-k מקדמי פולינום אחד בלבד, ולכן ניתן לרשון את הפתרון הנ"ל בצורה הבאה:

$$c_1X^{(1)}(t)+\ldots+c_k\cdot X^{(k)}(t)$$

כאשר $X^{(1)}(t),\ldots,X^{(k)}(t)$ הם וקטורי פתרונות בלתי תלויים.

לדוגמה

$$\begin{aligned} X' &= \begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} X \\ |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix}\lambda-3 & 1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix} \\ &= (\lambda-3)(\lambda-1)+1 \\ &= \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2 \\ \lambda_{1,2} &= 2 \end{aligned}$$

הערה 4.11 כבר ברור ש-A לא לכסינה, כי אם כל הע"ע של A זהים אז Aכזו ללכסינה אם ורק אם $A = \lambda I$.

נמצע וקטורים עצמיים

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= (0) \\
(\alpha) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

הריבוי הגאומטרי הוא 1. אזי

$$X^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

מציעים

$$X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= e^{2t}(at+b) \\
X_2(t) &= e^{2t}(ct+d)
\end{aligned}$$

נציב אותם למערכת, כלומר,

$$\begin{aligned}
x_1' &= 3x_1 - x_2 \\
x_2' &= x_1 + x_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cancel{e}^{2t}(2at+2b+a) &= \cancel{e}^{2t}(3at+3b-ct-d) \\
\cancel{e}^{2t}(2ct+2d+c) &= \cancel{e}^{2t}(at+b+ct+d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t^1 &: \quad 2a = 3a - c \\
t^0 &: \quad 2b + a = 3b - d \\
t^1 &: \quad 2c = a + c \\
t^0 &: \quad 2d + c = b + d
\end{aligned}$$

המשוואה השלישית תלויה בראשונה, אזי

$$\begin{aligned}
a &= c \\
b &= a + d \\
d &= b - a \\
X(t) &= e^{2t} \begin{pmatrix} at+b \\ at+b-a \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix} e^{2t} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}
\end{aligned}$$

ואמנם, מקדמי t בפתרון החדש (השני) הם וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

תרגיל הביתה: פתור

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

והפתרון הוא

$$X_c = c_1 \begin{pmatrix} 2t+2 \\ t^2 \\ -t^2+2t+4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t+1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

4.4 מציאת פתרון פרטי X_p של מערכת לינאריות אי-הומוגנית $X' = AX + g(t)$

$$X = X_c + X_p$$

4.4.1 שיטת ואריאציאת הפרמטרים

נניח שכבר ידוע

$$X_c = c_1 X^{(1)}(t) + \ldots + c_n X^{(n)}(t)$$

ונציע

$$X_p = c_1(t) X^{(1)}(t) + \ldots + c_n(t) X^{(n)}(t)$$

נציב למערכת

$$X' = AX + g$$

כלומר, נדרוש שהוא פתרון,

$$\begin{aligned} c_1'(t)X^{(1)}(t) + \ldots + c_n'(t) \cdot X^n(t) & + \\ +c_1(t)X^{(1)\prime}(t) + \ldots + c_n(t)X^{(n)\prime} & = Ac_1(t)X^{(1)}(t) + \ldots + Ac_n(t)X^{(n)}(t) + g(t) \end{aligned}$$

רוב השורה התחתונה מצטמצמת, כי $X^{(i)\prime} = AX^{(i)}$, כי זהו פתרון של הומוגנית, ומתקבל

$$c_1'(t)X^{(1)}(t) + \ldots + c_n(t)X^{(n)}(t) = g(x)$$

זוהי מערכת $n \times n$ בנעלמים $c_1'(t) \ldots c_n'(t)$.
נמובחט שיש פתרון יחיד כי הוורנסקיאן של המערכת היסודית שונה מ-0.

לדוגמה

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

ראשית, נמצא את פתרון ההומוגנית, ונראה כי $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$, ו-

$$X_c = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

בשלב השני, נשתמש בואריאצית הפרמטר. נציע:

$$X_p = c_1(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2(t) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

פותרים את המערכת:

$$c_1'(t) e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2'(t) e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

פותרים את המערכת, בעזרת שיטת קרמר (או חילוץ והצבה) ומקבלים

$$\begin{aligned} c_1(t) &= e^{-2t}\left(-t - \frac{1}{2}\right) \\ c_2(t) &= e^{-3t}\left(\frac{t}{3} + \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

אחרי סידור, מתקבל

$$X_p = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t - \frac{7}{18} \\ \frac{1}{3}t + \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

נחבר,

$$X = X_c + X_p$$

4.4.2 השוואת מקדמים

ניתן גם ליישם השוואת מקדמים כש-$g(t)$ מצורה מיוחדת -A מטריצה קבועים

$$X' = AX + \begin{pmatrix} 2e^{\alpha t} \\ e^{\alpha t}(1-t) \end{pmatrix}$$

נפתור רק למקרה ש-α אינו שורש אופייני.
טבעי להציב פתרון מהצורה של $g(t)$

$$X_p(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \end{pmatrix}$$

4.4.3 מערכות חריגות

$$d\frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix} X + g(t)$$

זוהי מערכת דמוית אוילר.

בשיטת האלימינציה תתקבל משוואת אוילר באחד המשתנים.

כרגע אי אפשר לפתור זאת בשיטת הערכים העצמיים.

נציב

$$\begin{aligned} 0 &< t = e^z \\ z &= \ln t \\ t\frac{dx}{dt} &= t\frac{dx}{dz}\frac{dz}{dt} = x\frac{dX}{dz}\cdot\frac{1}{t} = \dot{X}(z) \end{aligned}$$

ותתקבל המערכת

$$\begin{aligned} \dot{X}(z) &= \begin{pmatrix}3 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix} X(z) \\ \alpha^{(1)} &= \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \\ \alpha^{(2)} &= \begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \\ X(z) &= c_1 e^z \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + c_2 e^{-z}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \\ X(t) &= c_1 t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + c_2\frac{1}{t}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

מערכת נוספת

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x_1 + x_2 \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= 2x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

נבצע הורדת סדר:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \\ y_2(t) &= \frac{dx_2}{dt} \end{aligned}$$

ומתקבל:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= 2x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

ומתקבל

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$$

ובעצם, ניתן להסתכל רק על 2 הרכיבים הראשונים, כי y_3 הוא רכיב-עזר.

5 פתרון משוואות ליניאריות בעזרת טורי חזקות

מדובר (במיוחד) במשוואת מהצורה

$$P(x)y'' + Q(x)y'(x) + R(x)y(x) = 0$$

לדוגמה, משוואת בסל

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 + y^2\right)y = 0$$

או משוואת לג'נגר

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + \alpha\left(\alpha + 1\right)y = 0$$

המקדמים אומנם פולינומיאלים, אך התורה טובה גם בהרחבות של מקרים אלו.

התנהגות הפתרון תלויה בהתנהגות P בנקודה x_0, כאשר x_0 היא נקודה שבסביבתה נחפש פתרון.

אם $P(x_0) \neq 0$, אזי קיים ויחידות מתקיים, הנקודה x_0 נקראת נקודה רגולרית של המשוואה.

אם $P(x_0) = 0$ לא מובטחים קיום ויחדות הפתרון, אז x_0 נקראת נקודה סינגולרית של המשוואה.

באופן כללי, פותרים על ידי הצעת פתרון:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x-x_0\right)^n$$

5.0.4 תזכורת לטורי חזקות

קיים מספר $R \geq 0$, **רדיוס ההתכנסות**, כך שהטור מתכנס בהחלט לכל $|x-x_0|<R$, מתבדר בתחום $|x-x_0|>R$. בנקודות $|x-x_0|=R$, יש לבדוק בטור. אם הטור מתכנס רק ב-$x=x_0$, רדיוס ההתכנסות הוא 0, אם הוא מתכנס לכל x, אזי $R=\infty$.

חישוב רדיוס ההתכנסות נעשה במספר דרכים, כמו מבחן ד'למבר ומבחן השורש.

אם לפונקציה $f(x)$ יש פיתוח לטור חזקות $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$, אם רדיוס ההתכנסות $R>0$, אז הפונקציה $f(x)$ היא אנליטית (רגולרית) בנקודה x_0.

ברור שפולינום הוא פונקציה אנליטית בכל x_0 שהוא, כי טור החזקות שלו הוא סופי.

ידוע שאם ל-$f(x)$ ו-$g(x)$ יש פיתוחים לטורי חזקות סביב x_0

- אם רדיוס התכנסות משותף R, אז טור החזקות של $f(x) \pm g(x)$ ו-$f(x) \cdot g(x)$ מתכנסות (לפחות) בתחום $|x-x_0|<R$. טורי החזקות המתאימים חיבור/חיסור/כפל הטורים המתאימים).
- לגבי המנה, $\frac{f(x)}{g(x)}$, בהנחה ש-$g(x_0) \neq 0$, אזי ידוע שתחום ההתכנסות של המנה הוא $|x-x_0|<\min(R, R_1)$, כאשר R_1 הוא המרחק של x_0 מה-x הקרוב ביותר אליו המאפס את g (שורש של g).

הערה 5.1 במשפט זה, הכוונה גם לשורשים מרוכבים של g.

לדוגמה

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$$

ידוע כי טור גיאומטרי מתכנס $\iff |x|<1$. לפי המשפט הנ"ל, תחום ההתכנסות סביב $x_0=0$, הוא המינימום בין ∞ והמרחק בין 0 (x_0) ו-1 (ה-x המאפס).

$\sum a_n\left(x-x_0\right)^n=\sum b_n\left(x-x_0\right)^n \iff a_n=b_n$ בפרט, אם $\sum c_n\left(x-x_0\right)^n=0$, אזי $c_n=0$.

ידוע שבתוך תחום ההתכנסות של טור, הטור מתנהג כפולינום. למשל, ניתן לגזור איבר-איבר.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum a_n\left(x-x_0\right)^n \\ f'(n) &= \sum a_n \cdot n\left(x-x_0\right)^{n-1} \end{aligned}$$

5.0.5 משפט על פתרון בצורת טור סביב נקודה x_0 רגולרית של המשוואה

משפט 5.2 נתונה המשוואה

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

כאשר $P(x_0) \neq 0$ (כלומר, x_0 נקודה רגולרית של המשוואה), ונניח ש-$P(x),Q(x),R(x)$ אנליטיות בתחום משותף $0<|x-x_0|<R$.

אזי, קיים למשוואה פתרון בצורת טור חזקות סביב x_0 כלהלן:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n=a_0 y_1(x)+a_1 y_2(x)$$

כאשר $y_1(x), y_2(x)$ 2 טורי פתרונות בת"ל.

טורי הפתרונות מתכנסים לפחות בתחום $|x-x_0|<\min(R, R_1)$, כאשר R_1 הוא מרחק x_0 מהנקודה הסינגולרית ($P(x_1)=0$) הקרובה ביותר ל-x_0.

דוגמאות מצא פתרון בסביבת טור סביב $x_0=0$ למשוואה הבאה

$$y''+y = 0$$

אחר כך, מצא בפרט 2 פתרונות שלה $y_1(x), y_2(x)$ המקיימים:

$$\begin{cases} y_1(0) & = 1 \\ y_1'(0) & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 1 \end{cases}$$

ומצא את תחום ההתכנסות של טורי הפתרונות.

פתרון: טורי הפתרונות יתכנסו לפחות בתחום $|x| < \min(\infty,\infty) = \infty$.

הערה 5.3 מה משמעות תנאי ההתחלה מהסוג $\begin{cases} y_1(x_0) = c_1 \\ y_1'(x_0) = c_2 \end{cases}$? קביעת המקדמים a_1, a_2.

$$\boxed{\begin{cases} y(x_0) & = a_0 \\ y'(x_0) & = a_1 \end{cases}}$$

הערה 5.4 שני טורי הפתרונות y_1, y_2, המבוקשים בתרגיל הם בת"ל כי

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

נציע $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y'=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$.

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n-2)(n+1) + a_n\right] x^n &= 0 \end{aligned}$$

לכן כל אחד מהמקדמים מתאפס, ולכן

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

וזו נוסחאת נסיגה הנכונה לכל $n \geq 0$. מתנאי התחלה

$$\begin{aligned} a_0, a_2 &= -\frac{a_0}{2\cdot 1}, a_4 = \frac{a_2}{4\cdot 3} \ldots a_{2k} = \frac{a_0(-1)^k}{(2k)!} \\ a_1, a_{2k+1} &= \frac{a_{!}(-1)^k}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 \pm \ldots \\ &= a_0\left[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right] + a_1\left[\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right] \end{aligned}$$

והטור הראשון הוא טור מקלורן של קוסינוס, והשני של סינוס!

מצא פתרון בצורת טיילור סביב $x_{0=0}$ למשוואה $y''-xy=0$. כמו כן, מצא תחום התכנסות לש טורי הפונקציות

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n &- \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \\ a_2 2x^0 &+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n+2}(n+2)(n+1) - a_{n-1}\right]x^n = 0 \\ a_{n+2} &= \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a_{3m} &= \frac{a_0}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3m-1)\cdot 3^m m!}\\
3m+1 &= \frac{a_1}{4\cdot 7\cdot(3m-1)\cdot 3^m m!}
\end{aligned}
$$

$$
y=a_0\left[1+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{x^{3m}}{2\ldots(3m-1)\,3^m m!}\right]\quad+\quad a_1\left[x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{3m+1}}{1\cdot 4\cdot 7+\ldots(3m-1)\,3^m m!}\right]
$$

שני טורי הפתרונות מתכנסים ב-$|x_0|<\min(\infty,\infty)$,

5.1 משוואת הרמיט

מצא פתרון בצורת טור סביב $\lambda=0$ למשוואה:

$$y''-2xy'+\lambda y=0$$

כאשר λ הוא פרמטר. לבסוף, מצא פתרון עבור $\lambda=6$ המקיים $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$.

תחון התכנסות הוא אינסוף (המינימום בין אינסוף ואינסוף)

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\\
y' &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}\\
y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)\\
\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}2a_b b x^b &+ \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=0\\
\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_n(2n-\lambda)\right]x^n &= 0\\
a_{n+2} &= \frac{a_n(2n-\lambda)}{(n+2)(n+1)}\\
a_{2k} &= \frac{a_0(4-\lambda)(8-\lambda)(4(k-1)-\lambda)}{(2k)!}\\
2_{2k+1} &= \frac{a_1(2-\lambda)(6-\lambda)\ldots(4k-2-\lambda)}{(2k-1)}
\end{aligned}
$$

במצב כזה, עבור λ זוגי, הטור נוטה להתאפס החל משלב מסויים.

5.2 פתרון משוואה לינארית בעזרת טורי חזקות סביב נקודה רגולרית x_0.

$$P(X)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$$

דוגמה   מצא פתרון בצורת טור סביב $x_0=1$ למשוואה

$$x^2y''-3xy'+3y=0$$

כאשר $y(1)=0,y'(1)=1$. ומצא תחום התכנסות.

ראשית, $x=0$ נקודה סנגולרית של המשוואה, לכן לא נחפש פתרון סביבה.

לפי המשפט, טור הפתרון יתכנס לפחות ב-$|x-1| < \min(1,\infty)$.

נציע $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, אזי

$$\begin{aligned}
y' &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-1)^{n-1} \\
x &= 1+(x-1) \\
xy' &= (1+(x-1)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-1)^{n-1} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1)(x+1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-1)^n \\
y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1)(x-1)^{n-2} \\
x^2 y'' &= \left[1+2(x-1)+(x-1)^2\right] \sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1)(x-1)^{n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n+1} (n+1) n (x-1)^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1)(x-1)^n
\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+!)(n+1)(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n (n+1) n (x-1)^n \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} a_n n (n-1)(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{n+1}(n+1)(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n (x-1)^n \\
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+!)(n+1)(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (n+1) n (x-1)^n \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (n-1)(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_{n+1}(n+1)(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n (x-1)^n \\
0 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + a_{n+1}\left(2n^2+2n-3n-3\right) + a_n\left(n^2-n-3n+3\right)\right](x-1)^n
\end{aligned}$$

טור החזקות שווה לאפס אם ורק אם כל אחד ממקדמיו שווה לאפס, אזי

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}\left(-2n^2+n+3\right)+a_n\left(-n^2+4n-3\right)}{(n+2)(n+1)}$$

וזוהי נוסחת הנסיגה של מקדמי הטור.

a_0, a_1 נתונים כתנאי התחלה ($y(x_0), y'(x_0)$). - $a_0=\mathbf{0}, a_1=\mathbf{1}$.

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1\cdot 3+0}{2\cdot 1} = \mathbf{\frac{3}{2}} \\
a_3 &= \frac{\frac{3}{2}-(-1)(2)+0}{3\cdot 2} = \frac{1}{2} \\
a_4 &= \frac{\frac{1}{2}(-1\cdot 3)+\frac{3}{2}\cdot 1}{4\cdot 3} = 0 \\
a_5 &= \frac{0+\frac{1}{2}\cdot 0}{5\cdot 4}
\end{aligned}$$

אזיף לכל $n>3$, $a_n=0$.

$$y = 1\cdot(x-1)+\frac{3}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3$$

והפתרון מתכנס על כל הישר. המשפט מבטיח שהטור יתכנס לפחות בתחום, אך אינו מונה הכנסות רחבה יותר.

5.2.1 הערות נוספות על פתרון סביב x_0 רגולרית.

- במשוואה אי-הומוגנית, יש להשוות את מקדמי הטור לחזקות המתאימות שבאגף שמאל.
- שיטת פתרון זו טובה בכל תחום ההתכנסות של מקדמי משוואה כזו גם אם הם לא פולינומים.
למשל,

$$y''+y'\sin x+y=0$$

P,Q,R מתכנסים לכל x. תחום ההתכנסות הוא כל x.

- x_0 סינגולרית אם $P(x_0)=0$.

נתרכז בנקודות x_0 סינגולריות-רגולריות, שבהן הסינגולריות של x_0 היא "לא רצינית מדי"

הגדרה 5.5 תהי x_0 כך ש-$P(x_0)=0$. אומרים ש-x_0 סינגולרית רגולרית אם 2 הגבולות הבאים קיימים:

$$\begin{aligned} p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} &< \infty \\ q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} &< \infty \end{aligned}$$

דוגמה

$$5\left(1-x^2\right)y''+x\left(1-x\right)y'+\left(1+x\right)y=0$$

ואז $x\pm1$ נקודה סינגולרית

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1}(x-1)\frac{x(1-x)}{5(1-x)^2(1+x)^2} &= \frac{1}{20}=p_0<\infty \\ \lim_{x\to1}(x-1)^2\frac{1+x}{5(1+x)^2(1-x^2)} &= \frac{1}{10}=q_0<\infty \\ \lim_{x\to-1}(x+1)\frac{x(1-x)}{5(1-x)^2(1+x)^2} &= \infty \end{aligned}$$

אזי $x=1$ סינגולרית רגולרית ו-$x=-1$ אי רגולרית.

נחלק את המשוואה ב-$p(x)$ ואחר כך נכפול ב-$(x-x_0)^2$.

$$\begin{aligned} \left(x-x_0^2\right)y''+m(x-x_0)\left(x-x_0\right)\frac{Q(x)}{P(x)}y'+\left(x-x_0^2\right)\frac{R(x)}{P(x)}y &= 0 \\ \left(x-x_0^2\right)y''+(x-x_0)p_0y'+q_0y &= 0 \end{aligned}$$

כיוון ש-x_0 נמצאה כסינגולרית רגולרית, יש למקדמים $p(x),q(x)$ פיתוחים לטורי חזקות סביב x_0, עם רדיוס התכנסות גדול מאפס.
אם טורי $p(x)$ ו-$q(x)$ הם רק מספרים, $p(x)=p_0$ ו-$q(x)=q_0$. תתקבל משוואת אוילר מוזזת, והפתרון שלה ידוע,
ואז היינו פותרים משוואה אופינית של אוילר: $r\left(r-q\right)+p_0r+q_0=0$.
טבעי להציע פתרון דמוי פתרון אוילר כפול טור חזקות, כי המקדמים דמויי אוילר עם טור חזקות.
פותרים משוואה אופינית $r\left(r-1\right)+p_0r-q_0=0$, כאשר את p_0,q_0 מצאנו קודם, ומציאים לפחות פתרון אחד מהצורה $y=X^{r_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$, (הנח $r_1\le r_2$ ו-$a_0=1$).

5.2.2 משפט על פתרון בסביבת נקודה $x_0=0$ סינגולרית רגולרית.

משפט 5.6 נתונה המשוואה $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ כש-$x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית של המשוואה.
נעביר אותה לצורה הבאה:

$$x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$$

על ידי הכפלה ב-$\frac{x^2}{P(x)}$. נניח כי $p(x),q(x)$ אנליטיות בתחום $|x|<\rho$. פותרים את המשוואה האופינית (אינדציאלית, מעריכית) הבאה:

$$F(r)=r\left(r-1\right)+p_0r+q_0=0$$

נניח ש-$r_1\ge r_2$, ובחר לנוחיותך $a_0=1$, אזי יש למשוואה פתרון אחד מהצורה

$$y_1=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

עבור הפתרון השני, נפריד בין 3 מקרים:

- אם $r_1 - r_2 \neq n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, אז נציע פתרון

$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

- אם $r_1 - r_2 = 0$ אזי

$$y_2 = y_1 \ln x + x^r \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

- אם $r_1 - r_2 = n \in \mathbb{N}$, אז

$$y_2 = Ay_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

לפעמים יש צורך להוסיף מחובר זה, ואז $A \neq 0$, ולפעמים לא, ואז $A = 0$

טורי הפתרונות מתכנסים לפחות בתחום $|x| < \rho$.

דוגמה 1

$$2xy'' + y' + xy = 0$$

$x_0 = 0$ היא סינגולרית רגולרית.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x\frac{1}{2x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = p_0 < \infty \\
\lim_{x\to 0}\left(x^2\frac{x}{2x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2} = 0 = q_0 < \infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r(r-1) + \frac{1}{2}r + 0 &= r^2 - \frac{1}{2}r = r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
r_1 = \frac{1}{2} &\geq r_2 = 0 \\
y_1 &= x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n
\end{aligned}$$

$p(x), q(x)$ מתכנסים לכל x' ולכן גם טור הפתרונות מתכנס שם.

$$\begin{aligned}
xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{3}{5}} \\
y' &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(n + \frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}} \\
y'' &= \sum a_n \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

נציב למשוואה:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(n+\frac{1}{2}\right) x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{3}{2}} &= 0 \quad / \cdot x^{\frac{1}{2}} \\
\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right) x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(n+\frac{1}{2}\right) x^{n} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n} &= 0 \\
x^0 : 2a_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + a_0 \frac{1}{2} &= 0 \\
0a_0 &= 0 \\
x^1 : 2a_1 \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + a_1 \frac{3}{2} &= 0 \\
3a_1 &= 0 \\
a_1 &= 0
\end{aligned}$$

לכל $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
a_n\left[2\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)+n+\frac{1}{2}\right]+a_{n-2} &= 0 \\
a_n &= -\frac{a_{n-2}}{(2n+1)\,n} \\
a_{2k+1} &= 0 \quad \forall k \geq 0 \\
a_0 = 1 \qquad & a_2 = -\frac{1}{5\cdot 2} \\
a_4 = -\frac{a_2}{9\cdot 4} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} \qquad & a_6 = -\frac{a_4}{13\cdot 6} = -\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} \\
a_{2k} &= \frac{(-1)^k}{(2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k)\,(5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4k+1))} \\
&= \frac{(-1)^k}{2^k k!\cdot (1\cdot 5\cdot 9\ldots (4k+1))} \\
y &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!\,(1\cdot 5\cdot t\cdot \ldots (4k+1))}x^{2k}
\end{aligned}$$

לגבי פתרון שני:

$$r_2-r_1=\frac{1}{2}\neq 0,1,2\ldots$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= x^0\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n \\
y_2(x) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3\cdot 7\ldots (4k-1)\cdot 2^k n!}x^{2k}
\end{aligned}$$

דוגמה 2

נתונה

$$x(1-x)^2y''-2y=0$$

א' - הראה ש-$x_0=0$ נקודה סינגולרית רגולרית. $P(0)=0$ **ולכן הנקודה סינגולרית**

נבדוק:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{0}{x\,(1-x)^2} &= 0=p_0 \\
\lim_{x\to 0}x^2\frac{(-2)}{x\,(1-x)^2} &= \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{-2x}{(1-x)^2}}_{Q(x)}=0=q_0
\end{aligned}$$

ב' - מצא פתרון למשוואה שצורתו $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ **, הנח** $a_0=1$**, קבע את כל המקדמים, ומצא תחום התכנסות של הפתרון.** נפתור

$$\begin{aligned}
r\,(r-1)+0r+0 &= 0 \\
r_1=1 \qquad & r_2=0
\end{aligned}$$

הפתרון הראשון הוא

$$y_1=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

מצפים להתכנסות לפחות בתחום $|x|<1$.

$$
\begin{aligned}
x\left(1-x^2\right)y'' &= \left(x-2x^2+x^3\right)y'' \\
y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(n+1\right)nx^{n-1} \\
& \left(x-2x^2+x^3\right)\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(n+1\right)nx^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\left(n+2\right)\left(n+1\right)x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n\left(n+1\right)xx^{n+1} \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}n\left(n-1\right)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}\left(n+2\right)\left(n+1\right)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n\left(n+1\right)xx^{n+1} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}n\left(n-1\right)x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_nx^{n+1} = 0
\end{aligned}
$$

$$X^0: \qquad a_1\cdot 2\cdot 1-2a_0\cdot 0-2a_0=0 \Rightarrow a_1=a_0=1$$

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n\left(2n^2+2n+2\right)-a_{n-1}n\left(n-1\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} \\
&= \frac{2a_n\left(n^2+n+1\right)-a_{n-1}\left(n-1\right)n}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} \qquad \forall n\geq 1
\end{aligned}
$$

$$a_2=\frac{2\cdot 1\cdot 3}{3\cdot 2}=1 \qquad a_3=\frac{2\cdot 1\cdot 7-1\cdot 2}{3\cdot 4}=1$$

השערה: $a_n=1, \forall n\geq 0$.

את שלב הבסיס כבר עשינו נניח כי $a_n=1, a_{n-1}=1$. צ"ל $a_{n+1}=1$.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2\left(n^2+n+1\right)-\left(n-1\right)n}{n^2+3n+2} = \\
&= \frac{2n^2+2n+2-n^2+n}{n^2+3n+2} = 1
\end{aligned}
$$

אזי

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$$

ומתכנס לכל $|x|<1$.

ג' - לפי משפט מתאים, קבע את צורת הפתרון השני. $r_1-r_2=1$ ולפי המשפט, נציע פתרון y_2 מהצורה

$$y_2(x) = A\ln x\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}+X^0\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n$$

ד' - מצא ביטוי מפורש ל-y_1 (לא על ידי טור חזקות) ולפי זה, קבע את y_2 על ידי הורדת סדר, ולבסוף - הראה שקיבלת פתרון y_2 מהצורה שב-ג'.

$$y_1=x\sum_{n=0}^{\infty} x^n=x\frac{1}{1-x}$$

נזכיר את נוסחאת אבל: $W=ce^{-\int a_{n-1}(x)dx}$ ו-$y_2=y_1\int\frac{W}{y_1^2}dx$.

$$
\begin{aligned}
W &= ce^{-\int\frac{0}{x(1-x)^2}dx}=\alpha=1 \\
y_2 &= \frac{x}{1-x}\int\frac{\left(1-x\right)^2}{x^2}dx=\frac{x}{1-x}\int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx \\
&= \frac{x}{1-x}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx \\
&= \frac{x}{1-x}\left[-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x\right]
\end{aligned}
$$

נחזור לג' -

$$y_2 = \frac{x}{1-x} A \ln x + b_0 + b_1 x + \ldots$$

אזי $A = -2$, וזה בעצם מתאים.

5.2.3 ניתן הסבר קל להפרדה בין $r_1 - r_2$ טבעי או לאו

מציעים פטרון מהצורה $x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$.

נציב לתוך המשוואה $x^2 y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0$.

$$\begin{aligned}
& x^2 \sum a_n (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} \\
+ \quad & x \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} \\
+ \quad & \left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \\
= \quad & x^r \Bigg[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^n \\
+ \quad & \left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^n \\
+ \quad & \left(q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Bigg] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^r : \quad & a_0 r (r-1) + p_0 Q_0 r + q_0 a_0 = 0 \\
& a_0 \underbrace{\left[r(r-1) + p_0 r + q_0\right]}_{F(r)} = 0
\end{aligned}$$

נניח ש-$a_0 \neq 0$, ולכן התקבלה משוואה אופינית. יתרה מזאת, מסתבר שכשממשיכים להשוות מקדמים מקבלים:

$$\begin{aligned}
a_0 F(r) x^r \quad & + \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}\right] \right\} x^{r+n} = 0 \\
a_n F(r+n) \quad & = \quad - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[(r+k) p_{n-k} + q_{n-k}\right]
\end{aligned}$$

F מתאפס עבור השורשים האופייניים ואם $F(r+n)$ יוצא r_2, ולכן יש בעיה עם ההפרש בין r_1, r_2 טבעי, משום ש-$F(r+n)$ מתאפס, ואי אפשר למצוא את a_n. במצב כזה, מציעים פתרון עם חלק של $\ln$.

דוגמה 3

$$\begin{aligned}
x^2 y'' + 6 x y' + \left(6 - x^2\right) y &= 0 \\
p(x) &= x \frac{6x}{x^2} = 6 = p_0 \\
q(x) &= x^2 \frac{6 - x^2}{x^2} = 6 - x^2 \\
q_0 &= 6 \\
r(r-1) + 6r + t &= 0, r_1 = -2 > r_2 = -3 \\
y_1 &= x^{-2} \sum_{m=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{x^2} \left[1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{5!} + \ldots\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \left[x + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right] \\
&= \frac{1}{x^3} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{\sinh x}{x^3} \\
r_1 - r_2 &= -2 - 3 = 1
\end{aligned}$$

למרות זאת, ננסה לפתור בשיטה הרגילה, כיוון ש-$F(-3+1) = 0$, יש בעיה.