תורת הפונקציות 1 - תרגול

מר. פלר יואל

סמסטר חורף 2004-5

תוכן עניינים

1 מבוא

הצגות $z \in \mathbb{C}; z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

הכפלה $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

תרגיל חשב $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^3$

פתרון נהפוך לצורה קוטבית $r = \left|1 - \sqrt{3}\right| = 2$ לכן

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\
&= \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 \\
&= 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^3 \\
&= 8(-1) = -8
\end{aligned}$$

תרגיל $\left(\frac{i^5+1}{i^{19}+1}\right)^2$

פתרון

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 \\
&= \left(\frac{(1+i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^2 \\
&= \left(\frac{2i}{2}\right)^2 = -1
\end{aligned}$$

תרגיל פתור את המשוואה $z^n = 2\overline{z}$

פתרון

$$\begin{aligned} z &= r\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \\ r^n\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^n &= 3r\left(\cos\alpha - i\sin\alpha\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^n &= 3r \\ r &= 0 \Rightarrow r = 0 \\ r^{n-1} &= 3 \\ r &= \sqrt[n-1]{3} \\ \left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^n &= \left(\cos\alpha - i\sin\alpha\right) \\ \cos\left(n+1\right)\alpha + i\sin\left(n+1\right)\alpha &= 1 \\ \left(n+1\right)\alpha &= 2\pi k \\ \alpha &= \frac{2\pi k}{n+1} \\ z &= \sqrt[n-1]{3}\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right), \alpha = \frac{2\pi k}{n+1}, k = 0, .., n \end{aligned}$$

תרגיל **הוכח כי לכל** $1 \neq k \in \mathbb{R}^+$ $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = k$ **מגדיר מעגל. קבע את מרכזו ורדיוסו**

פתרון

$$\begin{aligned} \left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| &= k \\ \Rightarrow \left|z-z_1\right| &= k\left|z-z_2\right| \\ \left(z-z_1\right)\left(\overline{z}-\overline{z_1}\right) &= k^2\left(z-z_2\right)\left(\overline{z}-\overline{z_2}\right) \\ \left|z\right|^2 - z\overline{z_1} - \overline{z}z_1 + \left|z_1\right|^2 &= k^2\left(\left|z\right|^2 - \overline{z_2}z - z_2\overline{z} + \left|z_2\right|^2\right) \\ \left(k^2-1\right)\left|z\right|^2 - \left(k^2 z\overline{z_2} + k^2\overline{z}z_2 - z\overline{z_1} - \overline{z}z_1\right) &= \left|z_1\right|^2 - k^2\left|z_2\right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \quad \left(k^2-1\right)\left|z\right|^2 - \left(k^2\overline{z_2} - \overline{z_1}\right)z - \left(k^2 z_2 - z_1\right)\overline{z} + \frac{\left|k^2 z_2 - z_1\right|^2}{k^2-1} \\ \Rightarrow & \qquad \left|\sqrt{k^2-1}z - \frac{k^2 z_2 - z_1}{\sqrt{k^2-1}}\right|^2 = \left|z_1\right|^2 - k^2 \end{aligned}$$

תרגיל **מצא את התנאי עבורם**

$$az + b\overline{z} + c = 0$$

היא בעלת פתרון אחד ויחיד

פתרון נפתור בקואורדינטות קרטזיות

$$\begin{aligned} \left(a_x + ia_y\right)\left(x+iy\right) + \left(b_x + ib_y\right)\left(x-iy\right) + \left(c_x + ic_y\right) &= 0 \\ \Rightarrow a_x x - a_y y + b_x x + b_y y + c_x &= 0 \\ a_y x + ax_y - b_x y + b_y x + c_y &= 0 \end{aligned}$$

לבדוק שיש יחידות נבדוק דטרמיננטה

$$\begin{vmatrix} a_x+b_x & b_y-a_y \\ a_y+b_y & a_x-b_x \end{vmatrix} = (a_x-b_x)^2+\left(b_y^2-a_y^2\right)$$
$$= |a|^2-|b|^2$$

לכן עבור

$$|a| \neq |b|$$

יש יחידות של פתרון

תרגיל מצא מקום הנדסי של הנקודות (צייר)

$$\{z|1<|\Re z|<3\}$$

שני חתכים

$$\{z|\,|z-1+i|\leq 1\}$$

עיגול סגור

$$\frac{1}{2}\leq |z-1+i|\leq 1$$

טבעת סגורה

$$\{|z-4i|+|z+4i|=10\}$$

אליפסה

הגדרה[1] f גזירה ב z_0 אם

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

קיים. לערך המתקבל נקרא $f'(z_0)$.

הגדרה אם f גזירה בסביבה D של z_0 אז נקרא ל f אנליטית (או הולומורפית או רגולריות) ב z_0. נסמן $A(z_0)=O(z_0)=H(z_0)$ קבוצת כל הפונקציות האנליטיות ב z_0.

תזכורת משוואות CR

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

מתקיימות עבור פונקציות אנליטיות.
להפך: אם הפונקציה דיפרנציאבילית בסביבת z_0 ומקיימת CR בסביבה אז היא אנליטית ב z_0.

הגדרה

1. $\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
2. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

אזי ניתן לכתוב את CR בצורה הבאה

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

תרגיל $f(z)=\begin{cases}\frac{z^5}{|z|^4} & z\neq 0\\ 0 & z=0\end{cases}$ האם הפונקציה גזירה בנקודה 0

פתרון

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z} &= \lim_{z\to 0}\frac{\frac{z^5}{|z|^4}}{z}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{z^4}{|z|^4}\\ &= \lim_{z\to 0}e^{i4\theta}\end{aligned}$$

לכן הגבול לא קיים כי תלוי ב-θ.

תרגיל $f(z)=z\Re z$ האם הפונקציה גזירה בנקודה 0. האם היא אנליטית ב 0

פתרון

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0} &= \lim_{z\to 0}\frac{z\Re z-0}{z}\\ &= \lim_{z\to 0}\Re z=0\end{aligned}$$

נבדוק אנלטיות בעזרת CR,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 2x\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= y\\ \frac{\partial u}{y} &= 0\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= x\end{aligned}$$

לכן f לא אנליטית

תרגיל f אנליטית ידוע ש

$$|f| = const$$

מצא את קבוצת כל הפונקציות הנ"ל.

פתרון נניח $c=0$ אזי $|f|=0$ ולכן $f=0$.
נניח $c\neq 0$

$$\begin{aligned}f &= u+iv\\ |f|^2 &= c^2\\ u^2+v^2 &= c^2\\ 2uu_x+2vv_x &= 0\\ 2uu_y+2vv_y &= 0\end{aligned}$$

לפי CR

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

אם נציב נקבל

$$\begin{aligned} uu_x - vu_y &= 0 \\ uu_y + vu_x &= 0 \\ \Rightarrow uu_x - vu_y &= 0 \\ vu_x + uu_y &= 0 \end{aligned}$$

עבור $u_x = u_y$, $u = const, v = const$.
אחרת נכתוב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{vmatrix} u & -v \\ v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 = 0$$

לא מתקיים $c > 0$. קיבלנו פתרון $f = const$

תרגיל f אנליטית. $\Im f(x+iy) = \frac{y}{x^2+y^2}$ מצא את f.

$$\begin{aligned} v &= \frac{y}{x^2+y^2} \\ v_x &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -u_y \\ v_y &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = u_x \\ \int \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dy &= \frac{-x}{x^2+y^2} + C \\ \Rightarrow u &= \frac{-x}{x^2+y^2} + c \end{aligned}$$

תרגול ב 7.11.2004

הערה לפונקציה הרמונית u ניתן למצוא צמודה הרמונית $\Longleftrightarrow$ יש f אנליטית כך ש $Ref = u$

הערה אם f אנליטית אז $(-if)$ אנליטית.

תרגיל מצא צמודה הרמונית ל $u = e^x \cos y$

פתרון

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \\ u_y &= -e^x \sin y \\ v_y &= u_x = e^x \cos y \\ v_x &= -u_y = e^x \sin y \\ \Rightarrow v &= e^x \sin y + c(x) + c \\ v_x &= e^x \sin y + c^{'}(x) = e^x \sin y \\ \Rightarrow v &= e^x \sin y + c \end{aligned}$$

2 העתקות $M\ddot{o}bius$

הגדרה העתקות מביוס הם מהצורה $w=\frac{az+b}{cz+d}$; $\begin{matrix} a,b,c,d\in\mathbb{C} \\ ad-bc\neq 0\end{matrix}$

דוגמה $w=\frac{1}{z}$ מעתיקה את הישר $x=c$ באופן

$$\begin{array}{rcl} c & \to & \frac{1}{c} \\ \infty & \to & 0 \\ c-i & \to & \frac{c-i}{c^2+1} \end{array}$$

כלומר מעתיקה ישר למעגל

תרגיל נתונה $w=\frac{1}{z-1}$ לאן העתקה הזו מעתיקה את התחום $\Omega=\{Rez\subset 1, Imz>0\}$

פתרון

$$\begin{array}{rcl} 1 & \to & \infty \\ 1+i & \to & -i \\ \infty & \to & 0 \end{array}$$

כלומר בגלל שמירת מגמה, עובר לרבע השלישי של המישור.

תרגיל נתון

$$(\infty,i,0) \quad \to \quad (0,i,\infty)$$

למצוא העתקת מביוס

פתרון ע"פ היחס הכפול

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_4}\frac{z_3-z_4}{z_3-z_4}$$

כלומר נציב

$$\begin{array}{rcl} z & \to & w \\ \infty & \to & 0 \\ i & \to & i \\ 0 & \to & \infty \end{array}$$

לכן $F(z)=G(w)$ ואז

$$w = G^{-1}\circ F(z)$$

תרגול ב 14.11.2004

הערה

1. משמעות הוספת נקודה לספירת רימן שנקראת ∞.
נגדיר מחלק שקילות $[z_1:z_2]=[cz_1:cz_2]$. אסור $z_1=z_2=0$. נניח $z_2\neq 0$ אז

$$\left(c=\frac{1}{z_2}\right)\Rightarrow[z_1:z_2] = \left[\frac{z_1}{z_2}:1\right]$$

עבור $z_2=0$ אז $[z_1:0]=[1:0]\Rightarrow\left(c=\frac{1}{z_1}\right)$ כלומר קיבלנו מחלקת שקילות אחת.

2. לכן העתקת מביוס היא ליניארית במובן

$$[z_1 : z_2] \quad \mapsto \quad [az_1 + bz_2 : cz_1 + dz_2]$$

הערה $w = Tz$ ידוע $\frac{w-1}{w+1} = \lambda\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$

תרגיל $T^3 = I$ מצא את T.

$$\begin{aligned} w - 1 &= (w+1)\lambda\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \\ w &= \frac{1+\lambda\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}{1-\lambda\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \\ &= \frac{(z+1)+\lambda(z-1)}{(z+1)-\lambda(z-1)} \\ &= \frac{z(\lambda+1)+(1-\lambda)}{(1-\lambda)z+(1+\lambda)} \end{aligned}$$

כדי לקבל כפל נכתוב מטריצה

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda+1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

אם נציב חזרה נקבל

$$T^3 z = \frac{cz}{c} = z$$

תרגיל מצא העתקה של עגול יחידה על חוץ של עיגול ברדיוס 5 מסביב ל-0 שמעתיקה 0 ל 2.

הוכחה אנו יודעים $6 \to 0$ וגם האינוורסיה שלה

$$\infty \quad \mapsto \quad \frac{25}{6}$$

נבחר נקודה $5 \to 1$ ונחשב את היחס הכפול.

הערה ניתן להוסיף עוד העתקה

$$\begin{pmatrix} z \\ z_0 \\ z_1 \\ z_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ w_0 \\ w_1 \\ w_\infty \end{pmatrix}$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{z-z_0}{z_1-z_0}\frac{z_1-z_\infty}{z-z_\infty} &= t \\ t &= \frac{w-w_0}{w_1-w_0}\frac{w_1-w_\infty}{w-w_\infty} \end{aligned}$$

נעבור למטריצות

$$\begin{pmatrix} w_1-w_\infty & -w_0(w_1-w_\infty) \\ w_1-w_0 & -w_\infty(w_1-w_0) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{det}\begin{pmatrix} -w_\infty(w_1-w_0) & w_0-w_1 \\ w_0(w_1-w_\infty) & w_1-w_\infty \end{pmatrix}$$

אזי נמצא את $z \circ w^{-1}$ וזאת תהיה ההעתקה שלנו.

תרגיל נתון תחום חצי עיגול שעובר לחצי המישור השלישי אזי זווית חצי עיגול אחת $0 \to 1$ והשנייה $\infty \to -1$ ונבחר $-i \to 0$

תרגיל ב 21.11.2004

הגדרה הפונקציה e^z

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

תכונות

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2. $\{z | e^z = 0\} = \phi$
3. $t \in \mathbb{R}; |e^{it}| = 1$

תרגיל הוכח כי

$$\forall w \in \mathbb{C}; |e^w| \leq e^{|w|}$$

פתרון

$$\begin{aligned} Rew &\leq |w| \\ \Rightarrow |e^w| &= e^{Rew} \leq e^{|w|} \end{aligned}$$

ומכאן שזו פונקציה מונוטונית עולה, לכן אי-שיוויון בארגומנט גורר אי-שוויון בפונקציה.

תרגיל לאן $\sin z$ מעתיק חתכים

תרגיל 28.11.2004 נתון

$$z \neq 0; \log z = \ln|z| + i \arg z$$

$$\log z_0 = \{\ln|z_0| + i\widetilde{\arg} z_0 + 2\pi i k\}$$

תרגיל

$$\begin{aligned} z^w &= e^{w \log z} \\ &= e^{(1+i)\log i} \\ &= e^{(1+i)\left(\frac{\pi}{2}i + 2\pi k i\right)} \\ &= e^{\frac{\pi}{2}i + 2\pi k i - \frac{\pi}{2} - 2\pi k} \\ &= e^{\frac{\pi}{2}i - \frac{\pi}{2} - 2\pi k} \\ &= i e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k} \end{aligned}$$

תרגיל

$$u = \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$$

אז $f(z)$ ענף של $\log$

$$f(z) = \log(z-1)$$

נתון

$$f(0) = 3\pi i$$

מצא $Imf(i)$ נעשה הזזה

$$\begin{aligned} w=z-1; g(w) &= \log w \\ Imf(i) &= Img(i+1) \\ \widetilde{\log}(-1) &= 3\pi i \\ \widetilde{\log}(-1+i) &= 3\pi i - \frac{\pi}{4} i + \ln|-1+i| \end{aligned}$$

תרגיל האם קיים ענף $f(z) = \left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$ בתחום $A = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$

פתרון

.1

$$f(z) = \sqrt{z^2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

עבור $\sqrt{z^2}$ קיים ענף בוודאות. נבדוק עבור $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$A \rightarrow \mathbb{C}\setminus((-\infty,0]\cup[1,\infty))$$

כלומר ניתן להגדיר ענף לכל אחד מהחלקים.

.2 נתון סיבוב סביב החלק שאינו פשוט קשר

$$\begin{aligned} \sqrt{(z-1)(z+1)} &= \sqrt{re^{i\theta}r_1e^{i\theta_1}} \\ &= \sqrt{rr_1e^{i(\theta+\theta_1)}} \end{aligned}$$

לאחר סיבוב

$$\arg = e^{\frac{i(\theta+\theta_1)}{2}} + e^{\frac{i4\pi}{2}}$$

ומצד שני

$$e^{i0} = e^{i\frac{4\pi}{2}}$$

כלומר אין שינוי וניתן להגדיר ענפים.

תרגיל ב 5.12.2004

$$(dz = dx + idy) \Rightarrow \int_c (u+iv)\,dz = \int_c udx - vdy + i\int_c vdx + udy$$

תרגיל חשב

$$\int_c (1+i-2\overline{z})\,dz$$

כאשר

$$c = \{(1+i)t | t\in[0,1]\}$$

פתרון $z=t+it$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1+i-2(t-it))(1+i)\,dt &= (1+i)\left(\int_0^1 (1-2t)\,dt + i\int_0^1 (1+2t)\,dt\right)\\ &= (1+i)\left(\left(t-t^2\right)\Big|_0^1 + i\left(t+t^2\right)\Big|_0^1\right)\end{aligned}$$

תרגיל חשב את אותו אינטגרל כאשר $y^2=x$

פתרון לכן $z=t^2+it$

$$\begin{aligned}\int_c (1+i-2\overline{z})\,dz &= \int_0^1 \left(1+i-2\left(t^2-it\right)\right)(2t+i)\,dt\\ &= (1+i)\,i\int_0^t dt + (2(1+i)-2)\int_0^1 tdt\\ &\quad + (-2i+4i)\int_0^1 +4\int_0^1 t^3dt\\ &= (1+i)\,i+i-\frac{2}{3}i+1\\ &= \frac{4}{3}i\end{aligned}$$

תרגיל חשב אינטגרל

$$c=\left\{z\middle|\left|z+\frac{1}{2}i\right|=\frac{1}{2}, Rez<0\right\};\int_c z\cos z$$

פתרון הפונקציה אנליטית ולכן נפתור לקו ישר

$$\begin{aligned}\int_0^i z\cos zdz &= \int_0^i z\cos zdz\\ &= z\sin z|_0^i - \int_0^i \sin zdz\\ &= (z\sin z+\cos z)|_0^i\\ &= i\frac{e^{-1}-e^1}{2i}+\frac{e^{-1}+e^1}{2}-1\\ &= e^{-1}-1\end{aligned}$$

תרגיל הוכח

$$\left|\int_{\substack{|z|=2\\ Rez\geq 0}} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \frac{2\pi}{3}$$

נתון

$$\begin{aligned}
\max\left|\frac{1}{z^2+1}\right| &= \frac{1}{\min\left|z^2+1\right|}\\
\left\{z\middle|\begin{array}{c}|z|=2\\ Rez\geq 0\end{array}\right\} &\xrightarrow{z^2} \{z|\,|z|=4\}\\
\{z|\,|z|=4\} &\xrightarrow{z+1} \{z|\,|z+1|=4\}\\
\min\left|z^2+1\right| &= 3\\
\max\left|\frac{1}{z^2+1}\right| &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\left|\int_{\substack{|z|=2\\ Rez\geq 0}}\frac{dz}{z^2+1}\right| &\leq \int_{\substack{|z|=2\\ Rez\geq 0}}\left|\frac{1}{z^2+1}\right|dz\\
&\leq \frac{1}{3}\int_{\substack{|z|=2\\ Rez\geq 0}}dz\\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

משפט נוסחת קושי

$$\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0)$$

תרגיל חשב

$$I = \int\frac{e^z}{z^2-9}$$

כאשר המסלול $|z|=2$

פתרון $I=0$ כי אנליטי בכל התחום.

תרגיל

$$I = \int\frac{e^z}{z^2-9}dz$$

כאשר המסלול $|z-3|=1$

פתרון

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|z-3|=1}\frac{\frac{e^z}{(z+3)}}{(z-3)}dz\\
(couchy\quad fomula)\Rightarrow &= 2\pi i\frac{e^3}{6}=\frac{\pi i e^3}{3}
\end{aligned}$$

תרגיל

$$I = \int \frac{e^z}{z^2-9}dz$$

כאשר המסלול $|z|=4$

פתרון

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^z}{z^2-9}dz \\ \left(\frac{1}{z^2-9}=\frac{1}{6}\frac{1}{z-3}-\frac{1}{6}\frac{1}{z+3}\right)\Rightarrow &= \frac{1}{6}\int\frac{e^z}{z-3}dz-\frac{1}{6}\int\frac{e^z}{z+3}dz \\ &= \frac{1}{6}\left(2\pi i e^3-2\pi i e^{-3}\right) \\ &= \frac{2i\pi}{3}\sinh 3 \end{aligned}$$

תרגיל חשב[2] $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$ $C=\left\{x+iy|x^2+y^2=1, y\geq 0\right\}$.

פתרון עבור ענף רגיל $\sqrt{1}=1$ ועבור חריץ $y=x, x\leq 0$ אז

$$\int_c \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}|_1^{-1}=2i-2$$

עבור חריץ $y=-x, x\leq 0$

$$= 2\sqrt{z}|_1^{-1}=-2i-2$$

כלומר עבור פונקציה רב ערכי חשוב הענף וחשוב המסלול

נוסחת קושי

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

תרגיל חשב $\int_{|z|=2}\frac{\cosh(iz)}{z^2+4z+3}$

פתרון

$$\begin{aligned} &= \int_{|z|=2}\frac{\cosh(iz)}{(z+1)(z+3)} \\ &= \int_{|z|=2}\frac{\frac{\cosh(iz)}{(z+3)}}{(z+1)} \\ &= 2\pi i\frac{\cosh(-i)}{2} \end{aligned}$$

תרגיל חשב $\int_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}$

[2] תרגול ב 12.12.2004

פתרון נוסחת לנגזרות

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

$$\begin{aligned}
\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} &= \int_{|z-1|=1} \frac{\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}dz \\
&= \left(\frac{\sin \pi z}{(z+1)^2}\right)' |_{z=1} 2\pi i \\
&= \left(\frac{\pi (z+1)^2 \cos \pi z - 2(z+1)\sin \pi z}{(z+1)^4}\right)_{z=1} 2\pi i \\
&= \frac{-\pi 4}{16} 2\pi i = -\frac{\pi^2}{2} i
\end{aligned}$$

תרגיל חשב $\int_{|z|=2} \frac{\cosh z dz}{(z+1)^3(z-1)}$

פתרון

$$\begin{aligned}
& \int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3 (z-1)}dz \\
= & -\frac{1}{2}\int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^3}dz \\
& -\frac{1}{4}\int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{(z+1)^2}dz - \frac{1}{8}\int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{z+1}dz \\
& +\frac{1}{8}\int_{|z|=2} \frac{\cosh z}{z-1}dz \\
= & -\frac{1}{2}\frac{2\pi i}{2!}\cosh 1 + \frac{1}{4} 2\pi i \sinh 1 - 2\pi i \frac{1}{8}\cosh 1 + \frac{1}{8} 2\pi i \cosh(1)
\end{aligned}$$

תרגיל ב 2.1.2005

טורי חזקות $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ כאשר רדיוס התכנסות $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ ואם זה קשה ניתן לנסות

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

תרגיל $\sum_0^\infty \cos(in) z^n$ מצא את תחום ההתכנסות

פתרון

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\cos in|}} \\
\cos(in) &= \frac{e^{-n} + e^n}{2} \\
\limsup \sqrt[n]{|\cos in|} &= \limsup \sqrt[n]{\left|\frac{e^{-n}+e^n}{2}\right|} \\
&= \limsup e \sqrt[n]{\frac{e^{-2n}+1}{2}} = e \\
\Rightarrow R &= e^{-1}
\end{aligned}$$

לכן תחום התכנסות $\left\{z \,|\, |z|<e^{-1}\right\}$

טורים ידועים

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= \sum_{0}^{\infty} z^{n}, \quad |z|<1 \\
e^{z} &= \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!} \\
\cos z &= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!} z^{2n} \\
\sin z &= \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!} z^{2n+1}
\end{aligned}$$

תרגיל מצא פתוח לטור טיילור של הפונקציות הבאות

1. $\frac{1}{(1-z)^{2}}$
2. $\frac{1}{z+a}$
3. $\frac{1}{(z+1)(z+2)}$

פתרון

.1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^{2}} &= \left(\frac{1}{1-z}\right)^{\prime} \\
&= \left(\sum z^{n}\right)^{\prime} \\
&= \sum \left(z^{n}\right)^{\prime} \\
&= \sum n z^{n-1}
\end{aligned}$$

.2

$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\frac{z}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{z}{a}\right)^{n}$$

.3 נפתור לפי

$$\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2} = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

תרגיל

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)} &= \frac{1-z}{(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}\\ &= \frac{1-z}{(1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)}\\ &= \frac{1-z}{(1-z^4)(1+z^4)}\\ &= \frac{1-z}{1-z^8}=\frac{1}{1-z^8}-\frac{z}{1-z^8}\\ &= \sum_0^\infty z^{8n}-\sum_0^\infty z^{8n+1}\\ &= \sum_0^\infty a_nz^n, a_n=\begin{cases}0 & else\\ 1 & n=8k\\ -1 & n=8k+1\end{cases}\end{aligned}$$

תרגיל $f(z)=\sin(2z+1)$ **פתח בחזקות של** $z+1$. **אז**

$$\begin{aligned}f(z) &= \sin(2(z+1)-1)\\ &= \sin 2(z+1)\cos 1-\sin(1)\cos 2(z+1)\\ &= \dots\end{aligned}$$

תרגיל $\sin^3 z$ **מצא טור מקלורן**

פתרון $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ **כלומר**

$$\sin^3 z = \frac{e^{3iz}-3e^{iz}+3e^{-iz}-e^{-3iz}}{-8i}$$

תרגיל **מצא את 3 המקדמים הלא אפסים בפתוח לטור בסביבה של** 0. **לפונקציה** $\frac{z}{(1-z^2)\sin z}$

פתרון

$$\begin{aligned}\frac{z}{1-z^2\left(z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5!}-\dots\right)} &= \frac{z}{z-\left(1+\frac{1}{3!}\right)z^3+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}\right)z^5+\dots}\\ &= \frac{1}{1-\left(1+\frac{1}{3!}\right)z^2+\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{3!}\right)z^4+\dots}\\ &= \frac{1}{1-\frac{7}{6}z^2+\frac{21}{120}z^4+\dots}\\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{7}{6}z^2-\frac{21}{120}z^4-\dots\right)}\end{aligned}$$

עבור z **מספיק קטן** $|t|<1$ **ולכן**

$$\begin{aligned}&= \sum (t)^n\\ &= \sum\left(\frac{7}{6}z^2-\frac{21}{120}z^4-\dots\right)^n\\ &= 1+\left(\frac{7}{6}z^2-\frac{21}{120}z^4-\dots\right)+\\ &= 1+\frac{7}{6}z^2-\frac{21}{120}z^4+\frac{49}{36}z^4+\dots\end{aligned}$$

תרגיל ב 9.1.2005

טורי לורין נתון הטור

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(z-z_0\right)^k$$

את המקדמים נמצא ע"י

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{k+1}}dz$$

תרגיל נתון $f(z)=\frac{1}{\left(z^2-1\right)^2}$, מצא פיתוח לטור לוריין בתחום $0<|z-1|<2$

פתרון

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2}}{\left(z-1\right)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{\left(z-1\right)^{n+3}} \end{aligned}$$

לכן עבור $n\le -3$ ואז

$$a_n = 0$$

עבור $n>-3$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{\left(z-1\right)^{n+3}} \\ &= \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{1}{\left(z+1\right)^2}\right)^{(n+2)} |_{z+1} \\ \ldots &= \frac{\left(-1\right)^{n+2}}{\left(z+1\right)^{n+4}}\frac{(n+3)!}{(n+2)!} \\ &= \frac{\left(-1\right)^{n+2}}{\left(2\right)^{n+4}}(n+3) \end{aligned}$$

פתרון (2)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(z-1\right)^2}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}-2\frac{1}{(z-1)(z+1)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(z-1\right)^2}+\frac{1}{\left(z+1\right)^2}+2\frac{1}{1-z^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{\left(z-1\right)^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(z+1\right)^2}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{\left(z-1\right)^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(z+1\right)^2}+\frac{1}{z+1}\right) \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+(z-1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n} \\
\frac{1}{(z+1)^2} &= -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}\right)' \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n(z-1)^{n-1}}{2^n}
\end{aligned}$$

תרגיל $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ לפתח לטור בחזקות של z, קבע את תחום ההתכנסות.

פתרון

$$\cos W = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n W^{2n}}{(2n)!}$$

הטור התכנס עבור $|W|<\infty$ ולכן הטור החדש יתכס עבור $|z|>0$

$$\begin{aligned}
\cos\frac{1}{z} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n}(2n)!} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-k}z^{2k}}{(-2k)!}
\end{aligned}$$

לכן הטור

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2-2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

תרגיל

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

לפתח בחזקות של z. כל הפיתוחים האפשרים.

פתרון נקודות סינגולריות $z=1,-2$, לכן נפתח עבור $|z|<1, 1<|z|<2, 2<|z|$

$$f(z) = \frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

$$\begin{aligned}
|z|<2, \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}(-1)^n \\
|z|<1, \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty}z^n
\end{aligned}$$

בטבעת הביינים הפיתוח עבור $\frac{1}{z-1}$ צריך לפתח ל z

$$\left|\frac{1}{z}\right|<1;\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum\frac{1}{z^n}$$

עבור הצד החיצוני

$$\left|\frac{2}{z}\right|<1,\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\sum\frac{(-1)^n 2^n}{z^2}$$

(הערה: ניתן לחשב את הרדיוס הפנימי והחיצוני של הטבעת ע"י נוסחאת הדמר. בחלק העיקרי ניקח את החלק $n<0$ (כלומר את הזנב השלילי של הטור ונחשב עבורו את רדיוס ההתכנסות עבור $z=\frac{1}{t}$ והרדיוס הוא $\frac{1}{R}$ מזה שמגלים בנוסחאת הדמר)

נקודות סינגולריות

1. נקודה מבודדת היא נקודה עבורה הפונקציה מקבלת ערך בסביבה חוץ מבנקודה זאת.
   (א) נק' סליקה.
   אין חלק עיקר של הטור.
   (ב) קוטב.
   החלק העיקרי סופי
   (ג) עיקרית.
   החלק העיקרי אין סופי.
2. $\log z$ מה סוג של הסינגולריות ב-0. נק' הסתעפות.

הערה אם[3] טור מתכנס בטבעת $a<|z-z_0|<b$ וגם $a>0$ אז תמיד יהיה חלק עיקרי אין סופי ועדין לא ניתן יהיה להגיד כלום על z_0.

תרגיל מצא את כל נקודות סינגולריות של הפונקציה $\frac{1}{z^2e^{\frac{1}{z}}}$

פתרון קיימת נקודה אחת שבה הפונקציה לא אנליטית והיא $z=0$

$$\frac{1}{z^{-2}e^{\frac{1}{z}}} = z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\frac{1}{n!}$$

לכן נקודה סינגולרית נסוג עיקרי.

דוגמה בדוק את סוג הסינגולריות ב $z_0=0$

$$\frac{\sin z-z}{\cos z-1}$$

פתרון נפתח לטור טיילור בסביבה המנוקבת של 0

$$\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\ldots-z}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots-1} = \frac{-\frac{z}{3!}+\ldots}{\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}}$$

קיבלנו חלוקה של פונקציות אנליטיות שרציפות ב $z=0$ ואז

$$= 0$$

[3] תרגול ב 16.1.2004

הערה ניתן להגדיר קוטב גם כ $f\left(z\right)=\frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ כאשר $g\left(z_0\right)\neq0$ וגם g אנליטית.

תרגיל

$$f\left(z\right) = \frac{e^z}{1-\cos z}$$

קבע מה סוג הסינגולריות ב-0

פתרון

$$\begin{aligned} f\left(z\right) &= \frac{e^z}{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\right)} \\ &= \frac{e^z}{z^2\left(\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\ldots\right)} \end{aligned}$$

כלומר מצאנו

$$f\left(z\right) = \frac{1}{z^2}g\left(z\right)$$

כאשר $g\left(z\right)$ אנליטית וגם $g\left(0\right)\neq0$ אז 0 - קוטר מסדר 2.

תרגיל $e^{\frac{1}{z}}$ מה סוג של הסינגולריות ב 0

פתרון $e^{\frac{1}{z}}$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}$$

משפט (רימן לסילוק נקודות סינגולריות) אם f אנליטית וחסומה בסביבה מנוקבת של z_0 אז z_0 נקודה סינגולרית סליקה של f.

הערה

$$\lim_{z\to z_0}f\left(z\right) = w\in\mathbb{C}$$

מציין נק' סינגולרית סליקה.

$$\lim_{z\to z_0}f\left(z\right) = \infty$$

מציין נק' סינגולרית פולרית.
אם הגבול לא קיים אז z_0 עיקרית.

נקודות אפס של פונקציה אנליטית נתון $f\left(z\right)$ אנליטית וידוע כי

$$f\left(z_0\right) = 0$$

נסמן n- סדר של 0 בנקודה z_0 אם

$$f\left(z\right) = \left(z-z_0\right)^n g\left(z\right)$$

וגם $g\left(z\right)$ אנליטית $g\left(z_0\right)\neq0$.
אז קיימים שני מקרים n סופי, $n=\infty$ ז"א $f\equiv0$

תרגיל f אנליטית בעגול יחידה וידוע

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| < e^{-n}$$

מצא את f.

$$\begin{aligned} |f(0)| &= \lim_{n\to\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0 \end{aligned}$$

ז"א $f(0)=0$ נניח כי הסדר של 0 סופי.

$$\begin{aligned} f(z) &= z^m g(z) \\ g(0) &\neq 0 \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n}\right)^m \left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right| &< e^{-n} \\ \Rightarrow \left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right| &\leq n^m e^{-n} \end{aligned}$$

אז $g(0)=0$ בסתירה להנחה.

תרגיל ב 23.1.2005

תרגיל

1. $\frac{1}{z+z^2}$
2. $\frac{z^2}{1+z^4}$
3. $\frac{1}{\sin \pi z}$

פתרון

1. הנקודות הסינגורליות $0,-1$ הם קוטב פשוט

$$\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{Q(z)}(z-z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

כאשר $P(z)\neq 0$ אז

$$\begin{aligned} Res\left(0,\frac{1}{z+z^2}\right) &= 1 \\ Res\left(-1,\frac{1}{z+z^2}\right) &= -1 \end{aligned}$$

2. אז נקודות סינגולריות $\sqrt[4]{-1}$ - 4 מספרים נמצא שארית

$$Res\left(\frac{z^2}{1+z^4},\sqrt[4]{-1}\right)|_{z=\sqrt[4]{-1}} = \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{-1}}$$

3. $\frac{1}{\sin \pi z}$ נקודות סינגולריות הם $z\in\mathbb{Z}$. הם קטבים פשוטים. נגזור את המכנה

$$\forall z\in\mathbb{Z};\pi\cos\pi z \neq 0$$

כלומר 0 פשוט במכנה. ולכן קוטב פשוט המכנה

$$\begin{aligned}\frac{P}{Q'} &= \frac{1}{\pi\cos\pi z}|_{z=n}\\ &= (-1)^n\frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

תרגיל חשבו $\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$ עבור $a\in\mathbb{R}^+$

פתרון

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}\end{aligned}$$

נגדיר $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ הפונקציה הזאת מזדהה על הישר. אז הסינגולריות היחידה ai. קוטב מסדר שנים. אז ניקח את הגבול

$$\begin{aligned}\lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2(z-ai)^2}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right)' &= \lim_{z\to ai}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right)'\\ &= \lim_{z\to ai}\frac{2z(z+ai)^2-2(z+a_u)z^2}{(z+ai)^4}\\ &= \lim_{z\to ai}\frac{2z(z+ai)-2z^2}{(z+ai)^3}\\ &= \lim_{z\to ai}\frac{2zai}{(z+ai)^3}\\ &= \frac{2(ai)^2}{8(ai)^3}=-\frac{i}{4a}\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned}\int_{I+II}\frac{z^2}{(z^2+a^2)}dz &= -2\pi i\frac{i}{4a}\\ &= \frac{\pi}{2a}\end{aligned}$$

אבל אם $degQ\geq DegP+2$ אז

$$\lim_{R\to\infty}\int_{II_R}\frac{P}{Q} = 0$$

תרגיל

$$a>0;I = \int_0^\infty\frac{x\sin x}{x^2+a^2}$$

חשב את האינטגרל

פתרון נשים לב כי

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx$$

$$I = \int_0^{\infty}\frac{Ime^{ix}}{x^2+a^2}$$

אז ניקח

$$\int_0^{\infty} Im\left(\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\right) = I$$

לכן

$$I = \frac{1}{2}Im\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2}\right)dx$$

ניקח נקודה סינגולרית

$$\int_{I+II}\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}dz = \lim_{R\to\infty}\int_{I+II} = 2\pi i\frac{e^{-a}}{2}$$

לפי הלמה של ז'ורדן

$$\lim_{R\to\infty}\int_{II}\frac{ze^{iz}}{z^2+a^2} = 0$$

לכן האינטגרל שווה

$$\frac{1}{2}2\pi e^{-2}\frac{1}{2} = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$

תרגיל $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)$ נבצע החלפת משתנים

$$\begin{aligned} e^{ix} &= z \\ \cos x &= \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \\ \sin x &= \frac{z-\frac{1}{z}}{2i} \\ dx &= \frac{-i}{z}dz \end{aligned}$$

נחשב ונקבל פתרון.

תרגיל חשבו $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}$

פתרון ניקח $\frac{x\sin x}{x^2+a^2}$ אז עבור a קטן מספיק הביטוי ישאף ל-0.

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x} - \int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\right| &= \left|\int_0^{\infty}\frac{\sin x\left(x^2+a^2\right)-x^2\sin x}{\left(x^2+a^2\right)x}\right| \\ &= \left|\int_0^{\infty}\frac{a^2\sin x}{\left(x^2+a^2\right)x}\right| \\ &\leq a^2\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+a^2}dx \\ &= a^2\frac{\pi}{2a} = \frac{\pi a}{2} \end{aligned}$$