כללי

$$e^{a+bi}=e^{ax}(\cos(bx)+i\cdot\sin(bx))$$

$$(x-2)^{a+bi}=(x-2)^a\cdot(x-2)^{bi}=(x-2)^a\cdot e^{bi\cdot\ln(x-2)}$$

$$=(x-2)^a\left(\cos\left[b\ln(x-2)\right]+i\cdot\sin\left[b\ln(x-2)\right]\right)$$

מד"ר מסדר ראשון

$$y'+a_{(x)}\cdot y=b_{(x)}$$

$$\mu_{(x)}=e^{\int a_{(x)}dx}\qquad ,c_\mu=0$$

$$y=\frac{1}{\mu_{(x)}}\cdot\left(\int\mu_{(x)}\cdot b_{(x)}dx+c\right)$$

משוואת ברנולי (למד"ר מסדר ראשון)

$$y'+a_{(x)}\cdot y=b_{(x)}\cdot y^n\quad ;n>1$$

חילוק המשוואה ב y^n.

הכפלת המשוואה ב $(1-n)$.

החלפת משתנים $z=y^{1-n}$.

רישום חדש: $z'+(1-n)\cdot a_{(x)}\cdot z=(1-n)\cdot b_{(x)}$.

נפתור ונקבל z. נעבור בחזרה ל y.

הערה: ניתן לבצע תהליך זה גם כאשר יש שורש מימין.

הפרדת משתנים (למד"ר מסדר ראשון)

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{M_{(x)}}{N_{(y)}}\qquad N_{(y)}\cdot dy=M_{(x)}\cdot dx$$

נבצע אינטגרל:

$$\int M_{(x)}\cdot dx=\int N_{(y)}\cdot dy+c$$

הערה: הפתרון יכול להיות פונקציה סתומה.

משוואות הומוגניות מסדר ראשון

$$y'=f(x,y)=F\left(\frac{x}{y}\right)\ or\ F\left(\frac{y}{x}\right)=F(v)$$

בדיקת הומוגניות:

נציב Y=t·X, אם לאחר צימצום לא נשארו לנו X זו משוואה הומוגנית

$$f_{(x,y)}\to f_{(x,tx)}$$

החלפת משתנים: $v=\frac{y}{x}$

$$\begin{cases}v=\frac{y}{x}\\ y'=F_{(v)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'=v+x\cdot v'\\ y'=F_{(v)}\end{cases}\Rightarrow v+x\cdot v'=F_{(v)}$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=F_{(v)}-v\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{x}dx=\frac{1}{F_{(v)}-v}dv$$

ואת זאת נפתור ע"י אינטגרל (הפרדת משתנים).

משוואות מדוייקות

$$M_{(x,y)}\cdot dx+N_{(x,y)}\cdot dy=0$$

בדיקה האם המשוואה מדוייקת: $M'_y=N'_x=\phi''_{xy}$

נמצא פונקציה קדומה ϕ:

$$\phi=\int Mdx+f_{(y)}$$

$$\phi'_y=\left(\int Mdx+f_{(y)}\right)'_y=\left(\int Mdx\right)'_y+\left(f_{(y)}\right)'_y=N$$

הפתרון למשוואה הוא: $\phi=C$.

הערה: הפתרון יכול להופיע בצורה סתומה.

פתרון משוואה לא מדוייקת בשיטת המשוואה המדוייקת

$$M_{(x,y)}\cdot dx+N_{(x,y)}\cdot dy=0\qquad M'_y\ne N'_x$$

נמצא μ כך שאם נכפיל את M ו-N הן יהיו מדוייקות.

נבחר μ שתלוי רק ב X (ניתן לבחור μ שתלוי רק בY)

$$(\mu M)'_y=(\mu N)'_x$$

$$\Rightarrow\frac{\mu'_x}{\mu}=\frac{M'_y-N'_x}{N}\quad\Rightarrow c_\mu=0$$

מספיק למצוא μ אחד ולכן $c_\mu=0$.

נמצא את μ ונפתור משוואה מדוייקת.

הערה:

בד"כ את המשוואה זו ניתן לפתור אם אגף ימין תלוי רק ב-X (אם בחרנו μ כפונק' של Y אז אגף ימין יהיה תלוי רק ב- Y אחרת לא ניתן לפתור).

לפעמים ניתן לבצע החלפת משתנים (כגון: $z=xy,\ z=y/x$) ואז μ תלוי ב- z וניתן למצוא אותו.

משוואת ריקטי

$$y'=q_1(x)+q_2(x)\cdot y+q_3(x)\cdot y^2$$

נתון פתרון y_1.

נבצע החלפת משתנים: $y=y_1+\frac{1}{z_{(x)}}$.

$$z'+(q_2+2\cdot q_3\cdot y_1)\cdot z=-q_3$$

הסבר:

$$\begin{cases}y_1'=q_1+q_2\cdot y_1+q_3\cdot y_1^2\\ \left(y_1+\frac{1}{z}\right)'=y_1'-\frac{z'}{z^2}=q_1+q_2\cdot y_1+q_3\cdot y_1^2\end{cases}$$

פתרון לפי משוואות מסדר ראשון.

הורדת סדר משוואה ע"י החלפת משתנים

$$F(x,y^{(k)},.,.,.,.,.,.y^{(n)})$$

דוגמא:

$$x^2\cdot y''+2x\cdot y'-1=0$$

$$V=y'$$

$$x^2\cdot V'+2x\cdot V-1=0$$

דוגמא:

$$y\cdot y''=(y')^2+1$$

$$p_{(y)}=y'_x\Rightarrow y''_x=p\cdot p'_y$$

$$2y\cdot p'_y\cdot p=p^2+1$$

$$\frac{2p\cdot dp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}$$

נבצע אינטגרל ונפתור את התרגיל.

מד"ר הומוגנית מסדר שני (עם פ. פרטי 1 נתון)

פתרון למד"ר הומוגנית הוא קומבינציה לינארית של פתרונות פרטיים בת"ל.

בדיקה האם הפתרונות הפרטיים בת"ל (ורונסקיאן):

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\ y_1'&y_2'\end{vmatrix}\ne0$$

משוואה מסוג (מקדמים קבועים):

$$y''+a\cdot y'+b\cdot y=0$$

מקרה א'

y_1 נתון (פתרון פרטי ראשון). מציאת פתרון פרטי נוסף:

נגדיר $y=v_{(x)}\cdot y_1$ **פתרון כללי**.

$$\begin{cases}(1)\,y'=v'\cdot y_1+v\cdot y_1'\\ (2)\,y''=2v'\cdot y_1'+v''\cdot y_1+v\cdot y_1''\\ (3)\,y_1''+a\cdot y_1'+b\cdot y_1=0\end{cases}$$

מציבים את (1) ו- (2) במד"ר המקורית.

במד"ר יופיע ביטוי מס' (3) וניתן לאפס אותו (כי הוא שווה לאפס).

נפתור את השאר ונמצא את V. ונכפיל אותו ב- y_1 וזה הפתרון הכללי.

מקרה ב'

y_1 נתון+ת.ה ע"י $W(x_0)$ או $y_1(x_0),\ y_2(x_0)$.

מציאת פתרון פרטי ע"י W:

$$W'_{(x)}=-a_{(x)}W_{(x)}\Rightarrow W_{(x)}=W_{(x_0)}e^{-\int_{x_0}^{x}a_{(x)}dx}$$

$$W_{(x)}=\begin{vmatrix}y_1&y_2\\ y_1'&y_2'\end{vmatrix}$$

מקרים ספציפיים:

$$y''+a^2y=0\Rightarrow y=c_1\sin ax+c_2\cos ax$$

$$y''-a^2y=0\Rightarrow y=c_3\cdot e^{a\cdot x}+c_4\cdot e^{-a\cdot x}$$

מד"ר הומוגנית מסדר N עם מקדמים ממשיים וקבועים

$$a_0\cdot y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\cdots+a_n\cdot y=0$$

פולינום אופייני למד"ר:

$$a_0\cdot x^n+a_1\cdot x^{n-1}+\cdots+a_n\cdot x=0$$

שורשים ממשיים (k_i – הריבוי של השורש λ_i):

$$k_i=1\Rightarrow y_{pi}=c\cdot e^{\lambda_i\cdot x}$$

$$k_i=2\Rightarrow y_{pi}=(c_1+c_2\cdot x)\cdot e^{\lambda_i\cdot x}$$

שורשים מרוכבים (תמיד יגיעו בזוגות):

$$\lambda_i=a\pm b\cdot i,\ k_i=1$$

$$y_{pi}=e^{a\cdot x}(c_0\cos(bx)+c_1\sin(bx))$$

$$\lambda_i=a\pm b\cdot i,\ k_i=k$$

$$y_{pi}=e^{a\cdot x}((c_0+c_1x+...+c_{k-1}x^{k-1})\cos(bx)+(\tilde{c}_0+\tilde{c}_1x+...+\tilde{c}_{k-1}x^{k-1})\sin(bx))$$

הפתרון (ההומוגני) הוא קומבינציה לינארית של הפ. הפרטיים של המשוואה ההומוגנית (הנובעים משורשי הפולינום האופייני). דוגמא:

$$y=e^{a\cdot x}\left(c_1\cdot\cos(bx)+c_2\sin(bx)\right)+(c_4+c_5\cdot x)\cdot e^{\lambda_i\cdot x}$$

משוואות הומוגניות מסדר N עם מקדמים לא ממשיים אך קבועים (מרוכבים)

$$a_0\cdot y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\cdots+a_n\cdot y=0$$

אם נקבל שורש מרוכב מפולינום אופייני אסור לעבור לצורת סינוס-קוסינוס אלה חייבים להשאר בצורת אקספוננט.

דוגמא:

$$y''+3iy'+4y=0$$

$$\lambda^2+3i\lambda+4=0$$

$$\lambda_{1,2}=i,-4i$$

$$y=c_1\cdot e^{\lambda_1x}+c_2\cdot e^{\lambda_2x}$$

$$y\ne e^{\lambda_1x}(a\sin x+b\cos x)+e^{\lambda_2x}(d\sin x+h\cos x)$$

מד"ר לא הומוגנית מסדר שני (מקדמים קבועים)

$$y''+a\cdot y'+b\cdot y=f_{(x)}$$

פתרון הוא פתרון פרטי + פתרון הומוגני: $y=y_p+y_h$

הפתרון הפרטי חייב להיות בת"ל בפתרון ההומוגני.

וריאציית הפרמטרים - מציאת פתרון פרטי:

נמצא פתרון הומוגני מצורת:

$$y_h=c_1\cdot e^{\lambda x}+c_2$$

נבנה פתרון פרטי מסוג:

$$y_p=c_{1(x)}\cdot e^{\lambda x}+c_{2(x)}\Rightarrow y_1=e^{\lambda x},y_2=1$$

נמצא מקדמים חדשים ע"י בניית מטריצה ופיתרונה:

$$\begin{cases}c_1'\cdot y_1+c_2'\cdot y_2=0\\ c_1'\cdot y_1'+c_2'\cdot y_2'=f_{(x)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1'\cdot e^{\lambda x}+c_2'\cdot1=0\\ c_1'\cdot\lambda e^{\lambda x}+c_2'\cdot0=f_{(x)}\end{cases}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\lambda x}&1\\ \lambda e^{\lambda x}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\ c_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f_{(x)}\end{pmatrix}$$

נמצא את נגזרות המקדמים ע"י **משפט קרמר** ונבצע אינטגרל בכדי למצוא את המקדמים עצמם.

נבדוק שהפתרון הפרטי בת"ל להומוגני.

הערות:

- אם הפונקציה היא סכום פונקציות ניתן לפתור את המד"ר בסופרפוזיציה - לפתור בנפרד ולחבר פתרונות פרטיים.
- אם המקדמים לא קבועים: יש להשתמש באויילר (ראה פירוט בהמשך).

אם מקדמי המד"ר קבועים, ניתן לנחש פתרון פרטי מצורת המקדם החופשי (ערוך) ונגזרותיו:

$f_{(x)}$	y_p
$p_{n(x)}$	$Q_{n(x)}$
$p_{n(x)}e^{ax}$	$Q_{n(x)}e^{ax}$
$p_{n(x)}e^{ax}\sin bx$	$Q_{1n(x)}e^{ax}\sin bx+Q_{2n(x)}e^{ax}\cos bx$
$p_{n(x)}e^{ax}\cos bx$	$Q_{1n(x)}e^{ax}\sin bx+Q_{2n(x)}e^{ax}\cos bx$

נמצא את המקדמים של הפ. הפרטי ע"י הצבה במד"ר והשוואת מקדמים.

אם הפתרון הפרטי כן תלוי בהומוגני:

הולכים איבר איבר באגף ימין, מחשבים לו את הערך העצמי, ויוצרים לפי הנוסחה איבר מתאים בפתרון הפרטי.

אם נתקלים פעמים באותו ערך עצמי חייבים לקחת את האיבר עם הפולינום בעל החזקה הגבוהה ביותר.

$$y_p=x^me^{\alpha\cdot x}[(c_0\cdot x^0+...+c_k\cdot x^k)\cos(bx)+(\tilde{c}_0\cdot x^0+...+\tilde{c}_k\cdot x^k)\sin(bx)]$$

k - המעלה הכי גבוהה של הפולינום $f_{(x)}$ באגף ימין.

m - הריבוי של השורש λ (בפולינום האופייני) **שמופיע באגף שמאל וגם באגף ימין.**

משוואות לא הומוגניות מסדר N עם מקדמים ממשיים וקבועים

$$y^{(n)}+a_1\cdot y^{(n-1)}+\cdots+a_n\cdot y=g_{(x)}$$

נמצא פתרון הומוגני מצורת:

$$y=c_1\cdot y_1+c_2\cdot y_2+\cdots+c_n\cdot y_n$$

נבדוק שכל הפיתרונות בת"ל ע"י וורונסקיאן:

$$W(y_1,,,,y_n)=\begin{vmatrix}y_1&\dots&y_n\\ y_1'&\dots&y_n'\\ \vdots&\dots&\vdots\\ y_1^{(n-1)}&\dots&y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}\ne0$$

נשתמש **בוריאצית הפרמטר** ונבנה מטריצה:

$$\begin{pmatrix}y_1&\dots&y_n\\ y_1'&\dots&y_n'\\ \vdots&\dots&\vdots\\ y_1^{(n-1)}&\dots&y_n^{(n-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1'\\ \vdots\\ \vdots\\ c_n'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \vdots\\ g_{(x)}\end{pmatrix}$$

נחשב את נגזרות המקדמים ע"י משפט קרמר ונבצע אינטגרל ע"מ למצוא את המקדמים עצמם.

דוגמא מסדר 3:

$$y'''-y''+y'-y=g_{(x)} \Rightarrow \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1=0$$

$$\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=\pm i$$

$$y_0=y \quad ; \quad y_1=y' \; ; \quad y_2=y''$$

$$\begin{cases} y'_0=y_1 \\ y'_1=y_2 \\ y_2'-y_2+y_1-y_0=g_{(x)} \end{cases}$$

$$y_h=c_1\cdot e^x+c_2\cdot \sin x+c_3\cdot \cos x$$

$$y_i=a_{1(x)}\cdot\left(e^x\right)^{(i)}+a_{2(x)}\cdot(\sin x)^{(i)}+a_{3(x)}\cdot(\cos x)^{(i)}$$

$$\begin{pmatrix} e^x & \sin x & \cos x \\ e^x & \cos x & -\sin x \\ e^x & -\sin x & -\cos x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g_{(x)} \end{pmatrix}$$

נמצא מקדמים בעזרת קרמר ונקבל פתרון פרטי.
אם משתמשים בנוסחה המוגמרת צריך שיהיה מקדם 1 לנגזרת הגבוהה.

מערכת משוואות לינאריות הומוגניות (מקדמ' קבועים)

$$\dot{X}_{(t)}=A\cdot X_{(t)}$$

מציאת ערכים עצמיים והריבוי האלגברי שלהם k, ואח"כ מציאת וקטורים עצמיים לכל ערך עצמי.

$$\left|A-\lambda\cdot I\right|=0 \;\Rightarrow \lambda_1,..\lambda_i \Rightarrow \left(A-\lambda_i\cdot I\right)\cdot\vec{v}_i=\vec{0}$$

א. אם הריבוי האלגברי 1:

$$\lambda_i, k_i=1 \Rightarrow x_{hi}=c_i v_i e^{\lambda_i\cdot t}$$

ב. אם הריבוי האלגברי 2 ומצאנו **רק ו"ע אחד**:

$$\lambda_i, k_i=2 \Rightarrow x_{hi}=c_{i1}v_{i1}e^{\lambda_i\cdot t}+c_{i2}\left(v_{i1}\cdot t+v_{i2}\right)\cdot e^{\lambda_i\cdot t}$$

את הו"ע השני נמצא דרך הנוסחה הבאה:

$$v_{i1}=\left(A-\lambda_i I\right)v_{i2}$$

ג. אם הריבוי האלגברי 2 ומצאנו 2 ו"ע עצמאיים:

$$\lambda_i, k_i=2 \Rightarrow x_{hi}=c_{i1}v_{i1}\cdot e^{\lambda_i\cdot t}+c_{i2}v_{i2}\cdot e^{\lambda_i\cdot t}$$

ד. אם הריבוי האלגברי 3 ומעלה רצוי להשתמש בדרך הבאה:
מהפולינום האופייני יוצרים מד"ר חדשה אחת. פותרים אותה ומגיעים ל- X_i.

$$\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2 \Rightarrow x''_i-4x'_i+4x_i=0$$

$$x_i=(c_j+c_k t)e^{2t} \Rightarrow x_h=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1+c_2 t \\ c_3+c_4 t \end{pmatrix}e^{2t}$$

את X מציבים במד"ר המקורית למציאת חלק מהקבועים. את שאר הקבועים מוצאים ע"פ תנאי התחלה (בדוגמא יש למצוא 2 קבועים, ולהשאר עם 2 שאותם יש למצוא מת.ה).

ה. **ע"ע מרוכב:** אם מקדמי המטריצה ממשיים אז כל פתרון מדומה יופיע עם הצמוד שלו. מספיק להשתמש באחד הפתרונות למציאת 2 המקדמים(המקדמים יכפילו את החלק הממשי והמדומה) :

$$\lambda_i=a\pm b\cdot i\;, \;\; k_i=k$$

$$y_{pi}=v_i\cdot e^{a\cdot x}\cdot\left((c_0+c_1x+\ldots+c_k x^{k-1})\cos(bx)+(\tilde{c}_0+\tilde{c}_1x+\ldots+\tilde{c}_k x^{k-1})\sin(bx)\right)$$

מערכת משוואות לינאריות לא הומוגנית עם מקדמים לא קבועים

$$\dot{X}_{(t)}=A_{(t)}\cdot X_{(t)}+B_{(t)}$$

<u>דרך א'</u>

1. מציאת פתרון הומוגני (ע"ב הסעיף הקודם).
2. מנחשים פתרון פרטי ומציבים אותו במד"ר המקורית כדי למצוא את הקבועים. אם לא ניתן לנחש פיתרון פרטי אז מבצעים וריאציית הפרמטרים למציאת הפתרון הפרטי

$$x_h=c_1\begin{pmatrix} v_{1\lambda_i} \\ v_{2\lambda_i} \end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_i\cdot t}+c_2\begin{pmatrix} v_{1\lambda_j} \\ v_{2\lambda_j} \end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_j\cdot t}=$$

3.
$$=\begin{pmatrix} v_{1\lambda_i}\cdot e^{\lambda_i\cdot t} & v_{1\lambda_j}\cdot e^{\lambda_j\cdot t} \\ v_{2\lambda_i}\cdot e^{\lambda_i\cdot t} & v_{2\lambda_j}\cdot e^{\lambda_j\cdot t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\Phi\cdot C$$

$$x_p:\Phi\cdot C'=B$$

4. ע"י שמוש במשפט קרמר נמצא את נגזרות המקדמים ודרך אינטגרציה גם את המקדמים.
5. הפתרון הפרטי יהיה מצורת: $x_p=\begin{pmatrix} c_{1(t)} \\ c_{2(t)} \end{pmatrix}\cdot\Phi_{(t)}$
6. פתרון כללי הוא סכום פתרון הומוגני ופרטי.

<u>דרך ב'</u>

ניתן למצוא ישירות את הפיתרון הכללי ע"י שימוש בשיטה מסעיף ד' הנ"ל (מערכות הומוגניות). דוגמא:

1. מוצאים ערכים עצמאיים.
2. מהפולינום האופייני יוצרים מד"ר חדשה אחת. פותרים אותה ומגיעים ל- y_i. דוגמא:

$$\begin{cases} y'_1=-2y_1+y_2+2e^{-x}+4x \\ y'_2=y_1-2y_2+3x \end{cases}$$

$$\lambda^2+4\lambda+3 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-3,-1$$

$$y_i''+4y_i'+3y_i=2e^{-x}+7x$$

$$y_i=\underbrace{c_0e^{-3x}+c_1e^{-x}}_{h}+\underbrace{c_2xe^{-x}+c_4x+c_5}_{p}$$

את החלק הפרטי מציבים במד"ר המקורית ומוצאים את כל הקבועים c_2, c_3, c_4.
אח"כ מציבים את הפתרון הכללי במד"ר המקורית ומוצאים את כל הקבועים שנותרו מלבד 2 שאותם נמצא ע"י ת.ה.

הערה: מקדמים לא ממשים (מרוכבים):
אם **מקדמי המד"ר** מרוכבים, אז הע"ע והצמוד שלו יתנו 2 פתרונות שונים!
(ראה דוגמא - משוואות הומוגניות מסדר N עם מקדמים לא ממשים).

משוואת אויילר

$$x^2\cdot y''+\alpha\cdot xy'+\beta\cdot y=0$$

פתרון בצורת $y=x^r$.
נמצא את ערכי r (שורשי הפולינום):

$$x^r\left(r^2+(\alpha-1)r+\beta\right)=0 \Rightarrow r^2+(\alpha-1)r+\beta=0$$

מקרה א': $r_1\neq r_2$
$$y=c_1\cdot\left|x^{r_1}\right|+c_2\cdot\left|x^{r_2}\right|$$

מקרה ב': $r_1=r_2$
$$y=c_1\cdot\left|x^{r_1}\right|+c_2\cdot\left|x^{r_2}\right|\cdot\ln|x|$$

מקרה ג': $r_{1,2}=a\pm bi$
$$y=\left|x^a\right|\cdot\left(c_1\sin(b\cdot\ln|x|)+c_2\cos(b\cdot\ln|x|)\right)$$

פתרון נומרי / מקורב למד"ר נתונה

1. **ננחש פתרון מצורת:**

$$y=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots.+a_n\cdot x^n$$

אם הפונקציה לא תלויה רק ב- X אז נבצע החלפת משתנים.
כל פונקציה שהיא לא פולינום צריך להביע בעזרת טור טיילור, למשל:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\ldots$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

$$\frac{x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=x+x^2+x^3+x^4+\ldots$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2\cdot n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2\cdot n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$$

$$\cot x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\frac{2x^5}{945}+\ldots$$

$$\ln(1\pm x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots$$

2. נציב את הניחוש שלנו במד"ר יחד עם כל פונקציה בצורת טיילור (אם היא לא פולינום).
3. ע"י הצבת תנאי התחלה והשוואת מקדמים נמצא את כל הקבועים הנדרשים.
4. **מציאת השגיאה:**

נחליט ש- $0\le\theta\le 1$

דוגמא:

$$y''=y\cdot x^2+\sin x\;, \quad y_{(0)}=1; y'_{(0)}=0$$

$$R=\frac{y^{n+1}_{(x_0+\theta(x-x_0))}}{(n+1)!}x^{n+1} \;\;, \;\; 0\le\theta\le 1$$

$$\Omega=\{(x,y,y')\,\|x|\le 2,|y|\le 2,|y'|\le 1\} \;\; x=0, y_0=1, y_0'=0$$

$$\varepsilon\le 2\Leftarrow|x|\le 2$$

$$|y|\le|y_0|+\left|\int_0^x y'dx\right|\le|y_0|+y'_{\max}\cdot\varepsilon=1+1\varepsilon\le 2\Rightarrow\varepsilon\le 1$$

$$|y''|=|\sin x|+\left|x^2y\right|\le 1+2\cdot 2\cdot 2\le 9$$

$$|y'|\le|y'_0|+\left|\int_0^x y''dx\right|\le|y'_0|+y''_{\max}\cdot\varepsilon=0+9\varepsilon\le 1\Rightarrow\varepsilon\le\frac{1}{9}$$

$$|y'''|=|\cos x|+|2xy|+\left|x^2y\right|\le 1+2\cdot 2\cdot 2+4\cdot 1\le 13$$

$$|y''''|\le 1+2\cdot 2+4\cdot 2\cdot 1+2\cdot 2\cdot 9\le 60$$

$$|R|\le\frac{60\cdot x^4}{4!} \;:|x|<\frac{1}{9}$$

בעיית שפה (שטרום לאוביל)

$$y_{(x)}''+\lambda\cdot y_{(x)}=0$$

$$y_{(0)}=0 \;\;, \; y_{(x_0)}+y'_{(x_0)}=0$$

נפתור מד"ר עם תנאי שפה.

עבור $\lambda>0$: $y=c_1\sin(x\cdot\sqrt{\lambda})+c_2\cos(x\cdot\sqrt{\lambda})$

עבור $\lambda=0$: $y=c_1+c_2x$

עבור $\lambda<0$: $y=c_1e^{\sqrt{\lambda}\cdot x}+c_2e^{-\sqrt{\lambda}\cdot x}$

טורי פוריה

הצגת פונקציה כטור אינסופי. כאשר L הוא מחצית תחום המחזור שלה.
אם פונקציה מחזורית ב- $[-2,2]$ אז $L=2$.

בנקודות בה הפונק' רציפה הערך של הטור הוא ערך הפונקציה, ובנקודות שבה הפונק' לא רציפה הערך של הפונקציה יהיה הממוצע בין הערכים מימין ומשמאל לנק' הבעייתית.

$$y=f_{(x)}$$

$$a_0=\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L}f_{(x)}dx$$

$$a_n=\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L}f_{(x)}\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \quad n=1,2,,,$$

$$b_m=\frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L}f_{(x)}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx \quad m=1,2,,,$$

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+\sum_{m=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

הערה: יש לבדוק האם הפונקציה בתוך הסינוס / קוסינוס גורמת לאי רציפות כאשר m אי זוגי או זוגי, ואם כן לרשום bm או am לפי מקרים.

פונקציה זוגית: $f(-x)=f(x)$ **פונקציה אי-זוגית:** $f(-x)=-f(x)$

פונקציה זוגית מקיימת:

$$\int_{-L}^{L}f_{(x)}dx=2\cdot\int_0^L f_{(x)}dx$$

אם הפונקציה זוגית אז:

$$b_m=0 \qquad a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f_{(x)}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

אם הפונק' אי זוגית:

$$a_n=0 \qquad b_m=\frac{2}{L}\int_0^L f_{(x)}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

נוסחאות שימושיות

נוסחאות דיפרנציאלים:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=d\sqrt{1+x^2}$$

$$x\cdot dy+y\cdot dx=d(xy)$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y\cdot dx-x\cdot dy}{x^2}$$

אינטגרלים מיידים:

$$\int\ln x dx=x\ln x-x+c$$

$$\int\frac{1}{\cos x}=\ln\left(\frac{-\cos x}{\sin x-1}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{\sin x}=\ln\left(\tan(x/2)\right)+c$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}=\tan x+c$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 x}=-\cot x+c$$

$$\int\tan x dx=-\ln(\cos x)+c$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+c$$

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)+c$$

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln(x-a)+C$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n}+C$$

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}=\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

פירוק לגורמים:

$$\frac{4x^5}{x^2(3+x)(2x+4)}=2x+E+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{3+x}+\frac{D}{2x+4}$$

נוסחאות טריגונומטריות:

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha)=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$$

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin(a/2\pm\beta/2)\cos(a/2\mp\beta/2)$$

$$\cos\alpha\pm\cos\beta=2\sin(a/2\pm\beta/2)\cos(a/2\mp\beta/2)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$$