תורת הפונקציות 1

פרופ. אהרונוב דב

סמסטר חורף 2004-5

$Id: function_theory.lyx,v 1.32 2005/01/25 08:09:52 itay Exp itay $

תוכן עניינים

1 מבוא

המרחב הקומפלקסי $\mathbb{C}$. ניתן לכתוב מספר קומפלקסי ע"י $z = x + iy$ וע"י $r > 0, z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

אריתמטיקה

1. ניתן לחבר שני מספרים כווקטורים

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \\ (z_1 + z_2) &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

2. כפל מדגים שמספרים קומפלקסים הם לא ממש ווקטורים

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ z_2 \neq 0, \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

הערה

1. עבור $z = x + iy$ יש יחידות גם של 0

$$z = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$$

2. עבור הצגה פולרית $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ אם $r = 0$ אז θ לא מוגדר, כמוכן בכל נקודה במישור $\theta = \theta + 2\pi$, לכן ההצגה של z בעזרת שיעורים קוטביים (קורדינטות פולריות) אני חד ערכית או $\arg(z)$ אינו חד ערכי.

יחידות ניתן להוציא מחסום (או הגבלה) שגורם להשגת יחידות. הגבלה הסטנדרטית לדוגמה $\theta \in (-\pi, \pi]$. לפי ההגבלה הסטנדרטית אנו מגדירים את

$$-\pi < Arg(z) \leq \pi$$

וקוראים למרחב שמתקבל הענף הראשי. הקשר בין הפונקציות

$$\exists k \in \mathbb{Z}; \arg(z) = Arg(z) + 2\pi k$$

הערות על $\mathbb{C}$

1. $\mathbb{C}$ ו- $\mathbb{R}^2$ קשורים

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= \{z | z = x + iy, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \\ \mathbb{R}^2 &= \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(ניתן גם לדבר על מרחבים שמקבילים ל $\mathbb{R}^n, n > 3$, אבל רמת הקושי בהגדרות עולה)

2. פונקציות מעל $\mathbb{C}$ עובדות על 4 ממדים $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ לכן אין דרך הצגה גרפית. הכי טוב שאנו יכולים לעשות זה להציג קבוצות (נק', קטעים, שטחים וכו') במקור על 2 ממדים. ולבדוק איזו קבוצה היא מועתקת בתמונה גם על גרף של 2 ממדים.

1.1 אינסוף וספירת רימן

מעל $\mathbb{R}$ קיימים $-\infty, \infty$

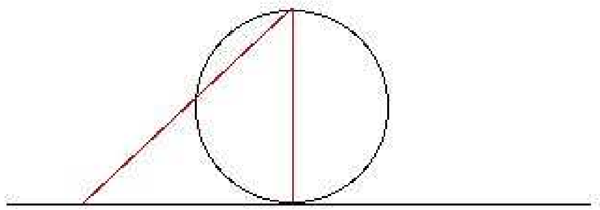
$$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$$

ניתן גם לדבר על $\hat{\mathbb{R}}$

$$\hat{\mathbb{R}} = \{x \mid x \in \{\mathbb{R}, -\infty, \infty\}\}$$

הטלה סטיוגרפית ניתן להתאים חח"ע ישר על מעגל ע"י הוספת ממד נוסף (באיור 1) בצורה זאת מעבירים קוים בין הקוטב הרחוק של המעגל לישר. איפה שהמעגל נחתך היא הנקודה המותאמת. במצב

איור 1: מירכוב



זה (מאחר שקוים מקבילים נפגשים ב-∞) ניתן להשלים את המעגל ע"י הגדרת הקוטב המרוחק כ-∞ וכך לאחד את שתי האינסוף של הישר.

הספירה של רימן באופן דומה על $\mathbb{C}$ ניתן ליצר ספירה על המישור הקומפלקסי ואז יהיה ניתן למפה כל נק' על המישור לנקודה על הספירה (חוץ מהקוטב הצפוני) באופן חח"ע ע"י העברת קו מהקוטב המרוחק (או הצפוני) לכל נק' על המישור. הספירה הזאת נקראת הספירה של רימן. באופן דומה ניתן להתאים את הקוטב הצפוני ל ∞ בצורה זאת מגדירים רק אינסוף אחד על הספירה. ואז המישור הסגור (הקומפקטי) הוא

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

דוגמה אם מגדירים $w = \frac{1}{z}$ אז $w = \frac{1}{0} = N = \infty$

תכונות של הטלה סטראו-גרפית (ללא הוכחה)

1. ניתן להוכיח שמעגל על ספירה עובר בהתלה סטראוגרפית למעגל או יש על המישור הקומפלקסי. ניקרא למעגל או ישר על המישור "מעגל מוכלל". המשוואה המתארת את המעגל המוכלל

$$A\left(x^2 + y^2\right) + Bx + Cy + D = 0$$

2. זווית נשמרת בהעתקה (זאת העתקה איזו-גונלית)

משפט נתונים שני קוים שנחתכים בנקודה אחת על הספירה ולשניהם יש משיקים ויוצרים בניהם זווית α אזי התמונות על $\mathbb{C}$ בהעתקה סטראוגרפית הם שני קוים במישור. יש להם משיקים בנקודת החיתוך על המישור המותאמת לנקודה בספירה והזווית בין הקווים α.

1.2 מטריקה על ספירה

אורך המיתר מתמונת z_1 לתמונת z_2 נסמן ב-$d(z_1,z_2)$

$$d(z_1,z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

נשים לב כי ניתן לדבר גל על המרחק בספירה לנקודה הצפונית N (אותה התאמנו ל-∞) אזי

$$\begin{aligned}\lim_{z_2\to N} d(z_1,z_2) &= \lim_{z_2\to N}\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}\\ &= \lim_{z_2\to N}\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_2|^2}}\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}\end{aligned}$$

1.3 סביבה על הספירה

הגדרות

תחום במישור: קבוצת נקודות במישור שהיא פתוחה וקשורה

סביבה: של נקודות במישור $\{z|\,|z-z_0|<\varepsilon\}$

סביבה בספירה מאחר ש ∞ היא כמו כל נקודה אחרת על הספירה ניתן להגדיר בטבעיות את הסביבה של ∞. במישור הקומפלקסי הסביבה הזאת מותאמת לחוץ של מעגל (עבור גבול, גדול כרצוננו)

תחום דו קשרי הוא תחום שבמשלים ישנם שני קומפוננטות. בתחום כזה ניתן למפות את ה"חוץ" של התחום בספירה למעגל שמכיל N.

1.4 הצגה פולרית

נגדיר $r=|z|\,,\theta=\arg(z)$ אזי

$$z = r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

קיים קשר

$$e^{i\theta} = \cos\theta+i\sin\theta$$

קשר זה מוכח באמצעות טור (הבעיה היא שבשלב זה של הקורס אנו לא יודעים עדין שנותן להעביר טורי חזקות לקומפלקסים)

הוכחה (בהנחה שניתן להעביר טורי חזקות לקומפלקסים)

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\
e^z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\\
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i)^n\,\theta^n}{n!}\\
&= 1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+,,,\\
&= \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-,,,\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+,,,\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\theta^{2n}}{(2n)!}+i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \cos\theta+i\sin\theta
\end{aligned}$$

1.4.1 דוגמאות לחקירת פונקציות

נחקור[1] את הפונקציה $w=z^2$ אזי אם $z=x+iy$ אז

$$\begin{aligned}
w &= (x+iy)^2\\
&= x^2-y^2+2ixy\\
(w=u+iv)\Rightarrow u &= x^2-y^2\\
v &= 2xy
\end{aligned}$$

- נגביל את $x=const$ (כלומר נבדוק העתקה של קווים אופקים)

$$\begin{aligned}
u &= c^2-y^2\\
v &= 2cy\\
u &= c^2-\frac{v^2}{4c^2}
\end{aligned}$$

עבור $c=0$

$$\begin{aligned}
u &= -y^2\\
v &= 0
\end{aligned}$$

מקבלים את החריץ השלילי.

- נגביל את $y=const$

$$\begin{aligned}
u &= x^2-c^2\\
v &= 2xc\\
u &= \frac{v^2}{4c^2}-c^2
\end{aligned}$$

[1] הרצאה 21.10.2004

עבור $c=0$

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

כלל קיבלנו העתקה קונפורמית.

- נדון בהצגה פולרית $z\left(r,\theta\right),w\left(\rho,\varphi\right)\ z=\left|r\right|,w=z^2$

$$\begin{aligned} \left|w\right| &= \left|r\right|^2 \\ w &= \rho e^{\varphi} \\ p &= r^2 \\ \arg\left(z\right) &= \theta \\ \varphi=\arg w=\arg\left(z^2\right) &= 2\theta \end{aligned}$$

לכן ניתן לדבר על מעגלים שגדלים עבור $r>1$ וקטנים עבור $r<1$ כמוכן יש הזה של הארגומנט. התמונה של כל המרחב מתקבלת מתחום של $-\pi<\theta\leq\pi,r\geq0$

1.5 פונקציות קומפלקסיות - רציפות

הגדרה $f\left(z\right)$ רציפה בנקודה z אס"ם עבור כל סדרה $\left\{z_n\right\}$ z $z_n\rightarrow_{n\rightarrow\infty}$, מתקיים $f\left(z\right)$ $f\left(z_n\right)\rightarrow_{n\rightarrow\infty}$

דוגמה $f\left(z\right)=u\left(x,y\right)+iv\left(x,y\right)$

$$f\left(z_n\right) = u\left(z_n\right)+iv\left(z_n\right)\rightarrow f\left(x\right)=u\left(z\right)+iv\left(z\right)$$

הערה $f\left(z\right)$ רציפה ב-$z=x+iy$ אס"ם $\Re\left(f\left(z\right)\right)=u\left(z,y\right),\Im\left(f\left(z\right)\right)=v\left(x,y\right)$ רציפות בנקודת $\left(x,y\right)$

1.6 גזירות

הגדרה נגדיר נגזרת כ-

$$\lim_{\substack{\Delta z\rightarrow0\\ z\neq0}}\frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z}=\ell\in\mathbb{C}$$

אם קיים הגבול אזי הוא הנגזרת ונסמנה ב $f^{'}$

דוגמה $w=z^2$

טענה הנגזרת קיימת בכל נקודה ומתקיים

$$w^{'} = 2z$$

הוכחה

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{z^2+2z\Delta z+\Delta z^2-z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ z\neq 0}}\frac{2z\Delta z+\Delta z^2}{\Delta z}$$
$$= 2z$$

הערה אם נשים לב $f(z+\Delta z)=w+\Delta w$ כלומר יש העתקה.

משפט אם[2] ל $f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ יש נגזרת בנקודה אזי מתקיימים משוואות **Couchy-Riemen**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

דוגמה נדגים עבור $w=z^2$

$$w = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i(2xy)$$
$$u_x = 2x = v_y$$
$$u_y = -2y = -v_x$$

הוכחה

1. נסמן

$$\Delta z = \Delta x + i0$$

אז

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta x)-f(z)}{\Delta x}$$
$$= \frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} - i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\substack{\Delta z=\Delta x\\ (\Delta x\neq 0)\\ \Delta x\to\infty}}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z)$$

[2] הרצאה ב 26.10.2004

2. מצד שני אם נסמן

$$\Delta z = 0 + i\Delta y$$

אז

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{f(z+i\Delta y)-f(z)}{i\Delta y} \\
&= \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y} - i\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y} \\
\lim_{\substack{\Delta z = \Delta x \\ (\Delta x \neq 0) \\ \Delta x \to \infty}} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = f'(z)
\end{aligned}$$

מהשוואת שני הביטויים נקבל

$$\begin{aligned}
f'(z) &= u_x + iv_x = \frac{1}{i}u_y + v_y \\
\Rightarrow u_x &= v_y \\
u_y &= -v_x
\end{aligned}$$

דיפרנציאבליות

$$\begin{aligned}
du &= u_x dx + u_y dy \\
\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + O\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)
\end{aligned}$$

אם מתקיים תנאי זה נאמר של $u(x,y)$ יש את תכונת הדיפרנציאבלית בנק' (x,y)

הערה אם ל $u(x,y)$ קיימות נגזרות $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ בנקודה (x,y) והן רציפות אזי ניתן להראות שתכונת הדיפרנציאבליות מתקיימת בנק' זו.

משפט נתונה $f(z) = f(x+iy) = u + iv$ שמוגדרת בנק' (x,y) ובסביבתה. אם ל u ו v יש את תכונת הדיפרנציאבליות בנקודה זאת ואם מתקיימות משוואות CR

$$\begin{aligned}
u_x &= v_y \\
u_y &= -v_x
\end{aligned}$$

בנקודה זאת אזי נובע של f קיימת הנגזרת $f'(z)$

הוכחה נסמן

$$\begin{aligned}
f(z+\Delta z) &= u(x+\Delta x, y+\Delta y) + iv(x+\Delta x, y+\Delta y) \\
f(z) &= u(x,y) + iv(x,y) \\
\Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\
&= u_x\Delta x + u_y\Delta y + O(|\Delta z|) + i[v_x\Delta x + v_y\Delta y] + O(|\Delta z|) \\
&= u_x\Delta x + u_y\Delta y + i[v_x\Delta x + v_y\Delta y] + O(|\Delta z|) \\
&= (u_x + iv_x)\Delta x + (u_y + iv_y)\Delta y + O(|\Delta z|) \\
&= (u_x + iv_x)\Delta x + \left(\frac{u_y}{i} + v_y\right)(\Delta y) + O(|\Delta z|)
\end{aligned}$$

לפי CR אזי

$$\begin{aligned} -u_y &= v_x \\ iv_x &= \frac{1}{i}u_y \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} &= \left(u_x+iv_x\right)\left(\Delta x+i\Delta y\right)+O\left(\left|\Delta z\right|\right) \\ \Delta f=f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right) &= \left(u_x+iv_x\right)\Delta z+O\left(\left|\Delta z\right|\right) \\ \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z}=u_x+iv_x+\frac{O\left(\left|\Delta z\right|\right)}{\Delta z} \\ \Rightarrow\frac{\Delta f}{\Delta z} &\rightarrow_{\Delta z\rightarrow\infty} u_x+iv_x \end{aligned}$$

לכן קיימת נגזרת ושווה ל u_x+iv_x.

■

הערה לפי CR אנו מקבלים

$$\begin{aligned} f^{'}\left(z\right) &= u_x+iv_x \\ &= v_y+iv_x \\ &= u_x-iu_y \\ &= v_y-iu_y \end{aligned}$$

דוגמה

$$f\left(z\right) = \left|z\right|^2=x^2+y^2$$

$$\begin{cases} u\left(x,y\right)=x^2+y^2 \\ v\left(x,y\right)=0 \end{cases}$$

אזי

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x,\frac{\partial u}{\partial y}=2y \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0,\frac{\partial v}{\partial y}=0 \end{aligned}$$

לכן עבור $x=y=0\Rightarrow f^{'}\left(z\right)$ כלומר קיים אך ורק בנקודה $z=0$
נשים לב שישנה הוכחה אלטרנטיבית לקיום הנגזרת $f\left(z\right)=\left|z\right|^2$ בנקודה $z=0$ ואומנם

$$\begin{aligned} \frac{f\left(z+\Delta z\right)-f\left(z\right)}{\Delta z} &= \frac{f\left(\Delta z\right)}{\Delta z}=\frac{\left|\Delta z\right|^2}{\Delta z} \\ &= \frac{\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\overline{\Delta z} \\ &\rightarrow_{\Delta z\rightarrow0} 0 \\ \Rightarrow\exists f^{'}\left(0\right) &= 0 \end{aligned}$$

הגדרה אם ל $f\left(z\right)$ יש נגזרת בכל נקודה של קבוצה A במישור Z נאמר ש f גזירה על A.
במיוחד f גזירה על תחום D (תחום=פתוחה וקשירה) אם"ם הוא גזירה בכל נקודה D.

הגדרה f אנליטית[3] בנקודה $z=z_0$ אם"ם ל-f יש נגזרת בנקודה z_0 ובסביבה של הנקודה z_0.

מסקנה אם f גזירה בתחום D אזי f אנליטית ב-D.

[3]שמות אלטרנטיביים לאנליטית: Holomorphic הולומורפית, Regular רגולרית,Analytic

1.6.1 פונקציות הרמוניות

הגדרה u פונקציה ב-n ממדים $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$ נאמר ש u הרמונית בתחום $D\subset\mathbb{R}^n$ אם התחום D מתקיים לפלסיאן

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)u=0$$

בשני ממדים משוואת לפלס $u_{xx}+u_{yy}=0$

כאשר לפלסיאן $\Delta; \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

מסקנה לפי CR

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{yx} \\ u_{yy} &= -v_{xy} \\ u_{xx}+u_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

כלומר החלק הממשי והמדומה של פונקציה אנליטית בתחום הן פונקציות הרמוניות.

משפט (נוכיח יותר מאוחר) אם לפונקציה $f(z)$ ישנה נגזרת אחת בתחום D, אזי קיימות לה כל הנגזרות.

נניח נתוני פונקציה הרמונית $u=u(x,y)$ בתחום D. אזי ניתן להשלים את u לפונקציה אנליטית ע"י משוואות CR.

משפט נתונה u הרמונית ב-D אם מתקיים

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_y \end{aligned}$$

אזי $u+iv$ אנליטית ב-D.

דוגמה להשלמה של פונקציה הרמונית לפונקציה אנליטית. ניקח

$$\begin{aligned} u(x,y)=\log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) &= \log r \\ u(x,y) &= \frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2)} \\ &= \frac{x}{(x^2+y^2)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2} \\ u_{xx} &= \frac{\left(x^2+y^2\right)-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ u_{yy} &= \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ u_{xx}+u_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

לכן $u=\log r$ הרמונית אם $r\neq 0$. נמצא את ההרמונית הצמודה ל u כלומר זו המקיימת

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

ואז $u+iv$ תהיה אנליטית.

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x}{x^2+y^2} = v_y \\ u_y &= \frac{y}{x^2+y^2} = -v_x \\ v &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c \end{aligned}$$

כאשר c ממשי שרירותי (קבוע)
אפשרות שני (שנראה בהמשך) $\log z = re^{i\theta} = \ln r + i\theta$ מאחר ש $\log$ אנליטית אז משוואות CR מתקיימות.

דוגמה $w = z^2 = x^2 - y^2 = 2xy$

$$u_{xx} = u_{yy} = 0$$

הפונקציה אנליטית ולכן הצמוד של $u = 2xy$ הוא $y^2 - x^2$. אפשרות שניה היא לפתור את

$$\begin{aligned} u_x &= 2u = v_y \\ u_y &= 2x = -v_x \\ v_y &= 2y \\ v &= y^2 + \psi(x) \\ v_x &= \psi'(x) = -2x \\ &= \psi(x) = -x^2 + c \\ v &= y^2 - x^2 + c \end{aligned}$$

חוק השרשרת חוק השרשרת[4] עבור $w = f(z), t = g(q)$ $t = (g \circ f)(z)$ מוגדרת

$$\frac{dt}{dz} = \left(\frac{dt}{dw}\right)\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

הוכחה מתוך הקיום של הנגזרות w', t' נובע קיום t'

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{\Delta z} &= \frac{\Delta t}{\Delta w}\frac{\Delta w}{\Delta z} \\ \Rightarrow t' &= t'(w)\, w'(z) \end{aligned}$$

הערה יותר מאוחר נוכיח שפונקציה $u = u(x,y)$ היא הרמונית בתחום D במישור (x,y) אם"ם u היא ממוצע של ערכיה על מעגל סביב הנקודה (x,y) במרכז.

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint u\left(x_0 + e^{i\theta}, y_0 + e^{i\theta}\right) d\theta$$

כנ"ל גם לפונקציה אנליטית.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{i\theta}\right) d\theta$$

[4] הרצאה ב-28.10.2004

הפרוש הגאומטרי של הנגזרת במישור המורכב $\mathbb{C}$ נניח γ_z קו שיוצא מהנקודה z_0. ושיש על המשיק אזי

$$\arg_{\Delta z\to 0}(\Delta z) \quad \to \quad arg\,(\|)$$

כאשר θ_{z_0} הארגומנט של המשיק בנקודה z_0 (כלומר של Δz

$$\arg(\Delta z) \quad \to_{\Delta z\to 0} \quad \theta_{z_0}$$

כמוכן בתמונה

$$\arg(\Delta w) \quad \to_{\Delta w\to 0} \quad \theta_{w_0}$$

נניח $w=f(x)$ מקיימת: קיימת נגזרת בנקודה $z=z_0$ וגם $f^{'}(z_0)\neq 0$ אזי

$$\begin{aligned}
f(z_0-\Delta z)-f(z_0) &= w^{'}(z_0)(\Delta z+O(|\Delta z|))\\
\Rightarrow \Delta w &= w^{'}(z_0)\Delta z+O(|\Delta z|)\\
\Delta w &= w^{'}(z_0)\Delta z\left(1+\frac{O(|\Delta z|)}{w'(z_0)\Delta z}\right)\\
\arg(\Delta w) &= \arg w^{'}(x_0)+\arg(\Delta z)+\arg\left(\frac{O(|\Delta z|)}{w'(z_0)\Delta z}\right)
\end{aligned}$$

נניח עתה, Δz שואף לאפס לאור הקו הנתון שסמנו ב-γ_{z_0}

$$\Rightarrow \theta_{w_0} \quad = \quad \arg w^{'}(z_0)+\theta_{z_0}$$

הערה נשים לב כי עבור שני עקומים שחותכים את המישור

$$\begin{aligned}
\theta_{w_0,1} &= \arg w^{'}(z_0)+\theta_{z_0,1}\\
\theta_{w_0,2} &= \arg w^{'}(z_0)+\theta_{z_0,2}\\
\Rightarrow \Delta\theta_{w_0} &= \Delta\theta_{z_0}
\end{aligned}$$

תכונת הקונפורמיות אם $f^{'}(z_0)\neq 0$ עבור $w=f(z)$ אזי קיימת קונפורמיות של הזווית. כלומר זווית בין שני קווים היוצאים מהנקודה z_0 (כאשר יש לשניהם משיק בנקודה) שווה לזווית בין שתי התמונות של קווים האלה במישור התמונה w.

הכללה נעבור למקרה היותר כללי $w^{'}(z_0)\neq 0$ אזי קיים פיתוח לטור טילור גם למקרה של פונקציה אנליטית (זה נראה יותר מאוחר)

$$f(z+\Delta z) \quad = \quad f(z)+f^{'}(z)\Delta z+\frac{f^{''}(z)}{2}\Delta z^2+,,,+\frac{f^{(n)}}{n!}\Delta z^n$$

נניח

$$f^{'}(z_0)=f^{''}(z_0)=,,,=f^{(n-1)}(z_0)=0$$

וגם $f^{(n)}\neq 0$ אזי

$$\begin{aligned}
\Delta w &= f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\\
&= \frac{f^{n}(z_0)}{n!}\Delta z^n+O(\Delta z^n)\\
&= f^{(n)}(z_0)\Delta z^n\left(1+\frac{O(\Delta z^n)}{f^{(n)}(z_0)\Delta z^n}\right)\\
\Delta w\to_{\Delta z\to 0}\theta_{w_0} &= \arg f^{(n)}(z_0)+n\theta_{z_0}
\end{aligned}$$

כלומר הזוית מוכפלת.

הערה

1. בכל מקרה אנו רואים סיבוב $\arg\theta_{w_0} = c + \arg\theta_{z_0}$
2. עבור $\left|f'\right|$

$$\begin{aligned}\Delta w &\sim f'\Delta z\\ |\Delta w| &\sim \left|f'\right|\Delta z\end{aligned}$$

ובאופן דיפרנציאלי

$$|dw| = \left|f'\right||dz|$$

2 חקירת פונקציות

הגדרה

1. פולינום[5] ממעלה n במשתנה מורכב z.

$$a_n \neq 0; P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$$

זו פונקציה אנליטית בכל המישור $\mathbb{C}$

2. פונקציה רציונלית $R_{n,m}$ היא מנה בין שני פולינומים

$$R_{n,m}(z) = \frac{p_n(z)}{p_m(z)}$$

ציטוט המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום ממעלה n במישור המורכב $\mathbb{C}$ יש בדיוק n שורשים ($n =$ שורשים)
כלומר כל פולינום ממעלה n ניתן לפרוק

$$p_n(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$$

מסקנה אם נתונים כל שורשי הפולינום כולל ריבוי אזי הפולינום נקבע עד כדי קבוע.

ציטוט פונקציה רציונלית $R_{n,m}$ מקבלת כל ערך במישור בדיוק אותו מספר פעמים.

2.1 העתקות Mobius (או העתקה בי-ליניארית או העתקות ליניאריות)

הגדרה העתקת Mobius היא פונקציה רציונלית $n, m = 1$.
מנה בן שני גורמים ליניאריים שאינה גודל קבוע

$$R_{1,1} = \frac{az+b}{cz+d}, \begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$$

טענה העתקת Mobius מקבלת כל ערך λ בדיוק פעם אחת במישור הסגור $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$

[5] הרצאה ב 2.11.2004

הוכחה נתון $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ונתון $Tz = \frac{az+b}{cz+d} = w$ אזי

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= w \\ az+b &= w(cz+d) \\ (a-wc)z &= wd-b \\ \frac{wd-b}{-wc+a} &= z \end{aligned}$$

נבדוק דטרמיננט $\begin{vmatrix} d & -b \\ c & a \end{vmatrix} = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$
קיבלנו העתק Mobius הפוך.

מסקנות אם $w = Tz$ הוא העתק Mobius אז

1. ההעתק ההפוך $z = T^{-1}w$ קיים וגם הוא העתק Mobius
2. נניח w_0 הוא כזה שמתקיים

$$\begin{aligned} z(a-w_0) &= w_0d-b \\ a-w_0c &= 0 \\ a &= cw_0 \\ w_0 &= \frac{a}{c} \\ w &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{z\left(a+\frac{b}{z}\right)}{z\left(c+\frac{d}{z}\right)} \\ &= \frac{z\left(a+\frac{b}{z}\right)}{z\left(c+\frac{d}{z}\right)} \xrightarrow{z\to\infty} \frac{a}{c} \end{aligned}$$

לכן נשלים ע"י $w(\infty) = \frac{a}{c}$

3. עבור $c=0$ אזי $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{a}$ ולכן העתקה ליניארית היא העתקת Mobius. ששומרת

$$w(\infty) = w(\infty)$$

סיכום העתקת Mobius מעתיקה את המישור המורחב $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ באופן חח"ע ועל כאשר התמונה היא המישור המורכב $\hat{\mathbb{C}}$.

הערה

1. העתקות Mobius נקראות גם בי-ליניאריות כאשר הכוונה לשני חלקי השבר ליניארים
2. העתקות Mobius נקראות גם ליניאריות:
עבור העתקה Mobius

$$\begin{aligned} Tz &= w \\ Tz &= \frac{az+b}{cz+d}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

נציב $z = \frac{z_1}{z_2}, w = \frac{w_1}{w_2}$ קואורדינטות הומוגניות

$$z(z_1, z_2), \infty(0,1)$$

אזי

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{a\frac{z_2}{z_1}+b}{c\frac{z_2}{z_1}+d} = \frac{az_2+bz_1}{cz_2+dz_1}$$

נגדיר

$$\begin{aligned} w_2 &= az_2+bz_1 \\ w_1 &= cz_2+dz_1 \end{aligned}$$

נציג בצורה שונה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$$

כאשר אנו יודעים $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ומגדירים $z = \frac{z_2}{z_1}, w = \frac{w_2}{w_1}$. כלומר קיבלנו צורה של העתקה ליניארית. לדוגמה המשפט שאומר שלכל העתקת Mobius יש הפוך נובעת מיד מהצורה הליניארית

$$\vec{w} = A\vec{z}, |A| \neq 0$$

ולכן

$$\vec{z} = A^{-1}\vec{w}$$

טענה אוסף העתקי Mobius מהווה חבורה (מהצורה הליניארית אנו רואים שהעתקות Mobius הם גם חבורה)

הוכחה

1. עבור $\vec{w} = A\vec{z}, \vec{\xi} = B\vec{w}$ אזי יש סגירות $\vec{\xi} = (BA)\,\vec{z}$
2. יש אדיש.
3. יש הפוך (הראינו כבר)

הערה אין יחידות של ההצגה הזאת $\forall\lambda \in \mathbb{C}; \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ נותן אותה העתקה של $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
ניתן להגביל ל $|A| = 1$ ואז עד כדי סימן הגבלנו את מספר המטריצות השונות שמגדירות את אותה העתקה.

טענה כל העתקת Mobius ניתן לפרק ל"שרשרת" של העתקים יסודיות: (או העתקות אלמנטריות)

1. הכפלה בקבוע
   (א) הגדלה $\vec{w} = \rho\vec{z}$
   (ב) סיבוב $\vec{w} = e^{i\theta}\vec{z}$ כאשר θ ממשי (סיבוב בזווית $0 \le \theta < 2\pi$)

   באופן אחר $z \to \lambda z$ כאשר $\lambda \in \mathbb{C}; \lambda = \rho e^{i\theta}$ מכיל את שני העתקות ביחד
2. הזזה בקבוע מורכב $z \to z + b$
3. היפוך $z \to \frac{1}{z}$

הוכחה נתונה העתקה $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,$w = \frac{az+b}{cz+d}$ נבחין במספר מקרים

1. $c=0$

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d} \\ z &\xrightarrow{(1)} \left(\frac{a}{d}\right)z \\ \left(\frac{a}{b}\right)z &\xrightarrow{(2)} \left(\frac{a}{d}\right)z+\frac{b}{d} \end{aligned}$$

2. $c\neq 0$ ניתן לפרק את w לשברים חלקים

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{\lambda+(\mu c)z+\mu d}{cz+d} \\ \mu c &= a \\ \mu &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

נציב

$$\begin{aligned} \lambda+\mu d &= b \\ \lambda+\frac{a}{c}d &= b \\ \lambda &= \frac{bc-ad}{c} \end{aligned}$$

קיבלנו $w=\frac{\lambda}{cz+d}+\mu$ ואז

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d} \\ w &= \frac{\lambda}{cz+d}+\mu \\ z &\to cz+d \xrightarrow{(3)} \frac{1}{cz+d} \to \frac{\lambda}{cz+d}+\mu \end{aligned}$$

משפט מעגל[6] מוכלל עובר למעגל מוכלל בהעתקת Mobius

הוכחה משוואת מעגל מוכלל

$$A,B,C,D\in\mathbb{R}; A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D = 0$$

כאשר אם $A=0$ זה ישר ואם $A\neq 0$ זה מעגל. נרשום בקואורדינטות קוטביות

$$Ar^2+B\left(r\cos\theta\right)+C\left(r\sin\theta\right)+D = 0$$

צ"ל כל ההעתקות האלמנטריות מעתיקות מעגל מוכלל למעגל מוכלל.
למעשה ההעתק היסודי היחיד שיש לבדוק הוא ההיפוך כלומר $w=\frac{1}{z}$:
נסמן $w=\rho e^{i\varphi}; z=re^{i\theta}$ אזי עבור $r\neq 0$

$$w = \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \rho=\frac{1}{r},\varphi=-\theta$$

[6] הרצאה ב 4.11.2004

אזי

$$\begin{aligned} A\frac{1}{\rho^2}+B\left(\frac{1}{\rho}\cos\varphi\right)-C\left(\frac{1}{\rho}\sin\varphi\right)+D &= 0\\ A+B\left(\rho\cos\varphi\right)-C\left(\rho\sin\varphi\right)+D\rho^2 &= 0\\ D\rho^2+B\left(\rho\cos\varphi\right)+\left(-C\right)\left(\rho\sin\varphi\right)+A &= 0\end{aligned}$$

עבור $r=0$ אז $z=0\to\omega=\infty$. משפחת המעגלים (המוכללים) שעוברים דרך הראשים במישור z עוברים למשפחת ישרים במישור w

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{z}\\ Ar^2+B\left(r\cos\theta\right)+c\left(r\sin\theta\right)+D &= 0\end{aligned}$$

ועבור מעגל מוכלל שעובר בראשית $D=0$ ואז

$$B\left(\rho\cos\varphi\right)+\left(-c\right)\left(\rho\sin\varphi\right)+A = 0$$

מתקבל ישר.

הערה כל המעגלים שמכילים את ∞ במישור z כלומר ישרים יעבור ע"י העתקה $w=\frac{1}{z}$ למשפחת המעגלים המוכללים שעוברים דרך הראשית.

הגדרה היחס הכפול

$$(a,b,c,d) = \frac{\left(\frac{a-c}{a-d}\right)}{\left(\frac{b-c}{b-d}\right)}=\frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)}$$

משפט היחס הכפול נשמר בהעתקת Mobius כלומר

$$(z_1,z_2,z_3,z_4) = (w_1,w_2,w_3,w_4)$$

הוכחה צ"ל

$$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)} = \frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)}$$

נניח $i=1,2,3,4; z_i\neq\infty$ ונפריד לכל ההעתקות האלמנטריות

1. בהזזה יש לנו משהו חזק יותר

$$\forall i,j=1,2,3,4; (w_i-w_j) = (z_i+\lambda)-(z_j+\lambda)=(z_i-z_j)$$

ולכן גם מתקיים היחס הכפול.

2. הכפלה קבוע

$$\begin{aligned}\forall i,j=1,2,3,4; (w_i-w_j) &= \lambda z_i-\lambda z_j\\ &= \lambda(z_i-z_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\frac{w_1-w_3}{w_1-w_4} &= \frac{\lambda(z_1-z_3)}{\lambda(z_1-z_4)}\\ &= \frac{z_1-z_3}{z_1-z_4}\\ \frac{w_2-w_4}{w_2-w_3} &= \frac{\lambda(z_2-z_4)}{\lambda(z_2-z_3)}\\ &= \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3}\end{aligned}$$

3. היפוך $w=\frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}\frac{(w_1-w_3)(w_2-w_4)}{(w_1-w_4)(w_2-w_3)} &= \frac{\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_4}\right)}{\left(\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_4}\right)\left(\frac{1}{z_2}-\frac{1}{z_3}\right)}\\ &= \frac{\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{z_1z_2z_3z_4}}{\frac{(z_4-z_1)(z_3-z_2)}{z_1z_2z_3z_4}}=\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\end{aligned}$$

נשאר להוכיח מה קורה אם אחד הנקודות $z_i=\infty$

הגדרה α,α^* אינוורסיות ביחס למעגל C_z אם"ם

$$\begin{aligned}|\alpha-a|\,|\alpha^*-a| &= R^2\\ \arg(\alpha-a) &= \arg(\alpha^*-a)\end{aligned}$$

הגדרה שקולה $\{\alpha,\alpha^*\}$ אינוורסיות ביחס ל C_z אם"ם

$$(\alpha-a)\overline{(\alpha^*-a)} = R^2$$

(נקודות אינוורסיה במעגל הם נקודות בתוך ומחוץ למעגל כך שהן על אותו קרן וגם $d_1d_2=R^2$)

הוכחה (שקילות)

$$\begin{aligned}\arg(\alpha-a) &= \theta\\ \arg(\alpha^*-a) &= \theta_1,\arg\overline{(\alpha^*-a)}=-\theta_1\\ R^2>0\Rightarrow\arg\left(R^2\right)=0 &= \arg(\alpha-a)+\arg\overline{(\alpha^*-a)}\\ \theta-\theta_1 &= 0\end{aligned}$$

דוגמה מקרה פרטי בעיגול היחידה $R=1,a=0$

$$\Rightarrow\alpha^* = \frac{1}{\overline{\alpha}}$$

הערה ניתן למצוא את α^* האינוורסיה של α ביחס למעגל C_z שרדיוסו R ע"י

$$\alpha^* = \frac{R^2}{\overline{\alpha-a}}+a$$

משפט העתקת Mobius שומרת על אינוורסיה ביחס למעגל מוכלל.

הוכחה נדבר על מעגל ממש

טענה כל המעגלים שעוברים דרך a,a^* (כלומר שני נקודות אינוורסיה ביחס למעגל) הם כולם אורתוגונליות למעגל.

הוכחה בגאומטריה (איור 2).

מעגל עובר למעגל נתון כדור ונתונה נקודה חיצונית למעגל. אזי לכל קרן שיוצאת מהנקודה וחותכת את המעגל אז המרחק מהנקודה לנק' החיתוך הראשונה כפול המרחק מהנקודה לנק' החיתוך השנייה שווה לריבוע המרחק למשיק הקטן למעגל. כלומר[7]

$$d^2 = |\alpha - a|\,|\alpha^* - a|$$

וע"פ הגדרת האינוורסיה גם

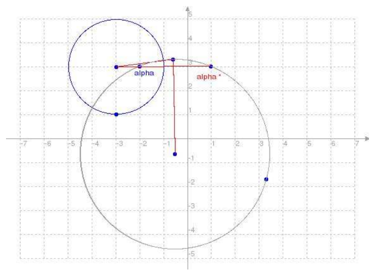
$$R^2 = |\alpha - a|\,|\alpha^* - a|$$

כלומר

$$d^2 = R^2$$

והמרכז המעגל הוא הנקודה, בגלל הקונפורמיות היחס הזה נשמר (מעגל עובר למעגל)

איור 2: איור של אינוורסיה



מעגל עובר לישר מעגלים וישרים עוברים למעגלים וישרים והזוויות נשמרות (קונ-פורמיות) כלומר עם מעגל עובר לישר המעגל המשיק חייב לעבור למעגל נחתך ע"י הישר במרכז. ולכן יש סימטריה.

הערה מרכז מעגל לא בהכרח עובר למרכז מעגל (לדוגמה בהיפוך)

דוגמאות

1. מצא העתק $Mobius$ שמעביר $j = 1, 2, 3; z_j \to \omega_j$

$$w_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d}$$

אז יש שלוש פרמטרים ושלוש נעלמים.
דרך שניה, היחס הכפול.

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3)$$

2. מצא את העתקת $M\ddot{o}bius$ בכללית ביותר שמעביר את עיגול היחידה במישור z לעיגול היחידה במישור w.

פתרון 1 לוקחים שלוש נקודות כלשהן על המעגל ומעתיקים למעגל היחידה עם שמירת מגמה. כך שפנים עובר לפנים. כלומר

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} &\to e^{i\varphi_1} \\ e^{i\theta_2} &\to e^{i\varphi_2} \\ e^{i\theta_3} &\to e^{i\varphi_3} \end{aligned}$$

[7] הרצאה ב 9.11.2004

פתרון 2 נתונה נקודה α פנימית לעיגול נניח עוברת ל β פנימית לעיגול. אז אינוורסיות עוברות לאינוורסיות כלומר $\frac{1}{\overline{\beta}} \to \frac{1}{\overline{\alpha}}$ אזי

$$\frac{w-\beta}{w-\frac{1}{\overline{\beta}}} = \lambda\left(\frac{z-\alpha}{z-\frac{1}{\overline{\alpha}}}\right)$$

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\beta}\,(w-\beta)}{\overline{\beta}w-1} &= \lambda\frac{\overline{\alpha}\,(z-\alpha)}{(\overline{\alpha}z-1)}\\ \frac{w-\beta}{\overline{\beta}w-1} &= \left(\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\lambda\right)\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}\end{aligned}$$

כאשר $\mu = \left(\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\lambda\right)$ פרמטר חופשי כי λ היה פרמטר חופשי.

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\neq 0, |\alpha|<1\\ \beta\neq 0, |\beta|<1\end{array}\right) \Rightarrow \frac{w-\beta}{\overline{\beta}w-1} = \mu\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$$

אזי

$$\begin{aligned}\left(z=e^{i\theta}\right) \Rightarrow \frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{i\theta}\left(e^{-i\theta}-\overline{\alpha}\right)} &= \frac{e^{i\theta}-\alpha}{1-\overline{\alpha}e^{i\theta}}\\ \Rightarrow \left|\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}\right| &= 1\\ \frac{w-\beta}{\overline{\beta}w-1} &= 1\\ \Rightarrow |\mu| &= 1\end{aligned}$$

לכן

$$\frac{w-\beta}{\overline{\beta}w-1} = e^{iu}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$$

ההעתקה הכללית ביותר של עיגול היחידה על עצמו.
העתקה תלת פרמטרית (ממשים)

הערות (עבור שמירה על מעגל היחידה)

1. עבור $\alpha=0, \beta=0$ נקבל רק סיבוב $w=e^{i\theta}z$.
2. עבור בחירה של נקודה עוברת לעצמה ונקודה על המעגל עוברת לעצמה מקבלים זהות
3. עבור $\beta=0$

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

גם התיאור הזה הוא העתקה כללית ביותר של מעגל היחידה על עצמו.

4. עבור $w=f(z)$ $(mobuis)$ אזי

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} &= \frac{e^{i\theta}\left(1-\overline{f(a)}f(z)\right)}{1-\overline{\alpha}z}\\ f^{'}(\alpha) &= \frac{e^{i\theta}\left(1-|f(\alpha)|^2\right)}{1-|\alpha|^2}\end{aligned}$$

אזי

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}$$
$$\frac{|dw|}{1-|w|^2} = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$$

כלומר קיבלנו תכונת אינוריאנטיות נוספת של העתק מביוס. (זה נקרא מטריקה של פואקרה)

2.2 פונקציות אלמנטריות

הפונקציה האקספוננציאלית $w = e^z$ בינתיים[8] הגדרנו $e^{i\theta} \triangleq \cos\theta + i\sin\theta$ (ונראה מאוחר יותר לפי טורים שזה נכון). הוכחנו גם

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$$

אזי נגדיר

$$z = x+iy; e^z = e^{x+iy} \triangleq e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

חקירה $w = e^z = e^x\cos\theta + ie^x\sin\theta$ אזי

$$w = u+iv$$
$$u = e^x\cos\theta$$
$$v = e^x\sin\theta$$

נבדוק CR

$$u_x = e^x\cos\theta$$
$$v_y = e^x\cos\theta$$
$$v_y = e^x\sin\theta$$
$$-u_x = e^x\sin\theta$$

ודיפרנציאביליות לכן ל e^z יש נגזרת $f^{'}(z) = u_x + iv_x$ ואז

$$w^{'} = e^x\cos\theta + ie^x\sin\theta = w$$
$$(e^z)^{'} = e^z$$

הערה באופן לא פורמלי נשים לב כי

$$"z = \log w"$$
$$\frac{dw}{dz} = w$$
$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{w}$$

(לא פורמלי כי לא הגדרנו עדין את log)

[8] הרצאה ב-11.11.2004

תכונות נוספות

1. $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$ מאחר הקומטטיביות של $\exp$

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}e^{iy_1}e^{x_2}e^{iy_2} \\ &= e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

2. $m\in\mathbb{Z}; e^{z+2mi\pi}=e^{z}$ אזי

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi im} &= e^{z}e^{2\pi im} \\ &= e^{z}\left(\cos\left(2\pi im\right)+i\sin\left(2\pi im\right)\right) \\ &= e^{z} \end{aligned}$$

הערה לפונקציה e^{z} יש מחזור $f\left(z+2mi\pi\right)=f\left(z\right)$

טענה הפונקציה e^{z} מעתיקה לכל המישור חוץ מ 0.
מספי להוכית. קבוצה $z=\left(z|z=x+iy,-\pi<y\leq 2\pi,x\in\mathbb{R}\right)$ אז $e^{z}:z\mapsto\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$

הוכחה

$$\begin{aligned} \rho e^{i\phi} &= w=e^{x+iy}=e^{x}e^{iy} \\ \rho &= e^{x} \\ \phi &= y \end{aligned}$$

לכל נקודה $u,v\in\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\}$ אזי

$$\begin{aligned} \sqrt{u^2+v^2}=\rho &= x \\ \phi &= y \end{aligned}$$

כלומר לכל מעגל במרחק ρ אז $\phi=y\in\left(-\pi,\pi\right]$ אזי מחסה את כל נקודות המעגל.
לכל לכל נקודה בתמונה ניתן להתאים $\rho>0$ ואז θ קיים כך ש $\rho e^{i\theta}=u+iv$ והרי

$$\forall\rho>0;\exists x\in\mathbb{R};e^{z}=\rho$$

הערה הפונקציה מעבירה $y=const,x\in\mathbb{R}$ לקרניים בזווית e^{iy} וגם $y\in\mathbb{R},x=const$ למעגל.

הערות

1. כל[9] $k\in\mathbb{Z};Imz=\left(-\pi+2\pi i,\pi+2\pi i\right]$ מועתק לכל המישור. כלומר הפונקציה ההפוכה היא חח"ע עבור העתקה לענף הראשי

$$\begin{aligned} z &= Logw \\ Log:\mathbb{C}\backslash\left\{0\right\} &\mapsto \left\{x+iy|x\in\mathbb{R},-\pi<y\leq\pi\right\} \end{aligned}$$

2. משטח רימן ניתן להגדיר משטח באופן $\left\{xe^{iy}|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\right\}$ כלומר יש משטח שמורכב מהרבה עלים ואז בהגדרה $\left(\rho,\varphi\right)\neq\left(\rho,\varphi+2\pi\right)$

---

[9] הרצאה ב 16.11.2004

הפונקציה הלוגריתמית

הגדרה עבור $W=\{x+iy|x\in\mathbb{R},-\pi<y\leq\pi\}$ אזי $e^{w}=z$; $w\in W,z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ הפונקציה ההפוכה

$$\begin{aligned}Log:\mathbb{C} &\mapsto W\\ z=\rho e^{i\varphi};Log\left(z\right) &= \ln\rho+i\varphi\end{aligned}$$

זה הצמצום לענף הראשי. אם נגביל $W=\{x+iy|x\in\mathbb{R},-\pi<y<\pi\}$ כלומר נשמיט את הקרן $-\pi$ נקבל בנוסף רציפות

הגדרה ענף של פונקציה רב ערכית הוא זוג (D,f) כאשר D הוא תחום הגדרה נתון של f ואוסף הערכים של f בתחום D שנסמנם f_0 ייצור פונקציה חד ערכית ורציפה בתחום הנ"ל. היא פונקציה אנליטית בתחום מסוים ורציפה בתחום זה.

הערה ניתן ליצור ענף (לדוגמה ב $\log$) עבור חריץ כלשהו בין 0 ל ∞.

הגדרה עבור $W=\mathbb{C},Z=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ אז

$$w\in\mathbb{W},z\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{Z};\log w = Logw+2\pi ik$$

דוגמה ענף אחד של $\log$ היא לדוגמה מעתיקה $0\to1$ ואז $k=0$ וקיבלנו חזרה את לוג, או למשל $1\to2\pi i$ ע"י $\log+2\pi i$.

תכונה מתוך התכונה

$$w_1=e^{z_1},w_2=e^{z_2};w_1w_2=e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$$

אנו מקבלים $\log w_1w_2=\log w_1+\log w_2$

הערה לא ניתן לצמצם ל $Logw_1w_2=Logw_1+Logw_1$ מאחר ש w_1w_2 יכול להיות מחוץ לענף הראשי.

פונקציית סינוס

תזכורת נוסחאות אוילר

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned}$$

הגדרה נגדיר $\sin Z$ ע"י

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\\ \sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\end{aligned}$$

תרגיל נראה קשר יסודי $\sin\left(z_1+z_2\right)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$

הערה נסתכל על $\sin\left(x+iy\right)$ כאשר $z_1=x,z_2=iy$ ואז

$$\begin{aligned}\sin\left(x+iy\right) &= \sin x\cos iy+\sin iy\cos x\\ &= \sin x\frac{e^{iiy}+e^{-iiy}}{2}+\cos x\frac{e^{iiy}-e^{-iiy}}{2i}\\ &= \sin x\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}+\cos x\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\\ &= \sin x\cosh y+i\cos x\sinh y\end{aligned}$$

כאשר

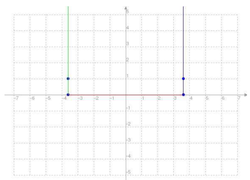
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2i}$$

קיבלנו הגדרה חדשה לפונקציה

$$\begin{aligned} z = x + iy; \sin z &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ (w = u + iv) \Rightarrow u &= \sin x \cosh y \\ v &= \cos x \sinh y \end{aligned}$$

תכונה　חצי רצועה $\left\{x + iy \middle| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right\}$ (איור 3) עוברת לחצי המישור העליון.

איור 3: חצי רצועה של סינוס היפרבולי



מאחר[10] ש $\sin x$ יש נגזרת משתנה בין $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ולכן בתמונה של הקו נמרחת במרכז ומתכווץ בצדדים.

עיקרון השיקוף אם יש פונקציה אנליטית בתחום D שיש לא חלק משפה ישר מוכלל אז השיקוף של התחום עובר לשיקוף או לאינוורסיה של התמונה.

הערה　לכן ניתן להכליל את הרצועה לכל המישור לפי עיקרון השיקוף.

הערה　נבדוק $(-x_0, x_0)$

$$\begin{aligned} u &= \sin x_0 \cosh y \\ v &= \cos x_0 \sinh y \end{aligned}$$

אזי לפי זהות

$$\begin{aligned} \left(\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1\right) \Rightarrow \frac{u^2}{\cos^2 x_0} - \frac{v^2}{\sin^2 x_0} &= 1 \\ \left(\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0\right) \Rightarrow c = \pm 1; a^2 + b^2 &= c \end{aligned}$$

לכן הישרים $x = x_0$ עוברים להיפרבולות. והישרים $y = y_0$ עוברים למשפחה א"ג כלומר לאליפסות.

פונקציית $w = z^\alpha$

הגדרה　$w = z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ אזי

$$\begin{aligned} w &= e^{\alpha \log z} \\ (k \in \mathbb{Z}) &= e^{\alpha(LogZ + 2\pi i k)} \\ &= e^{\alpha(\ln r + i\theta + 2\pi i k)} \end{aligned}$$

---

[10] הרצאה ב 18.11.2004

מקרים פרטיים

1. $\alpha = m \in \mathbb{Z}$ אזי

$$\begin{aligned} w &= e^{m(\ln r + i\theta + 2\pi i k)} \\ &= e^{m \ln r} e^{m i \theta} e^{m 2\pi i k} \\ &= r^m e^{i\theta m} = \left(re^{i\theta}\right)^m = z^m \end{aligned}$$

2. $(m,n) = 1$ ל-m,n אין גורם משותף.
$\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} z^\alpha &= e^{\frac{m}{n}(\ln r + i\theta + 2\pi i k)} \\ &= e^{\frac{m}{n}\ln r} e^{\frac{m}{n} i\theta} e^{\frac{m}{n} 2\pi i k} \\ &= \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{m}{n}} e^{\frac{m}{n} 2\pi i k} \end{aligned}$$

מקבלים $n-1$ שורשי יחידה.

3 אינטגרציה במישור המורכב

תיאור פרמטרי של עקום במישור עבור[11] $t \in [0,1]$ אז קיימת פונקציה קומפלקסית $\varphi(t)$ רציפה שמתארת עקום.

$$\varphi(0) = z_0, \varphi(1) = z_1$$

הגדרות (לא פורמלית)

1. קו אוריאנטבילי - קו שומר על מגמה.
2. קו שאינו חותך את עצמו

$$\begin{matrix} \forall t_1, t_2 \in [0,1] \\ t_1 \neq 0 \end{matrix} \quad ; \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

3. לאותו הקו יכול להיות תיאור פרמטרי שונה.
4. קו סגור $\varphi(0) = \varphi(1)$, יכול לא לחתוך את עצמו בשאר קו

$$\begin{matrix} \forall t_1, t_2 \in (0,1) \\ t_1 \neq 0 \end{matrix} \quad ; \varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$$

5. עקום אוריאנטבילי שלא חותך את עצמו פרט אולי בקצוות יקרא קו זורדן
6. קו חלק (Smooth) - לכל נקודה $\varphi(t_0)$ יש לעקום משיק.
7. קו חלק לחלקים (למקוטעין=Piecewise smooth) - חלק פרט למספר סופי של נקודות.

הערה נעסוק בעיקר קו ז'ורדן.

תזכורת (משפט גרין) c קו זורדן סגור וחלק למקוטעין. $P,Q : D \mapsto \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}^2$ וגם $P,Q \in C^1\left(\overline{D}\right)$

$$\oint_c (Pdx + Qdy) = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

[11] 23.11.2004

הגדרה תהי $f(z)$ פונקציה קומפלקסית רציפה על $c[z_0, z]$ קו זורדן. (נניח שהתמונה לא חותכת את עצמה) נייצר חלוקה של הקו לפי הפרמטר $(t_0, t_1, t_2 \ldots t_n)$ כך שעל העקום

$$(z_0 \leq k_0 \leq z_1 \leq k_1 \leq z_2 \leq \ldots z_n)$$

(לפי האוריאנטביליות לא יהיה שינוי מגמה) (נניח שהתמונה אוריאנטבילית). נדרוש

$$\max|z_j - z_{j-i}| \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad 0$$

תזכורת יהי פונקציה (ממשית), עקום וחלוקה כנ"ל נגדיר סכום רימן לפי

$$\sum_{j=1}^{n} f(k_{j-1})(x_j - x_{j-1}) \xrightarrow{n\to\infty} I$$

הגדרה קו זורדן שמחבר את z_0, z נקראה בעל אורך אם נבנה את כל החלוקות האפשריות (לא בהכרח תקינות) ומקיים

$$\forall p = (z_0, z_1, z_1 \ldots z)\,; \lim_{n\to\infty} \sup_p \sum_{j=1}^{n} |z_j - z_{z-1}| \quad = \quad \ell \in (\mathbb{R})$$

הגדרה יהי פונקציה f קומפלקסית, עקום $\varphi(t)$ זורדן בעל אורך וחלוקה (תקינה) כנ"ל אז נגדיר אינט-גרל

$$\sum_{j=1}^{n} f(k_{j-1})(z_i - z_{i-1}) \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad I$$

הערה דרך אלטרנטיבית הגדרת אינטגרל קומפלקסי בעזרת פרמטר ממשי. ע"י

$$(f \circ \varphi)(t) \quad = \quad f(\varphi(t))$$

אינטגרל בלתי תלוי בדרך

דוגמאות

1. עבור $f(z) = 1$ נראה $\int_{z_0}^{z} 1dz$ אינו תלוי בדרך. נבחר p_n ונבצע עידון כך ש $p_n \subset p_{n+1}$ וגם סדרה תקינה של חלוקות $\lim_{n\to\infty} \max_j |z_j - z_{j-i}| = 0$. אז

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (z_j - z_{j-1}) &= (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) \\ &= z - z_0 \\ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (z_j - z_{j-1}) &= z - z_0 \end{aligned}$$

2. עבור $f(z) = z$ נראה $\int_{z_0}^{z_1} zdz$ בלתי תלוי בדרך

$$\sum_{j=1}^{n} f(t_{j-1})(z_j - z_{j-1}) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} t_{j-1}(z_j - z_{j-1})$$

נבחר $t_j = z_j$ ואז

$$= \sum_{j=1}^{n} z_j \left(z_j - z_{j-1}\right)$$

וגם $t_j = z_{j-1}$ ואז

$$= \sum_{j=1}^{n} z_{j-1} \left(z_j - z_{j-1}\right)$$

נחבר את שני החלוקות (ונקבל פעמים האינטגרל)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} z_j \left(z_j - z_{j-1}\right) + \sum_{j=1}^{n} z_{j-1} \left(z_j - z_{j-1}\right) &= \sum z_j^2 - z_{j-1}^2 \\ &= z^2 - z_0^2\end{aligned}$$

כלומר הגבול

$$\begin{aligned}2I &= z^2 - z_0^2 \\ I &= \frac{z^2 - z_0^2}{2}\end{aligned}$$

3. הפונקציה $f(z) = Re(z) = x$ האינטגרל כן תלוי בדרך לדוגמה בין $(0,0), (x_0, y_0)$ נבחר אינטגרל לאורך הקטעים בין החלוקות

$$\gamma_1 = \left((0,0), (0, y_0), (x_0, y_0)\right)$$

וגם

$$\gamma_2 = \left((0,0), (x_0, 0), (x_0, y_0)\right)$$

ניתן להגדיר אינטגרל ע"י

$$\begin{aligned}\int f(z)\,dz &= \int (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int (udx - vdy) + i \int vdx + udy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} xdz &= \int_{(0,0)}^{(x_0,0)} xdz + \int_{(x_0,0)}^{(x_0,y_0)} xdz \\ &= \frac{x_0^2}{2} + ix_0y_0 \\ \int_{\gamma_1} xdz &= \int_{(0,0)}^{(0,y_0)} xdz + \int_{(0,y_0)}^{(x_0,y_0)} xdz \\ &= i\frac{x_0^2}{2}\end{aligned}$$

משפט נתונות הפונקציות P, Q רציפות בתחום D פשוט קשר במישור Z. יהי נתון אוסף קשתות $c[z_0, z]$ גזירות שנמצאות ב-D. העקומים חלקים במובן שיש $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ בכל נקודה. אז

$$\int pdx + qdy$$

בלתי תלוי בדרך אם"ם קיימת פונקציה $F=F\left(x,y\right)$ כך ש

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= P\left(x,y\right) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= Q\left(x,y\right) \end{aligned}$$

הוכחה

1. כיוון[12] אחד.
נניח שהאינטגרל ב"ת בדרך c צ"ל התקיימים התנאים.

$$\begin{aligned} F\left(z\right) &= \int_{z_0}^{z}\left(pdx+qdy\right) \\ \left(\Delta z=\Delta x\right)\Rightarrow F\left(z+\Delta z\right) &= F\left(z+\Delta x\right)=F\left(x+\Delta x,y\right) \end{aligned}$$

אז נשמרת האדיטיביות

$$\int_{\left(x_0,y_0\right)}^{\left(x+\Delta x,y\right)}\left(pdx+qdy\right) = \int_{\left(x_0,y_0\right)}^{\left(x,y\right)}\left(pdx+qdy\right)+\int_{\left(x,y\right)}^{\left(x+\Delta x,y\right)}\left(pdx+qdy\right)$$

אזי

$$\begin{aligned} F\left(x+\Delta x,y\right)-F\left(x,y\right) &= \int_{\left(x,y\right)}^{\left(x+\Delta x,y\right)}\left(pdx+qdy\right) \\ \left(dy=0\right)\Rightarrow &= \int_{\left(x,y\right)}^{\left(x+\Delta x,y\right)}pdx \\ \frac{F\left(x+\Delta x,y\right)-F\left(x,y\right)}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x}\int_{\left(x,y\right)}^{\left(x+\Delta x,y\right)}pdx \\ & \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} p\left(x,y\right) \\ \Rightarrow\frac{\partial F}{\partial x} &= p \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= q \end{aligned}$$

2. כיוון שני.
נניח שיש פונקציה קדומה כזאת צ"ל באינטגרל בלתי תלוי בדרך
אם פרמטר $t\in\left[0,1\right]$ כאשר

$$z=\varphi\left(t\right),\varphi\left(0\right)=\left(x_0,y_0\right),\varphi\left(1\right)=\left(x,y\right)$$

$$\begin{aligned} \int Pdx+Qdy &= \int\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy \\ &= \int_0^1\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}\left(t\right)dt+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}\left(t\right)dt \\ &= \int_0^1 F^{'}\left(t\right)dt=F\left(1\right)-F\left(0\right) \end{aligned}$$

■

[12]הרצאה ב 25.11.2004

משפט נתון קו c רגולרי ($regular$, גזיר) נתונה $f\left(z\right)$ רציפה ב-D (שמכיל את c כאשר D פשוט קשר) אזי

$$\int_{z_0}^{z}f\left(z\right)dz$$

הוא בלתי תלוי בדרך אס"ם f היא נגזרת של פונקציה אנליטית ב-D.

$$\exists F,F^{'}\left(z\right)\;=\;f\left(z\right)$$

הוכחה נסמן $dz=dx+idy$

1. נכתוב

$$\begin{aligned}\int f\left(dx+idy\right) &= \int fdx+\left(if\right)dy\\ &= \int Pdx+Qdy\end{aligned}$$

נסמן $\begin{cases}P & =f\\ Q & =if\end{cases}$ כוון אחד, נתון שהאינטגרל ב"ת בדרך וצ"ל F היא פונקציה מהמשפט הקודם היא אנליטית.

לפי המשפט הקודם קיים F שמקיימת $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial y} & =Q\\ \frac{\partial F}{\partial x} & =P\end{cases}$ מהשוואה נקבל

$$\begin{cases}f & =\frac{\partial F}{\partial y}\\ if & =\frac{\partial F}{\partial x}\end{cases}$$

נסמן $F=U+iV$ אזי

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x} & =U_x+iV_x=f\\ \frac{\partial F}{\partial y} & =U_y+iV_y=if\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow U_x &= V_y\\ U_y &= -V_x\end{aligned}$$

לכן מתקיים CR והדיפרנציאביליות מתקיימת מרציפות של f הנתונה מראש. הוכחנו ש F אנליטית וגם f הנגזרת שלה.

2. הכיוון השני.
נתון שיש F כל ש $F^{'}\left(z\right)=f$ אנליטית צ"ל $f\left(z\right)$ ב"ת בדרך.

$$\begin{aligned}F^{'}\left(z\right) &= U_x+iV_x=\frac{F\left(x,y+\Delta y\right)-F\left(x,y\right)}{i\Delta y}\\ & \xrightarrow[\Delta y\to0]{}\frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial y}\\ F_x &= U_x+iV_x=\frac{1}{i}\left(U_y+iV_y\right)\\ \Rightarrow F\left(z\right) &= f\left(z\right)=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial F}{\partial Y}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x} & =f=P\\ \frac{\partial F}{\partial y} & =if=Q\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_c f(z) &= \int_c f(z)(dx+idy)\\ &= \int_c f(x)\,dx+(if)\,dy\\ \Rightarrow &= \int_c Pdx+Qdy\end{aligned}$$

משפט $Cauchy$ יהיה[13] נתון תחום $D\subset\mathbb{R}$ פשוט קשר, יהיה $C\subset D$ עקום ז'ורדן סגור גזיר למקוטעין, תהיה $f(z)$ פונקציה אנליטית ב-D אזי

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

הערה ההוכחה המקורית מניחה רציפות על כל עקום ז'ורדן. $Goursat$ חיזק את המשפט ולא צריך להניח רציפות על הנגזרת, ולא מסתמכים על משפט גרין.

הוכחה 1 (של משפט קושי המקורי)
נניח רציפות הנגזרת. כלומר מניחים בנוסף להנחות המשפט לעיל שהנגזרת $f'(z)$ רציפה בתחום D

תזכורת משפט $Green$

$$\int_c (Pdx+Qdy) = \iint_{D_c}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

ההוכחה נתון עקום ז'ורדן

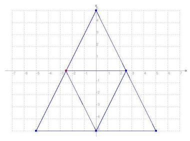
$$\begin{aligned}\oint_c Zdz &= \oint_c (u+iv)(dx+idy)\\ &= \oint_c (udx-vdy)+i\oint_c(vdx+udy)\\ (P=u;Q=v)\Rightarrow &= \iint_c\left(-\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)dxdy+i\oint_c(vdx+udy)\\ (p=v;Q=u)\Rightarrow &= \iint_c\left(-\frac{dv}{dx}-\frac{du}{dy}\right)dxdy+i\oint_c\left(\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dy}\right)dxdy\\ (Couchy-Riemen)\Rightarrow &= 0+0=0\end{aligned}$$

הוכחה 2 (של $Goursat$)

1. **למה** $Couchy-goursat$ (משפט $Couchy$ עבור שפת משולש)
יהי C שולש מוכל בתחום D, תהי $f(z)$ פונקציה אנליטית בתחום. אזי

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

איור 4: משלוש מחולק



הוכחה נשים לב כי חלק מתכונות המשולש היא שאם ניצור 4 משולשים פנימים ע"י קווים בין האמצע של כל קו במשולש (איור 4)

(א) השטח של כל משולש הוא $s_1 = \frac{1}{4}s_0$ מהמשולש המקורי s_0

(ב) ההיקף של כל משלש $p_1 = \frac{1}{2}p_0$.

נסמן c_0 המסלול של המשולש הראשון ו D_0 הפנים של המשולש. $c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}$ המסלולים סביב המשולשים הפנימים.

$$\begin{aligned}
\left|\oint_c f(z)\,dz\right| &= \left|\oint_{c_{0,1}} f(z)\,dz + \oint_{c_{0,2}} f(z)\,dz + \oint_{c_{0,3}} f(z)\,dz + \oint_{c_{0,4}} f(z)\,dz\right| \\
&\le \left|\oint_{c_{0,1}} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{c_{0,2}} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{c_{0,3}} f(z)\,dz\right| + \left|\oint_{c_{0,4}} f(z)\,dz\right| \\
&\le 4\max_{c_{0,i}}\left|\oint_{c_{0,i}} f(z)\,dz\right|
\end{aligned}$$

נבחר c_1 כמשולש בעל האינטגרל בערך מוחלט הגדול ביותר ואז

$$= \quad 4\left|\oint_{c_1} f(z)\,dz\right|$$

באופן כללי

$$\left|\oint_{c_0} f(z)\,dz\right| \quad \le \quad 4^n\left|\oint_{c_n} f(z)\,dz\right| \qquad (1)$$

ע"פ הלמה של קנטור עבור $n \to \infty$ נקבעת נקודת גבול שנסמנה z_0 ו $z_0 \in \overline{D_0}$ לפי הנתון $f(z)$ אנליטית בכל נקודה של $\overline{D_0} \subset D$ ולכן גם ב $z = z_0$. כלומר

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z_1)(z - z_0) \\
\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= f'(z_0) + \eta(z)
\end{aligned}$$

ומהאנליטיות

$$\eta(z) \quad \xrightarrow[z \to z_0]{} \quad 0$$

$$\forall\varepsilon > 0; \exists\alpha > 0; \quad \substack{\forall z \\ |z - z_0| < \alpha} \quad \Rightarrow \quad |\eta(z)| < \varepsilon$$

נשים לב כי הקוטר של המשולשים שואף ל 0. לכן לכל סדרת סביבות α_n נתאים $\overline{D_n}$ תחום משלושים כל ש

$$z_0 \in \overline{D_n} \quad \subset \quad B(z_0, \alpha_n)$$

[13] הרצאה ב 30.11.2004

$$\begin{aligned}
(1) \Rightarrow \left|\oint_{c_0} f(z)\,dz\right| &\leq 4^n \left|\oint_{c_n} f(z)\,dz\right| \\
&= 4^n \left|\oint_{c_n} \left[f(z_0) + f^{'}(z_0)\,z - z_0 f^{'}(z_0) + \eta(z)(z - z_0)\right] dz\right|
\end{aligned}$$

נזכיר כי אינטגרל של פונקציה קבועה שווה 0. כלומר

$$\begin{aligned}
&= 4^n \oint_{c_n} |\eta(z)|\,|(z - z_0)|\,|dz| \\
&\leq 4^n \varepsilon \oint_{c_n} |z - z_0|\,|dz| \\
&\leq 4^n \varepsilon p_n \int_{c_n} |dz| \\
&= 4^n \varepsilon p_n^2
\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{1}{2^n} p_0 \\
\Rightarrow p_n^2 &= \frac{1}{4^n} p_0
\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
&\leq 4^n \varepsilon p_n^2 \\
&\leq 4^n \varepsilon \frac{1}{4^n} p_0^2 = \varepsilon p_0^2 \\
\Rightarrow \oint_{c_0} f(z)\,dz &= 0
\end{aligned}$$

1. משפט קושי עבור תחום קונבקסי (קמור)

(תזכורת, קמור: בין כל שני נקודות בתחום הקטע בניהם מוכל בתחום. כלומר התחום $starlike$ לכל נקודה בתחום)

יהי תחום קונבקסי D וקו ז'ורדן c גזיר למקוטעין תהי $f(z)$ אנליטית בתחום. אזי

$$\oint_{c_0} f(z)\,dz = 0$$

הוכחה נבחר $z_0 \in D$ כלשהי. אזי נסמן

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi$$

נוכיח כי $F^{'}(z) = f(z)$ (כלומר האיטגרל בלתי תלוי בדרך).

נשים לב כי עבור $z, \Delta z$ כך ש $z, z + \Delta z \in D$ אז

$$\begin{aligned}
\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)\,dt - \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt\right] \\
&= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \left[(f(t) - f(z)) + f(z)\right] dt \\
&= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} (f(t) - f(z))\,dt + \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} dt
\end{aligned}$$

המשך תרגיל, בתהליך דומה מעוד למשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

2. מעבר מתחום קמור לתחום שאינו קמור פשוט קשר. יהי c קו ז'ורדן גזיר למקוטעין. יש אוסף של כדורים $\{B_n(p_n,r)\}$ כך שעבור הומולוגיה של קו ז'ורדן בין שני נקודות ניתן למצוא קו $c^{'}$

$$c^{'} \subset \bigcup_n B_n$$

אם קיים n_0 כל ש $c^{'} \subset B_{n_0}$ סיימנו אחרת לכל אוסף כנ"ל ניתן להפריד את קו הז'ורדן לקטעים

$$c_n^{'} \subset B_n$$

וגם

$$c_n^{'} \cap c_{n+1}^{'} \subset B_n \cap B_{n+1}$$

ואז ב $B_n \cap B_{n+1}$ נחבר את הקטעים c_n^* ואז

$$\oint_{c^{'}} f(z)\,dz = \sum_n \oint_{c_n^*} f(z)\,dz$$

עבור כל כדור המשפט מוכח ולכן

$$\begin{aligned} \oint_{c_n^*} f(z)\,dz &= 0 \\ \Rightarrow \oint_{c^{'}} f(z)\,dz &= \sum_n \oint_{c_n^*} f(z)\,dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

הערה ניתן בקשיים מסוימים להוכיח גם על שפת D

משפט $Cauchy$ עבור[14] תחום דו-קשרי (=תחום טבעתי $Ring\ domian$)
יהי D תחום דו-קשרי אם רכיב אחד חסום במשלים, יהיו c_1, c_2 שני עקומי ז'ורדן בעלי אותה מגמה שמקיפים את הרכיב החסום. תהיה $f(z)$ פונקציה אנליטית ב-D אזי

$$\oint_{c_1} f(z)\,dz = \oint_{c_2} f(z)\,dz$$

הוכחה עבור שני הקווים נייצר תעלה ושומר על מגמה בתעלה ויוצר c_3 שמורכב משני התחומים והתעלה. הרצועה של c_3 היא תחום פשוט קשר לכן

$$\begin{aligned} \oint_{c_3} f(z)\,dz &= \oint_{c_2} f(z)\,dz - \oint_{c_1} f(z)\,dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

עבור קו ז'ורדן של דו-קשרי ניתן להפריד את c_3 לשני חלקים וכמו בהוכחה הקודמת לחבר אינטגרלים. וגם עבור תחום.

משפט יהיה D תחום n קשרי, f פונקציה אנליטית. ב-D יהיו

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}\}$$

$n-1$ קווי ז'ורדן סגורים שמקיפים בהתאמה כל אחד מהרכיבים, ויהיה c קו ז'ורדן שמקיף את כל הרכיבים אזי

$$\oint_c f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n-1} \oint_{c_j} f(z)\,dz$$

[14] הרצאה ב 2.12.2004

נוסחת ההצגה של קושי *Couchy Representation Theorem*

משפט יהיה D פשוט קשר, f אנליטית ב-D c עקום ז'ורדן סגור וגזיר לחלקים ב-D תהי z_0 פנימית ל-c אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = f(z_0)$$

(זה מבטיח שלכל פונקציה אנליטית בתחום שנתונים ערכים על שפה של האינטגרל אז היא הפונקציה היחידה)

הוכחה יהיה

$$D \supset D_{z_0} = D\backslash\{z_0\}$$

כלומר D_{z_0} תחום דו קשרי, תהי $g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$ אנליטית ב-D_{z_0}. אזי אם נבחר מעגל

$$c_{r,z_0} = \left\{z|z=z_0+e^{i\theta};0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

ומהמשפט הקודם

$$\oint_c gdz = \oint_{c_{r,z_0}} gdz$$

לכן מספיק להוכיח

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}} gdz = f(z_0)$$

אבל

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}} gdz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{[f(z_0)+(f(z)-f(z_0))]}{z-z_0}dz\\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\\
&= f(z_0)\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz\right]+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz
\end{aligned}$$

נשאר[15] להוכיח

1. $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz$
2. עבור כל $\varepsilon>0$ קיים $r>0$ מספיק קטן שממנו מתקיים

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| < \varepsilon$$

מאחר ש

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z)}{z-z_0}dz = f(z_0)\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz\right]+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_{r,z_0}}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$$

אם רק חלק אחד של המשוואה תלוי ב-r אז הוא לא תלוי ב r.

[15] הרצאה ב 7.12.2004

הוכחת 2.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| &\le \frac{1}{2\pi}\oint\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}dz\\ (|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon)\Rightarrow &\le \frac{1}{2\pi}\oint\frac{\varepsilon}{|z-z_0|}dz\end{aligned}$$

כאשר $t=z_0+re^{i\theta}$ כלומר $|t-z_0|=r$ ולכן

נוכיח $\forall n\in\mathbb{Z};\ \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{(z-z_0)^n}dz=\begin{cases}0 & ,n\neq 1\\ 1 & ,n=1\end{cases}$

הוכחה

$$\begin{aligned}t &\to \theta\\ t &= z_0+re^{i\theta}\\ dt &= ire^{i\theta}d\theta\\ dt &= i(t-z_0)\,d\theta\\ \frac{dt}{t-z_0} &= id\theta\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}\frac{dt}{(t-z_0)^n} &= \frac{dt}{t-z_0}\frac{1}{(t-z_0)^{n-1}}\\ &= id\theta\frac{1}{r^{n-1}e^{i\theta(n-1)}}\end{aligned}$$

לכן עבור $n\neq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{(z-z_0)^n}dz &= \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{id\theta}{r^{n-1}e^{i\theta(n-1)}}\\ &= \frac{1}{2\pi}\oint_c\frac{e^{-i\theta(n-1)}d\theta}{r^{n-1}}\\ &= \frac{1}{2\pi r^{n-1}}\oint_c e^{-i\theta(n-1)}d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi r^{n-1}}\oint_c\cos\theta(1-n)+i\sin\theta(n-1)\,d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi r^{n-1}}\left(\frac{\sin\theta(n-1)}{n-1}+i\frac{\cos\theta(n-1)}{n-1}\right)_0^{2\pi}=0\end{aligned}$$

עבור $n=1$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi}\oint_c d\theta=1$$

■

הערה ע"פ נוסחת קושי נתון $\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(t)}{t-z_0}dt=f(z_0)$ אז

$$f(z) = Tf \quad (f=Tf)$$

כלומר גרעין שתלוי בפרמטר

$$f(z) = \int k(z,t)\,f(t)\,dt$$

לכן

$$f^{'}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt$$
$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt$$

הערה הנוסחה[16] שקיבלנו עבור $n=1$ נותנת העברה $transform$ עבור f אנליטית.

$$\begin{aligned} g &= Af \\ &= \oint_c k(z,t)\,f(t)\,dt \\ \left(k(z,t)=\frac{1}{2\pi i(t-z)}\right)\Rightarrow &= \oint_c \frac{1}{2\pi i(t-z)}f(t)\,dt \\ &= f(t) \end{aligned}$$

טענה אם f רציפה על קו ז'ורדן סגור c ומגדירים

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{t-z}f(t)\,dt$$

כאשר z נקודה פנימית של התחום D_c "שנקרע" על ידי c. אזי g אנליטית ב-D_c

הוכחה צ"ל $\lim_{\Delta z\to0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{(t-z)^2}f(t)\,dt$

$$\begin{aligned} g(z+\Delta z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{t-z-\Delta z}f(t)\,dt \\ g(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{t-z}f(t)\,dt \\ \Rightarrow\lim_{\Delta z\to0}\frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{t-z-\Delta z}-\frac{1}{t-z}\right)f(t)\,dt \end{aligned}$$

נבדוק הפרש

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{1}{2\pi i}\oint_c\left[\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{t-z-\Delta z}-\frac{1}{t-z}\right)-\frac{1}{(t-z)^2}\right]f(t)\,dt$$

נשים לב כי

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{t-z-\Delta z}-\frac{1}{t-z}\right)-\frac{1}{(t-z)^2} &= \Delta z\frac{\Delta z}{(t-z-\Delta z)(t-z)}-\frac{1}{(t-z)^2} \\ &= \frac{1}{(t-z-\Delta z)(t-z)}-\frac{1}{(t-z)^2} \\ &= \frac{1}{t-z}\left(\frac{1}{(t-z-\Delta z)}-\frac{1}{(t-z)}\right) \\ &= \frac{\Delta z}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)} \end{aligned}$$

[16] הרצאה ב 14.12.2004

אם נסמן d המרחק בין c לבין עיגול קטן סביב z. כמוכן f פונקציה רציפה על קבוצה קומפקטית ולכן חסומה ע"י M חסם. אז

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{|\Delta z|}{d^3} \\
|I| & \leq \frac{1}{2\pi}\oint_c \frac{|\Delta z|}{d^3} f(t)\,|dt| \\
& = \frac{1}{2\pi}\frac{|\Delta z|}{d^3} M\ell(c) \\
& \xrightarrow[\Delta z\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

למעשה הוכחנו

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{(z-t)^2} f(t)\,dt$$

הערה באותו אופן עבור n כללי (כלומר $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ כלשהו)

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{f(t)\,dt}{(t-z)^{n+1}}$$

מסקנה לפונקציה אנליטית יש נגזרות מכל סדר.

משפט (ליוביל $Liouville$) תהיה $f(z)$ פונקציה אנליטית בכל המישור (שלמה-$entire$) וכן

$$\forall z\in\mathbb{C}; |f(z)| < M < \infty$$

אזי f קונסטנטה (=קבוע)

הוכחה

$$\begin{aligned}
f'(z) & = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t-z|=R} \frac{f(t)}{(t-z)^2}dt \\
\left|f'(z)\right| & \leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|t-z|=R} \frac{M}{|t-z|^2}|dt| \\
& = \frac{1}{2\pi R^2} M 2\pi R = \frac{M}{R} \leq \varepsilon \\
R & > \frac{M}{\varepsilon} \\
\Rightarrow f' & \equiv 0 \\
\Rightarrow f & = const
\end{aligned}$$

המשפט היסודי של האלגברה לכל פולינום $P_n(z)$ ממעלה n יש בדיוק n שורשים.

ניסוח שקול לכל פולינום $P_n(z)$ ממעלה n, $n\geq 1$ יש לפחות שורש אחד, כלומר קיים לפחות $z_0\in\mathbb{C}$ כך ש

$$P_n(z_0) = 0$$

הוכחה (בעזרת משפט ליוביל) בדרך השלילה נניח שקיים $n \geq 1$ ונניח שקיים פולינום אמיתי ממעלה n שנסמנו p_n

$$\begin{aligned} p_n(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots \\ a_n &\neq 0 \end{aligned}$$

כך ש

$$\forall z \in \mathbb{C}; P_n(z) \neq 0$$

נבנה $Q_n(z) = \frac{1}{P_n(z)}$ מאחר ש P_n אינו מתאפס ב-$\mathbb{C}$ אזי Q_n אנליטית ב-$\mathbb{C}$ כלומר Q_n פונקציה שלמה. נוכיח חסימות של $Q_n(z)$ כי אם $Q_n(z)$ חסום ואנליטי בכל המישור לפי ליוביל Q_n גודל קבוע, אזי P_n קבוע $p_n = \frac{1}{Q_n}$ וזה סותר את ההנחה ש-P_n פולינום אמיתי מעלה $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \frac{1}{p_n(z)} \\ &= \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots} \\ &= \frac{1}{a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-z}}{a_n z^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)} \end{aligned}$$

עבור $|z| \geq R > R_0$, R_0 מספיק גדול

$$\left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-z}}{a_n z^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} \left|\frac{a_j}{a_n}\right| \frac{n}{R} < \frac{1}{2}$$

נשים לב כי עבור $|z| \leq R$ התחום קומפקטי והפונקציה רציפה ולכן חסומה ע"י M_R. נראה כי גם עבור $|z| > R$ הפונקציה חסומה ע"י M_R^1.

$$\begin{aligned} |Q_n| &< \frac{1}{|a_n| |z|^n \left(1 - \frac{1}{2}\right)} \\ &\leq \frac{2}{|a_n| R^n} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

כלומר קיים M_R^1 כך ש $|Q_n|$ חסומה בתחום $|z| > R$

משפט הממוצע $f(z)$ אנליטית בנקודה z_0 (כלומר בסביבת הנקודה z_0) אזי קיים משפט הממוצע

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta$$

כאשר המעגל $\{z | |z - z_0| = R\}$ נמצא בתוך הסביבה של z_0 בה f אנליטית.

הוכחה לפי נוסחת ההצגה של קושי מתקיים

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R} \frac{f(t)}{t - z_0} dt \\ t &= z_0 + Re^{i\theta} \\ dt &= Rie^{i\theta} d\theta = (id\theta)\left(Re^{i\theta}\right) = (i\theta)(t - z) \\ \Rightarrow \frac{dt}{t-z} &= id\theta \\ \Rightarrow f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \oint_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) d\theta \end{aligned}$$

משפט המקסימום (הלוקאלי) נתון תחום D במישור נתונה $f(z)$ אנליטית ב-D נניח שעבור נקודה מסוימת $z_0 \in D$ מתקיים

$$\exists\varepsilon > 0; \quad \begin{matrix} \forall z \in D \\ |z - z_0| < \varepsilon \end{matrix} \; ; |f(z_0)| \quad \geq \quad |f(z)|$$

אז $f = const$ ב-D.

הוכחה

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{0 \\ |z-z_0|=R}}^{2\pi} f(z_0)\, d\theta \\ &= \frac{f(z_0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = f(z_0) \end{aligned}$$

גורר

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(z_0) - f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\right] d\theta \quad = \quad 0$$

וגם

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi} \int_{\substack{0 \\ |z-z_0|=R}}^{2\pi} |f(z_0)|\, d\theta \\ |f(z_0)| &\geq -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, d\theta \end{aligned}$$

מתנאי המשפט

$$|f(z_0)| - \left|f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\right| \quad \geq \quad 0$$

כלומר

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(z_0) - f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\right] d\theta & \\ |f(z_0)| - \left|f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\right| &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(z_0) - f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)\right] d\theta &= 0 \\ \Rightarrow \forall R < \varepsilon; \forall\theta \in [0, 2\pi]; f(z_0) &= f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right) \end{aligned}$$

נשאר להוכיח $|f|$ היא גודל קבוע גורר f גודל קבוע.

$$f = \rho e^{i\phi}; \log f \quad = \quad \ln\rho + i\phi$$

נניח $f(z_0) \neq 0$ כי $0 = |f(z_0)| \geq |f(z)| \Rightarrow f \equiv 0$

$$= \quad u + iv$$

אבל $u = |f|$ קבוע ולכן לפי CR

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

גורר v קבוע. אז $f \equiv const$ קבוע בסביבה.

משפט המקסימום (הגלובלי)[17] תהיה $f(z)$ אנליטית בתחום D ורציפה על $\overline{D}$, כאשר D תחום חסום במישור. אזי f מקבלת את המקסימום על השפה של D.

הוכחה $|f|$ מקבלת מקסימום על $\overline{D}$ (הקומפקטי) כפונקציה רציפה על $\overline{D}$ ולכן ישנן שני אפשרויות:

- f מקבלת את המקסימום על השפה של D (וגמרנו)
- f מקבלת את המקסימום בנקודה פנימית לפי משפט קודם (הלוקלי), אז היא סגורה בכל $\overline{D}$

משפט המינימום (הגלובלי) תהיה $f(z)$ אנליטית ב-D, D תחום חסום, ורציפה ב-$\overline{D}$. כמוכן $\forall z \in D; f(z) \neq 0$. אזי f מקבלת את המינימום על השפה של D.

הוכחה $g = \frac{1}{f}$ רציפה על $\overline{D}$ ואנליטית ב-D ולכן לפי משפט המקסימום הגלובלי מקבלת מקסימום על השפה.

4 סדרות וטורים קומפלקסים

סדרה $\{s_0, \ldots, s_n, \ldots\}$ סדרה של מספרים מורכבים

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 + ib_0 \\ s_1 &= a_1 + ib_1 \\ \vdots &= \vdots \\ s_n &= a_n + ib_n \\ \vdots & \quad \vdots \end{aligned}$$

הגדרה $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} s$ אם"ם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ באופן שקול

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |s_n - s| < \varepsilon$$

טורים

$$\alpha_k \in \mathbb{C}, S_n \in \mathbb{C}; S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

טור אינסופי

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

הגדרה טור מתכנס אם סדרת הסכומים החלקים $\{S_n\}$ מקיים $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$

[17] הרצאה ב 16.12.2004

סדרות וטורי פונקציות

סדרת פונקציות נתונה קבוצה $A \subset \mathbb{C}$ אז $z \in A; \{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ **סדרת פונקציות**, כלומר עבור כל $z_0 \in A$ חוזרים לסדרה רגילה.

הגדרה אם $f_n(z) \to f(z)$ מתכנסת בכל A אז נאמר כי הסדרה מתכנסת.

טור_פונקציות

$$\begin{aligned} S_n(z) &= \sum_{k=1}^{n} f_k(z) \\ S(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \end{aligned}$$

הגדרה הטור מתכנס ל-$S(z)$ אם

$$\forall z \in A, S_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} S(z)$$

דוגמה (להשוואה בין טורי פונקציות לטורי חזקות)

$$\sum \frac{\sin(z^n x)}{z^n}$$

מתכנס על הישר כולו לפי קריטריות ווירשטרס.
בגזירה (איבר-איבר)

$$\sum \cos(z^n)$$

אנו מתכנס ב-$x=0$.
עבור

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n &= S(x) \\ (x-x_0) < R \Rightarrow S^{'}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1} \end{aligned}$$

(במקרה הקומפלקסי יש הרבה יותר דמיון בין טורי פונקציות לטורי חזקות)

4.1 טורי חזקות

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^n$$

תזכורת תחילה הגדרנו פונקציה אנליטית ב-z_0, אם ל-f יש נגזרת ב-z_0 וגם נגזרת בסביבה מסוימת של z_0. הוכחנו בשלב מאוחר יותר שאם ל-f יש נגזרת אחת בסביבה של z_0. אזי יש לה נגזרת מכל סדרה, בסביבה זאת. נוסחת קושי

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}$$

לכן השלב הבא:

משפט אם[18] $f(z)$ אנליטית בתחום D. z נקודה פנימית של D אזי

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{f_n(z)}{n!}(\Delta z)^n + R_n(z) \\ R_n(z) &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

והפיתוח תקף בכל עיגול שנמצא ב-D סביב z כמרכז. ההתכנסות של הטור היא בהחלט ובמ"ש בכל תת-תחום קומפקטי של העגול $\{z | (z-z_0) < R\}$

הערה נוסחת הדמר:

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|f_n|}$$

הוכחת נתון מעגל $\{z | |z-z_0| < R\} \subset D$(כך שכולו ב D) וגם מעגל

$$\{z | |z-z_0| < R-\varepsilon\}$$

בנוסף מעגל ברדיוס $R_2 < R_1$ (כך שיש מרחק בין מעגל ברדיוס R_2 לשפת R_1) (R_2 לבנה כך שתקיף כל קבוצה קומפקטית שנרצה)
נתון $z_0 + \Delta z \in \{z | |z-z_0| < R_2\}$ אזי נוסחת קושי

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t)\,dt}{f - z_0 - \Delta z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t)\,dt}{(f-z_0)\left(1 - \frac{\Delta z}{t-z_0}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta z|}{|t-z_0|} &< \frac{R_2}{|t-z_0|} \\ \Rightarrow \frac{|\Delta z|}{R_1} &< \frac{R_2}{R_1} = q < 1 \end{aligned}$$

אנו יודעים כי

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n &= \frac{1+x^n}{1-x} \\ |x| < 1, \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^n \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1}\left(1 + x^2 + \ldots + x^n + \ldots\right) \\ &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

אזי אם

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta z}{t-z_0} \\ \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{\Delta z_0}{t-z}} &= 1 + \left(\frac{\Delta z}{t-z_0}\right) + \left(\frac{\Delta z}{t-z_0}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta z}{t-z_0}\right)^n \\ &\quad + \left(\frac{\Delta z}{t-z_0}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\frac{\Delta z}{t-z}} \end{aligned}$$

[18] הרצאה ב-21.12.2004

$$\begin{aligned} f(z+\Delta z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)}{t-z_0}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{(\Delta z)^k}{(t-z_0)^k}\right\}dt \\ &+\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)(\Delta z)^{n+1}}{(t-z_0)(t-z_0)^{n+1}}\frac{1}{\left[1-\frac{\Delta z}{t-z_0}\right]}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2\pi i}\left(\oint\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)(t-z_0)^{n+1}}\right)(\Delta z)^k \\ &+\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)(\Delta z)^{n+1}}{(t-z_0)(t-z_0)^{n+1}}\frac{1}{\left[1-\frac{\Delta z}{t-z_0}\right]}dt \end{aligned}$$

(תזכורת נוסחת קושי $\frac{f^k(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}}$)

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(z)}{k!}(\Delta z)^k+\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(t)(\Delta z)^{n+1}}{(t-z_0)(t-z_0)^{n+1}}\frac{1}{\left[1-\frac{\Delta z}{t-z_0}\right]}dt$$

נשאר להראות שהזנב מתכנס ל-0

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Delta z}{t-z}\right|^{n+1} &\le q<1 \\ |R_n| &\le \frac{1}{2\pi}q^{n+1}\oint\frac{|f(t)|\,|dt|}{|t-z_0|(1-q)} \end{aligned}$$

($f(k)$ חסום כי אנליטי על קבוצה קומפקטית)

$$\begin{aligned} &\le \frac{1}{2\pi}q^{n+1}\oint\frac{M\,|dt|}{R_1(1-q)} \\ &= \frac{1}{2\pi}q^{n+1}\frac{M}{R_1(1-q)}2\pi R_1 \twoheadrightarrow 0 \end{aligned}$$

קיבלנו התכנסות בהחלט ובמ"ש כי z לא מופיע בחישוב.

■

משפט תהיה f_n סדרת פונקציות אנליטיות ב-D נתון $f_n \twoheadrightarrow f$ על כל תחום קומפקטי של D. אזי הפונקציות הגבולית f גם היא אנליטית ב-D.

הוכחה f רציפה כגבול במ"ש של f_n, צ"ל $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(t)}{t-z_0}dt$

(אנו יודעים כי $\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)}{t-z_0}dt$ אנליטית לכל $f(t)$ רציפה צ"ל $\varphi(z)=f(t)$)

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f_n(t)}{t-z}dt$$

לכן עבור העקום c פנימי ל-D ונקודה ξ פנימית לעקום c, נגדיר

$$\begin{aligned} 0<d &< d(\xi,c) \\ B_z=\{z|\,|\xi-z|<\rho\} &\subset D \\ \forall t\in c;\frac{1}{t-z} &< \frac{1}{d}<\infty \end{aligned}$$

$$\left|\int \frac{f_n(t)\,dt}{t-z_0} - \int \frac{f(t)\,dt}{t-z_0}\right| \le \int_c \frac{|f_n(t)-f(t)|\,|dt|}{|t-z|}$$
$$\le \frac{\varepsilon}{d}\int |dt| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_n(t)\,dt}{t-z} \twoheadrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(t)\,dt}{t-z_0} = f(t)$$

■

הערה עבור $f_n'(z) \twoheadrightarrow f'(z)$ (האם יכול נבוע מ $f_n \to f$) נעבוד לפי

$$f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f_n(t)}{(t-z)^2}$$
$$\to \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{(t-z)^2} = f'(z)$$

רעיון ניתן כך להראות התכנסות רגילה של $f_n'(z) \to f'(z)$ אבל צ"ל

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f_n(t)}{(t-z)^2} \twoheadrightarrow \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(t)}{(t-z)^2}$$

אז ניקח מעגל $|\xi - z| < \rho$ ונוכיח עבור מעגל כזה.

עבור טורי חזקות

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

הסכום החלקי

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z-z_0)^k$$

מותר לגזור איבר איבר $\Longleftrightarrow$ התכנסות במ"ש של הנגזרות.

$$f(z) = \sum a_k (z-z_0)^k$$
$$f'(z) = \sum k a_k (z-z_0)^{k-1}$$
$$\vdots = \vdots$$

ע"י הצבה $(z=z_0)$

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}}{k!} = a_k$$

משפט (היחידות) נתון תחום D וסדרת נקודות $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ כך ש

$$\forall n\in\mathbb{N}; z_n \ne z_0; z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$$

נתון f אנליטית ב-D, נתון $f(z_n)=0$.
אזי $f \equiv 0$ בכל התחום.

הוכחה

1. בשלב ראשון נוכיח לעגול ההתכנסות סביב z_0.

$$f(z_n)=0, z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z$$

אבל f אנליטית ולכן

$$f(z_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z_0)$$

כלומר

$$f(z_0) = 0$$

נראה $f^{(k)}(z_0)=0$.

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots \\ f(z_0) &= 0\Rightarrow a_0=0 \end{aligned}$$

נגדיר

$$f_1 = \frac{f(z)}{z-z_0}=a_1+a_2(z-z_0)+\dots$$

אנליטית ולכן

$$\begin{aligned} f_1(z_n) &= \frac{f(z_n)}{z_n-z_0}=\frac{0}{z_n-z_0}=0 \\ \Rightarrow f_1(z_n) &\xrightarrow[n\to\infty]{} f_1(z_0)=0 \end{aligned}$$

באינדוקציה נראה $\forall n\in\mathbb{N}; a_n=0$ ומיחידות טור חזקות בעיגול סביב z_0

$$f(z) \equiv 0$$

בעיגול

2. נוכיח לכל התחום.
עבור z (לא בעיגול) נחבר ל-z_0 ע"י Γ (עקום) ונבחר נקודות על Γ $\alpha,\dots,\alpha_p$ כך שמרכזו של מעגל קטן סביב α_n נמצא בתוך מעגל סביב α_{n-1}. אז לכל $|z-\alpha_n|<\rho$ ניתן לבנות סדרת נקודות, כך ש $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$ אז קיבלנו יחידות של טור חזקות ובעיגול החדש $f\equiv 0$.
אז $z=\alpha_p$ולכן מאחר שנכון לכל z בתחום אז $f\equiv 0$ בכל התחום.

משפט אם $f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ הוא טור חזקות שמתכנס בעגול אם רדיוס התכנסות הוא R בנקודה $z=z_0$ אזי הטור הוא פונקציה אנליטית בעגול הנ"ל.

הוכחה ידוע (כמו במקרה הממשי) שהטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בכל תת-תחום קומפקטי של D_R נשתמש במשפט שהוכחנו $f_n \twoheadrightarrow f$ f_n אנליטית גורר f אנליטית.
נסמן $f_n(z)=\sum_0^k a_k(z-z_0)^k$ ברור ש $f_n(z)$ אנליטית כסכום סופי של פונקציות אנליטיות

$$\{a_k(z-z_0)\}_0^n$$

כמוכן $f_n \twoheadrightarrow f$ גורר f אנליטית.
■

הערה עבור $f(z_1,z_2)$ פונקציה אנליטית בשני משתנים קומפלקסים אזי קיים משפט:
לכל תחום נתון במישור (פשוט קשר) קיימת פונקציה שהיא אנליטית בדיוק בתחום זה, ולא בשום תחום יותר גדול שמכיל אותו.

דוגמאות לטורים

1. $\sum_0^\infty z^n$ אז $R=1$ ואז $f(z)=\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots$.
נשים לב כי $\frac{1}{1-z}$ אנליטית בכל תחום למעט $z=1$

2. $\sum_0^\infty \frac{z^2}{n!}$ אז $R=1$.

הגדרה נקודה סינגולרית - נקודה שבה הפונקציה אינה אנליטית בסביבה כלשהי.

טענה על השפת מעגל ההתכנסות חייבת להיות לפחות נקודה סינגולרית אחת.

הוכחה בדרך השלילה, נתון טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R סביב z_0 ונניח שעל השפה כל הנקודת אנליטיות אזי יש קבוצה של נקודות על השפה ∂D_R שלהם ניתן ליצר מעגלים $z\in\partial D_R; N(z)$. אז יש תת כיסוי סופי. ש"ב להראות שמכיל עגול יותר גדול. בעיגול יותר גדול f אנליטית כלומר הטור צריך להתכנס בעגול יותר גדול בסתירה. לכן יש נקודה על השפה שאינה אנליטית.

דוגמה

1. עבור $\frac{1}{1-z}$ אנליטית בכל נקודה למעט $z=1$ ולכן ניתן לכל פיתוח סביב נקודה z כלשהי הרדיוס שיתקבל יהיה $d(1,z)$.

2. עבור $\sum z^{2^n}$ נראה שבמספר כיוונים צפוף יש נק' סינגולרית כלומר אין אפשרות לפרוץ בשום נקודה במעגל.

הגדרה (בערך) המשכה אנליטית: נניח שנתונות שני פונקציות f_j ב-D_j בהתאמה $(f_1,D_1),(f_2,D_2)$ ובנוסף $D_1\cap D_2\neq\phi$ וגם

$$\forall z\in D_1\cap D_2; f_1 \quad\equiv\quad f_2$$

אזי נאמר ש f_1 ו-f_2 בהמשכה אנליטית אחת של השניה ונסמן $f=\begin{cases} f_1 & z\in D_1\\ f_2 & z\in D_2\end{cases}$. מהיחידות (לפי סדרה של נקודות) אז הם יחידות. אז לדוגמה ע"י סדרת מעגלים ניתן לבנות את הפונקציה.

טענה לכל תחום פשוט קשר D במישור (שפתו מכילה 2 נקודות) יש פונקציה $f(z)$ שעבורה D הוא תחום אנליטיות מקסימלי (כלומר שפתו היא $Naturale\ Boundery$)

הרצאה ב 28.12.2004

חזרה $\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n=f(z)$ טור חזקות שמתכנס בעגול

$$D_{z_0,\ell} \quad=\quad \{z||z-z_0|<R\}$$

הראינו

1. $f(z)$ אנליטית ב-$D_{z_0,R}$
2. על שפת המעגל ההתכנסות יש לפחות נק' סינגולרית אחת.

דוגמה $\sum z^n$ נראה ש $|z|=1$ היא $neturl\ boundery$

פתרון עבור $z=1$

$$\sum 1^n \quad=\quad \infty$$

עבור $z=-1$ $\sum(-1)^n$ לא מתכנס
עבור $z=i$ אז $z^4=1$ ולכן

$$\left[z+z^2\right]+z^4+\ldots+z^{2^n}+\ldots = \infty$$

באופן כללי כל הנקודות הסינגולריות

$$\forall n\in\mathbb{N};k = 1,2,\ldots,2^{n-1},o_{r,n}=\frac{2\pi k}{2^{\omega}}$$

כלומר קיבלנו קבוצה צפופה ביחס למעגל היחידה ולכן לא אנליטית בכל המעגל.

הערה לכל תחום (במשתנה אחד) יש פונקציה שמוגדרת אנליטית רק בתחום הנ"ל.

רעיון לבנות העתקה מהתחום הנ"ל למעגל היחידה ואז להרכיב עליה את $\sum z^n$

למה (של שוורץ) תהה $f(z)$ אנליטית בתחום

$$D = \{z||z|<1\}$$

וכמוכן $\forall z\in D;|f(z)|<1$ ובנוסף $f(0)=0$ אזי $\forall z\in D;|f(z)|\le|z|$ אם מתקיים שוויון
עבור $\begin{array}{c} z_0\in D \\ z_0\neq 0\end{array}$ אזי $;f(z)=ze^{i\theta_0}$ $\begin{array}{c}\exists\theta_0 \\ 0\le\theta_0\le 2\pi\end{array}$

הוכחה נרשום $F(z)=f(rz)$

$$F(0) = f(r\cdot 0)=f(0)=0$$

$$F(z) = f(\zeta),\zeta=rz$$

לכן F אנליטית על שפת היחידה.
משפט המקסימום הגלובלי עבור $F(z)$ ו $D=\{z||z|\le 1\}$, $F(0)=0$

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0+a_1z+\ldots \\ (a_0=0)\Rightarrow &= a_1z+a_2z^2\ldots \\ F(z) &= a_1rz+a_2r^2z^2+\ldots \\ G(z)=\frac{F(z)}{z} &= a_1r+a_2r^2z+\ldots \end{aligned}$$

לכן G אנליטית ב $\overline{D}$ לכן $G(z)$ מקבלת את המקסימום על שפה של עגול היחידה הסגור (כלומר
על $|z|=1$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{F(z)}{z} \\ |z|=1,|G(z)| &= \frac{|F(z)|}{|z|}=|F(z)|=|f(rz)|<1 \end{aligned}$$

קיבלנו על $|z|=1$ מתקיים $|G(z)|<1$

$$\begin{aligned} |G(z)| &= \frac{|f(rz)|}{|z|},z\neq 0 \\ f(rz) &\xrightarrow[r\to 1]{} f(z) \\ \Rightarrow\frac{|f(z)|}{|z|} &\le 1 \end{aligned}$$

הראינו $|f(z)| \le |z|$ עבור $z \in D$ נשאר להראות את הטענת השוויון. נשתמש בטענת המקסימום, הלוקלי.
כלומר אם המקסימום מתקבל בנקודה פנימית. אזי הפונקציה היא קבוע.

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{z} \\ |g(z)| &\le 1 \\ \Rightarrow z \neq 0; |g(z)| &= 1 \end{aligned}$$

אם $g(z_0)$ מקבלת את המקסימום (כלומר $|g(z_0)=1|$) אזי $g \equiv const$

$$\begin{aligned} |g(z)| &= 1 \\ \Rightarrow \lambda = e^{i\theta_0}; g(z) &= \lambda \\ z \neq 0; \frac{f(z)}{z} &= \lambda \\ f(z) &= \lambda z = e^{i\theta_0} z \end{aligned}$$

■

תוצאה נתונה $f(z)$ אנליטית ב $|z|<1$, $f(0)=0$, $z \in D; |f(z)|<1$ אזי

$$\left|f^{'}(0)\right| \le 1$$

ושוויון אם"ם $|\lambda|=1; f(z)=\lambda z$

הוכחה שוב כמו מקודם נגדיר $F(z)=\frac{f(rz)}{z}$ וגם

$$\begin{aligned} g(z) &= \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ a_1 & z=0 \end{cases} \\ f(z) &= a_1 z + a_2 z^2 \dots \\ g(z) &= a_1 + a_2 z + a_3 z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= a_1 \\ |g(z)| &\le 1 \\ \Rightarrow |a_1| &\le 1 \\ a_1 &= \frac{f'(0)}{1!} \\ \Rightarrow \left|f^{'}(0)\right| &\le 1 \end{aligned}$$

הוכחת השוויון

$$|g(0)| = |a_1| = 1$$

אזי לפי משפט המקסימום הלוקלי ב $z=0$ מתקבל

$$\begin{aligned} |g(0)| = |a_1| &= 1 = const \\ (|\lambda|=1) \iff a_1 &= \lambda \\ \iff f &= e^{i\theta_0} z \end{aligned}$$

משפט תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול (מוכלל), חח"ע בעיגול זה ומעתיקה אותו על עיגול במישור W. אזי f היא בהכרח העתק מביוס.

טענת עזר מספיק לדון בעגול היחידה במישור Z המועתק לעיגול היחידה במישור W.

הוכחה נתונים מעגלים מוכללים במישורים D_z, D_w. כי אם

$$D_z \xrightarrow{f} D_w \Rightarrow D_w \quad \xrightarrow{V} \quad U_t \xrightarrow[\varphi(0)=0]{\varphi} U_\zeta \xrightarrow{T} D_z$$

כאשר T, V הם מביוס. אזי בגלל שהעתקי מביוס הם חבורה אם נראה φ העתק מביוס אז $V \circ f \circ T = \varphi$ כלומר

$$f = V^{-1} \circ \varphi \circ T^{-1}$$

ולכן גם f העתק מביוס.

הוכחה (עבור עיגולי יחידה במישורים Z, W)

צ"ל נתונה $f(z)$ אנליטית וחח"ע ב-$D_z = \{z | |z| < 1\}$ ומעתיקה את $D_z \to D_w$ כאשר

$$D_w = \{w | |w| < 1\}$$

כמוכן $f(0) = 0$. נשאר להראות ש-f הוא בהכרח מביוס. כלומר

$$|\lambda| = 1; f(z) = \lambda z$$

$$\begin{aligned} w &= f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \\ z &= \psi(w) \end{aligned}$$

קיבלנו העתק הפוך

$$z = \psi(w) = b_1 w + b_2 w^2 + \ldots$$

לפי תוצאת הלמה של שוורץ אז נקבל

$$\begin{aligned} |a_1| &\leq 1 \\ \frac{1}{|a_1|} = |b_1| &\leq 1 \\ \Rightarrow |a_1| &= 1 \\ \Rightarrow |\lambda| = 1; f(z) &= \lambda z \end{aligned}$$

כלומר מביוס.

■

הרצאה ב 30.12005

4.2 פונקציות אנליטיות בטבעת- פיתוח טורי לורן

דוגמה $f(z) = \frac{1}{(1-z)(2-z)}$

1. רדיוס ההתכנסות יהיה עד נקודת הסינגולריות הראשונה. סביב $z = 0$ טור טיילור מתכנס עבור $D = \{z | |z| < 1\}$. מה קורה ב-$1 \leq |z| \leq 2$ וגם $2 \leq |z|$.

נסתכל על האופציה לפתח טור עם חזקות שליליות

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

דוגמה פונקציה $z+\frac{1}{z}$ מאוד פשוט אבל היא מקרה פרטי של אור לורן

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{-1} &= 1 \\ a_n &= 0, n\in\mathbb{Z}, n\neq\pm1 \end{aligned}$$

הפיתוח הזה נכון לכל z פרט ל-0, כלומר $\{z|0<|z|<\infty\}$

הגדרה טבעת סביב z_0 כמרכז

$$0\le r<R\le\infty; D_{r,R} = \{z|r<|z-z_0|<R\}$$

בדוגמה

$$\frac{1}{(1-z)(2-z)} = \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

אז עבור מקרה 2 (לקחנו 0 כמרכז, אבל לא חייבים לקחת דווקא את $z=0$ כמרכז)

$$\{z|1<|z|<2\}$$

אז

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z} \\ \frac{1}{1-z} &= \frac{1}{-z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{1}{-z}\frac{1}{1-q} \\ &= \frac{1}{-z}\sum q^n \\ &= \frac{1}{-z}\sum\left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum-\frac{1}{z^{n+1}}, 1<|z|<\infty \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} \frac{1}{2-z} &= \frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} \\ &= \sum\frac{z^n}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

קבילנו עד כה מקרה בטבעת

$$D = \{z|1<|z|<2\}$$

הפונקציה $f(z)$ מקיימת

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}-\frac{1}{z^{k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}}$$

הגדרה נתונה טבעת $0 \le r < R \le \infty; D_{r,R} = \{z | r < |z - z_0| < R\}$ וגם $f(z)$ אנליטית וחד-ערכית בטבעת $D_{r,R}$. אזי ניתן לפתח את $f(z)$ לטור חזקות (=טור לוריין)

$$\forall z \in D_{r,R}; \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

והטור מתקנס בהחלט בכל נקודה של $D_{r,R}$ ובמ"ש בכל תת תחום קומפקטי של הטבעת $D_{r,R}$ וכן

$$n \in \mathbb{Z}; c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}}$$

כאשר Γ הוא קו $seroc$ (פשוט, בעל אורך, אינטגרבילי, סגור וחלק למקוטעין)

הערות

1. Γ הוא קו כללי, אבל אפשר להחליף אותו במעגל בלי לאבד את הכלליות הנובע ממשפט קושי על תחום דו-קשרי (Γ הוא מעגל סביב המרכז שרדיוסו ρ כאשר $r < \rho < R$)
2. אם יש 2 קוים נחתכים, אז ניקח קו שלישי קרוב מאוד ל-R והוא שווה לשני הראשונים.
3. אם $n = -1, -2, \ldots; c_n = 0$ הטור כולו נהפך לטור טיילור והפונקציה הופכת לאנליטית בכל העיגול $|z - z_0| < R$(לא רק בטבעת)
4. אם $n = 1, 2, 3, \ldots; c_n = 0$ הפונקציה אנליטית בכל התחום $|z - z_0| > r$.

הוכחה

1. ניקח מעגל R_1 קצת יותר קטן מהמעגל החיצוני ומעגל r_1 קצת יותר גדול מהפנימי. אז בתחום פשוט קשר

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)\, dt}{t - z}$$

נרכיב נקודה למקרה יותר כללי עבור מעגלים ואז

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(t)\, dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{r_1}} \frac{f(t)\, dt}{t - z} = f(z)$$

ונוסיף חריץ (כדי שהתחום יהפוך לפשוט קשר). ובהוכחת ההכללה האינטגרלים על החריץ מתבטלים. כלומר יש הכללה מתחום פשוט קשר לתחום דו קשיר חח"ע מתבטאת בכך שעשינו סיבוב מחריץ לחריץ, לא הוספנו 2π ולכן אינטגרלים על 2 החריצים מתבטלים! אם לא חח"ע הינו מוסיפים 2π בסיבוב ואז האינטגרלים לא היו מתבטלים ולא יכולנו אז להוכיח) ההוכחה דומה למקרה של טילור.

$$n \in \mathbb{Z}; c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0) - (z - z_0)}$$

אם $t \in R$ ועל C_R אז נפתח:
רוצים להגיע ל $\frac{1}{1-q}$ לכן

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0)\left[1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right]}$$

$|q| < 1$ ידוע ש $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1$

$$\Rightarrow \;=\; \sum \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}}$$

על C_{r_1} אם t נע על מעגל קטן אז:

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| &> 1\\ \Rightarrow \left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right| &< 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{t-z} &= \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)}\\ &= \frac{1}{-(z-z_0)\left[1-\frac{t-z_0}{z-z_0}\right]}\\ &= -\sum \frac{(t-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\end{aligned}$$

מיון נקודות סינגולריות מבודדות

הגדרה נקודה[19] סינגולרית: נקודה בה הפונקציה אינה אנליטית.

הגדרה נקודה סינגולרית מבודדת היא נקודה שעבורה הפונקציה אינה אנליטית אבל בסביבתה היא כן אנליטית.

הערה בסינגולרית לוגריטמית מבודדת $\log z$ ובסינגולריות אלגברית מבודדת $\sqrt{z}$, לא נטפל.

סוגים של נקודה סינגולרית מבודדת

1. קיימות אינסוף חזקות שליליות בפיתוח $Lourent$ ב $\{z|0<|z-z_0|<\rho\}$ $r=0; D_{r,\rho} =$ אז זו נקודה סינגולרית עיקרית $essenyial\ singularity$

דוגמה

$$e^{\left(\frac{1}{z^2}\right)} = 1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z^4}+\ldots$$

כלומר יש אינסוף חזקות שליליות $n=2,4,6,\ldots$ וגם $n=1,3,5,\ldots$ לא מופיעות

$$e^{\frac{1}{z}} = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\ldots$$

כאן כל החזקות השליליות מופיעות.

2. מספר סופי של חזקות שליליות

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_1}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2$$

כלומר אם $c_{-m}\neq 0$ נאמר שזה קוטב מסדר m $(pole\ of\ the\ order\ m)$.
אם $m=1$ קוטב מסדר ראשון או קוטב פשוט

$$c_{-1}\neq 0; f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots$$

[19] הרצאה ב 4.1.2005

3. נקודה סינגולרית סליקה אם קיימת המשכה אנליטית של f לנקודה z_0 או בלשון אחרת קימת F אנליטית עבור

$$D_\rho = \{z|\,|z-z_0|<\rho\}$$

כאשר $f\equiv F$ בתחום החלקי $r=0; D_{r,\rho}$.

דוגמה

$$z\neq 0; \frac{\sin z}{z} = \frac{z-\frac{z^3}{3!}+\ldots}{z} = 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}$$

משפט אם $f(z)$ אנליטית בטבעת $D_{r,\rho}=\{z|0<|z-z_0|<\rho\}$ ואם $|f(z)|$ חסומה בסביבה קטנה של z_0 כלומר קיים $0<m<\infty$ כך ש $|f|<M$ ב- $D_{0,\frac{\rho}{2}}$.
אזי z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה.

הוכחה טור לורן בטבעת המקורית $\rho<\infty; D_{0,\rho}=\{z_1|0<|z-z_0|<\rho\}$

$$f(z) = \ldots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$$

צ"ל שטור L (לוריין) הוא טור T (טיילור) או במילים אחרות

$$c_{-1}=c_{-2}=c_{-3}=\ldots=0$$

נוכיח:

$$m\in\mathbb{N}; c_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{-m+1}}$$
$$(\gamma_r=\{z|\,|z-z_0|=r\})\Rightarrow = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r} f(z)(z-z_0)^{m-1}\,dz$$

נראה $\forall\varepsilon>0; |c_{-m}|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|c_{-m}| &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}|f(z)|\,|z-z_0|^{m-1}\,|dz| \\
&< \frac{M}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}|z-z_0|^{m-1}\,|dz| \\
&= \frac{M}{2\pi}r^{m-1}\oint_{|z-z_0|=r}|dz| \\
&= \frac{M}{2\pi}r^{m-1}2\pi r \\
&= Mr^m<\varepsilon \\
\Rightarrow r &= \sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2M}}
\end{aligned}$$

לכן עבור $r=\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{2M}}$ אז $|c_{-m}|<\varepsilon$ וגמרנו.

משפט השארית $(Residue\ Theorem)$

הערה עבור

$$n=-1; c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint f(t)\,dt$$

נקרא ל-$Residue$ c_{-1} (שארית)

$$\begin{aligned} f(z) &= \ldots+\frac{c_{-m}}{(z-\alpha)^m}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-\alpha}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_m(z-z_0)^m \\ \frac{1}{2\pi i}\oint f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint\sum c_m(z-z_0)^m \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum c_m\oint(z-z_0)^m \\ &= \frac{c_{-1}}{2\pi i} \end{aligned}$$

באופן כללי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint(z-1)^{m-1}f(z) = \frac{c_{-m}}{2\pi i}$$

נזכר ש

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dz}{(z-\alpha)^m} = \begin{cases}0 & m\neq 1\\ 1 & m=1\end{cases}$$

משפט ($Residue\ Theorem$)
נתונה f אנליטית בתחום D, γ קו "הגון" ($Seroc$) סגור בתוך D. f אנליטית ב-D פרט למספר סופי של נקודות מבודדות. נניח שעל γ אין אף נקודה סינגולרית של f. כמוכן נסמן את הנקודות הסינגולריות שמוקפות ע"י γ אזי $z_1,z_2,\ldots,z_p$

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{p}c_{-1,j}$$

הוכחה האינטגרל הוא סכום האינטגרלים על $\oint_{|z_i-z|<\varepsilon}f(z)=2\pi ic_{-1}(z_i)$ וכן

$$\begin{aligned} \oint_\gamma f(z) &= \sum_i\oint_{|z_i-z|<\varepsilon}f(z) \\ &= \sum_i 2\pi ic_{-1}(z_i) \end{aligned}$$

תרגיל מצא את האינטגרל

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^\infty\frac{dt}{1+t^2}$$

נמצא בעזרת שארית.
ניצר מסלול $I_r=[-R,R]$, $C_r=\{|z|=R, ImZ>0\}$ ואז $\Gamma_r=C_r\cup I_r$ אז נקודות סינגולריות הם $z=\pm i$ לנו רלוונטי רק $z=i$ ולכן

$$\int_{\Gamma_r}f(z)\,dz = 2\pi iRes(f(z))|_{z=i}$$

נשאיף $R\to\infty$ נראה

$$\int_{C_R^+}f(z)\,dz \to 0$$

אז

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_r} &= \int_{C_R^+} f(z)\,dz + \int_{I_R} f(z)\,dz \\ \left|\int_{C_r^+} \frac{dt}{1+t^2}\right| &\le \int \frac{|dt|}{|t|^2-1} \\ &= \frac{1}{R^2-1}\int |dt| \\ &= \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

הערה $\int \frac{P(t)}{Q(t)}dt$ וגם $Q\neq 0$ על הציר הממשי. כלומר התנאי המספיק לשיטה זו $degP+2\le degQ$.

נחשב

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{(1+i)(1-i)} = \frac{\alpha}{z+i}+\frac{\beta}{z-i} \\ &= \frac{1}{2}\frac{i}{z+i}-\frac{1}{2}\frac{i}{z-i} \\ \Rightarrow \int_{\Gamma_R}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2i}\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z-i} \\ \Rightarrow &= \pi\end{aligned}$$

לכן סה"כ

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{dt}{t+1} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} \\ I &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

דרך חילופית. נניח שאנו יודעים

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z^2} &= \frac{c_{-1}}{z-i}+c_0+\ldots \\ \frac{z-i}{1+z^2} &= c_{-1}+c_0(z-i) \\ \lim_{z\to i}\frac{z-i}{1+z^2} &= c_{-1} \\ \frac{z-i}{1+z^2} &= \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z+i} \\ &\xrightarrow[z\to i]{} \frac{1}{2i}\end{aligned}$$

הגדרה פונקציה מרומורפית בתחום D אם f אנליטית ב-D פרט לנקודות סינגולריות מבודדות

הערה יכולה להיות סידרה אינסופית של נק' מבודדות מצטברות על השפה, לא נאמר כלום על השפה בהגדרה.

משפט הארגומנט תהי $f(z)$ מרומורפית בתחום $\overline{D}=D\cup\partial D$. נסמן את האפסים של f ב-D ע"י

$$\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$$

עם רבויים $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. נסמן כמוכן את הקטבים של f

$\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

עם הריבויים $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.
אזי קיים

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D=r}\frac{f^{'}(z)\,dz}{f(z)} = \sum_{j=1}^{k} m_j - \sum_{j=1}^{m} p_j$$

הסבר בפיטוח לטור טיילור סביב קוטב b_j

$$f(z) = \sum_{l=-p_j}^{\infty} a_j (z-b_j)^l$$

כאשר p_j הריבוי הקוטב. (כלומר הטור מתחיל מ- $\frac{a_j}{(z-b_j)^{p_j}}$)
אז נשים לב ל

$$(\log f(z))^{'} = g(z)$$

ונפעיל את משפט השארית עבור $g(z)$

למה

1. α-אפס מספר t (מריבוי t) אזי

$$a_t \neq 0; f(z) = a_t (z-\alpha)^t + a_{t+1}(z-\alpha)^{t+1} + \ldots$$

פוטרים טור טילור בסביבה קטנה של α

$$= (z-\alpha)^t (\alpha_t + \alpha_{t+1}(z-\alpha) + \ldots)$$
$$= (z-\alpha)^t Q(z)$$

כאשר Q אנליטית וגם $Q(\alpha) = a_t$. תחום אופייני של α מסדר t

$$\log(f(z)) = t\log(z-\alpha) + \log Q$$

כלומר, אם ל-$f(z)$ יש t אפסים ב-α ו-f אנליטית ב-α ובסביבתה אזי

$$\log^{'}(f(z)) = \frac{t}{z-\alpha} + \frac{Q^{'}(z)}{Q(z)} = \frac{f^{'}(z)}{f(z)}$$
$$\Rightarrow Res\left(\frac{f^{'}(z)}{f(z)}\right) = t$$

2. אם α-קוטב מסדר t

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)^t}Q(z) = \frac{1}{z-\alpha}\left\{Q(\alpha) + Q^{'}(\alpha)(z-\alpha) + \ldots\right\}$$
$$\Rightarrow \log(f(z)) = \log\left((z-\alpha)^{-t}\right) + \log Q(z)$$
$$= -t\log(z-\alpha) + \log Q(z)$$
$$\frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{Q^{'}(z)}{Q(z)} - \frac{t}{z-\alpha}$$
$$\Rightarrow Res\frac{f^{'}}{f} = -t$$

3. בכתיבה אחידה הראינו (אפס או קוטב)

$$\begin{aligned} t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}; f(z) &= (z-\alpha)^t Q(z) \\ \frac{f'}{f} &= \frac{t}{z-\alpha} + \frac{Q'(z)}{Q(z)} \end{aligned}$$

הוכחה יש לנו כמה טענות $A=B=C$ נוכיח $A=B$ ובשלב שני $A=C$

1. צ"ל $A=B$.
נבצע שינוי משתנים

$$\begin{aligned} W &= f(z) \\ dW &= f'(z)\,dz \\ \frac{dW}{W} &= \frac{f'(z)\,dz}{f(x)} \end{aligned}$$

לכן

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{r_n} \frac{dW}{W} = \begin{cases} 1 & circles\ the\ point \\ 0 & else \end{cases}$$

הרצאה ב 11.1.2005

הוכחת משפט רושה (בעזרת משפט הארגומנט)

1. מותר להניח כי ל f ו-$f+g$ אין אפסים משותפים
כי נניח

$$f(z_0) = 0$$

k פעמים ב-z_0 וכנ"ל $g(z_0)=0$ אז

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^k Q(z) \\ g(z) &= (z-z_0)^k G(z) \end{aligned}$$

אז ניקח $f_1 = Q(z), f_2 = G(z)$ וגם

$$\begin{aligned} |z-z_0|^k Q(z) &< |z-z_0|^k G(z) \\ \Rightarrow Q(z) &< G(z) \end{aligned}$$

2. נגדיר $h=f+g, Q=\frac{f+g}{f}=\frac{h}{f}=1+\frac{g}{f}$
מספר האפסים

$$N_0(Q) = N_0(h) = N_0(f+g)$$

כאשר אפס

$$\begin{aligned} T(z_0)\neq 0; f &= (z-z_0)^m T(z) \\ \frac{1}{f} &= \frac{1}{(z-z_0)^m}\frac{1}{T(z)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(|g|<|f|) \Rightarrow N_0(h) &= N_0(f+g)=N_0(f)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_0(Q)-N_\infty(Q) &= N_0(h)-N_0(f)=N_0(f+g)-N_0(f)\end{aligned}$$

נפעיל על Q את משפט הארגומנט.

$$\begin{aligned}Q &= 1+\frac{g}{f}\\ \left|\frac{g}{f}\right| &< 1\\ Q &= 1+V(z)\end{aligned}$$

אבל $|V(z)|<1$ וע"פ משפט הארגומנט סיימנו.

דוגמה מצא את מספר האפסים של $f(z)$

$$f(z) = z+\frac{z^2}{3}+\frac{z^{10}}{2}+\frac{1}{10}$$

בתחום $D=\{z|1<|z|<2\}$

פתרון ניקח את מספר האפסים בעיגול הפנימי והחיצוני.
נשים לב כי אנו חוקרים את $D=D_1-\overline{D_2}$ אבל על השפה אין אפסים ולכן לא רלווני אם ניקח את השפה או לא.
עבור המעגל החיצוני ניקח

$$\begin{aligned}h &= f+g\\ f &= \frac{z^{10}}{2}\\ g &= z+\frac{z^2}{3}+\frac{1}{10}\\ |z|=2\Rightarrow |f| &> |g|\end{aligned}$$

לכן

$$N_0(f+g) = N_0(h)=10$$

עבור המעגל הפנימי

$$\begin{aligned}D_2 &= \{z||z|<1\}\\ h(z) &= z+\frac{z^2}{3}+\frac{z^{10}}{2}+\frac{1}{10}\\ h(z) &= f_1+g_2\\ f_1 &= z\\ f_2 &= \frac{z^2}{3}+\frac{z^{10}}{2}+\frac{1}{10}\end{aligned}$$

אזי

$$|f_1(z)| = |z|>\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\geq\left|\frac{z^2}{3}+\frac{z^{10}}{2}+\frac{1}{10}\right|=|f_2(z)|$$

אזי

$$|f_1| > |g_1|$$

$$
\begin{aligned}
1 = N_0\left(f_1\right) &= N\left(f_1+f_2\right) = N_0\left(h\right)
\end{aligned}
$$

מסקנה h מתאפס $10-1=9$ פעמים בטבעת.

תרגיל מצא את מספר השורשים (כלומר האפסים) של

$$
\begin{aligned}
h\left(z\right) &= 3z^5-1+z^2-z \\
D &= \left\{z \,|\, |z|<1\right\}
\end{aligned}
$$

פתרון ניקח

$$
\begin{aligned}
f &= 3z^5-1 \\
g &= z^2-z
\end{aligned}
$$

נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
|f| &\geq \left|3z^5\right|-1=2 \\
|g| &\leq \left|z^2-z\right|\leq 2
\end{aligned}
$$

כלומר יכולות להיות נקודות שוויון (בניגוד למשפט)
לכן נחפש אם יש כאלו נקודות

$$
\begin{aligned}
|g| &= 2 \\
\Rightarrow \left|z\left(z-1\right)\right| &= 2 \\
\Rightarrow z &= -1 \\
\left|f\left(-1\right)\right| &= |-3-1|=4
\end{aligned}
$$

לכן הראינו $|f|>|g|$ על השפה.

$$
\begin{aligned}
N_0\left(f\right) &= N_0\left(h\right) \\
|z|<1; N_0\left(3z^5-1\right)
\end{aligned}
$$

אז

$$
\begin{aligned}
3z^5 &= 1 \\
z^5 &= \frac{1}{3} \\
N_0\left(f\right) &= N_0\left(h\right)=5
\end{aligned}
$$

תרגיל (משפט רושה) הראה שמשוואה

$$
az^n = e^z
$$

כאשר $a>e$ יש בדיוק n פתרונות בעגול היחידה.

פתרון

$$
\begin{aligned}
h\left(z\right) &= az^n-e^z \\
h\left(z\right) &= f+g \\
f &= az^n \\
g &= e^z \\
|f| &= a>e \\
|g| &= \left|e^{x+iy}\right|=e^x\leq e^1 \\
|g| &\leq e<a\leq|f| \\
N_0\left(g+f\right) &= N_0\left(h\right)=N_0\left(f\right)=n
\end{aligned}
$$

משפט (הכללה למשפט ליוביל) אם $f(z)$ שלמה ואם התמונה של $\mathbb{C}$ אינה צפופה ב-$\mathbb{C}_W$ אזי f קבועה

משפט (וירשטרס) אם ל-f יש נקודה סינגולרית עיקרית ב-z_0 אזי התמונה של כל עגול קטן סביב z_0, הינה צפופה בכל המישור.

הוכחה נניח[20] שאין דבר כזה (כלומר הוכחה בשלילה) כלומר קיים עגול קטן סביב z_0 שעבורו אין טענה נכונה כלומר קיים עגול קטן במשלים של התמונה $A=\{z|0<|z-z_0|<\rho\}$ כלומר קיימים a,b כך ש

$$|f(z)-a| \quad > \quad b>0$$

נזכיר את המשפט: אם g אנליטית סביב z_0 (אבל לא בכרח ב-z_0) וחסומה בסביבה הזאת אזי z_0 היא נקודה סינגולרית סליקה. אזי עבור $z\in A$ נגדיר

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{f(z)-a} \\ |g(z)| &= \left|\frac{1}{f(z)-a}\right| \le \frac{1}{b} < \infty \end{aligned}$$

כלומר ל g יש נק סינגולרית סליקה ב $z=z_0$

$$g(z) \quad = \quad \sum c_k (z-z_0)^k$$

לכן

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-z_0)^n G(z) \\ &= \frac{1}{f(z)-a} \\ G(z_0) &\ne 0 \end{aligned}$$

$n\ge 0$ לכן

$$\begin{aligned} f(z)-a &= \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n G(z)} \\ f &= a+\frac{1}{G(z)}\frac{1}{(z-z)^n} \end{aligned}$$

כלומר הראינו של f יש קוטב מסדר n באפס.

תזכורת במשפט השארית אם יש

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \\ &= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz + \int_{\substack{|z|=R \\ Im(z)>0}} \frac{P(z)}{Q(z)}dz\right) \end{aligned}$$

וגם $\deg(p)+2\le\deg(Q)$ אזי ניתן להשתמש במשפט השארית במידה ו-Q אינו מתאפס על הציר.

הלמה (של ז'ורדן) יהיה $m\in\mathbb{N}$, P,Q שני פולינומים טבעים כך ש

$$\deg Q \quad \ge \quad \deg P+1$$

נסתכל על כאשר $C_r=\{z|\,|z|=R, Im(z)>0\}$

$$\int_{C_r} e^{imz}\frac{P(z)}{Q(z)}dz \quad \xrightarrow[R\to\infty]{} \quad 0$$

[20] הרצאה ב 13.1.2005

הרצאה ב 18.1.2005 9:30

חישוב שארית סביב קוטב

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + c_0 + \ldots$$

$$Res f(z)|_{z=a} = c_{-1}$$

ניקח $m=2$

$$g(z) = f(z)(z-a)^2 = c_{-2} + c_{-1}(z-a) + \ldots$$

אז

$$\begin{aligned} \left[f(z)(z-a)^2\right]' &= c_{-1} + \ldots \\ \Rightarrow \lim_{z\to a}\left[f(z)(z-a)^2\right]' &= c_{-1} \end{aligned}$$

עבור $m=3$

$$\begin{aligned} f(z-a)^3 &= c_{-3} + c_{-2}(z-a) + \ldots \\ \left[f(z-a)^3\right]'' &= 2c_{-1} + \ldots \\ \Rightarrow \lim_{z\to a}\left[f(z-a)^3\right]'' &= 2c_{-1} \end{aligned}$$

הערה באופן כללי

$$\lim_{z\to a}\frac{\left[f(z)(z-a)^m\right]^{(m-1)}}{(m-1)!} = c_{-1}$$

שיטת השארית

דוגמה חישוב האינטגרל של $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2}; a>b>0$

פתרון שינוי משתנים

$$e^{i\theta} = z; 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z+\frac{1}{z}}{2} \\ dz &= ie^{i\theta}d\theta \\ &= izd\theta \\ d\theta &= \frac{dz}{iz} \end{aligned}$$

אז

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(a+b\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz} \\
I &= \frac{1}{i}\oint_{|z=1|} \frac{dz}{z}\frac{4z^2}{\left(2az+bz^2+b\right)^2} \\
&= \frac{4}{i}\oint_{|z=1|} \frac{zdz}{b^2\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2} \\
&= \frac{4}{ib^2}\oint_{|z=1|} \frac{zdz}{\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2} \\
&= \frac{4}{ib^2}\oint_{|z=1|} \frac{zdz}{\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2}
\end{aligned}
$$

השורשים

$$
\begin{aligned}
z_{1,2} &= \frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b} \\
z_1 z_2 &= 1
\end{aligned}
$$

שניהם ממשים כי $a>b$ וגם אחד פנימי ואחד חיצוני לעיגול היחידה כי $z_1=\frac{1}{z_2}$. לכן רלוונטי לנו

$$
z_1 = \frac{-z+\sqrt{a^2-b^2}}{b}
$$

נקבל

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{4}{ib^2}\oint\left[\frac{z}{\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2}\right]dz \\
&= \frac{4}{b^2}\left(2\pi\right)Res\frac{z}{\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2}|_{z=z_1} \\
&= \frac{8\pi}{b^2}\lim_{z\to z_1}\left[\frac{\left(z-z_1\right)^2 z}{\left(z-z_1\right)^2\left(z-z_2\right)^2}\right]' \\
&= \frac{8\pi}{b^2}\lim_{z\to z_1}\left[\frac{z}{\left(z-z_2\right)^2}\right]' \\
&= \frac{8\pi}{b^2}\lim_{z\to z_1}\left(\frac{\left(z-z_2\right)^2-2z\left(z-z_2\right)}{\left(z-z_2\right)^4}\right) \\
&= \frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{\left(z_1-z_2\right)^2-2z_1\left(z_1-z_2\right)}{\left(z_1-z_2\right)^4}\right) \\
&= -\frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{z_2+z_1}{\left(z_1-z_2\right)^3}\right) \\
&= -\frac{8\pi}{b^2}\left(\frac{-\frac{2a}{b}}{\left(\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^3}\right) \\
&= \frac{2\pi a}{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

השלמות

משפט $morera$ נתונה f רציפה בתחום פשוט קשר D וכן נתון

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

כאשר c קו כלשהו חלק למקוטעין ונמצא בתוך D. אזי f אנליטית ב-D.

הוכחה האינטגרל לא תלוי בדרך. לכן נגדיר

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)\,dt$$

אזי

$$F^{'}(z) = f(z)$$

לכן יש ל-$f(z)$ את כל הנגזרות כי ל $F(z)$ יש נגזרת מכל סדר ולכן אנליטית.
■

עקרון הפרמננס

דוגמה $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ נרצה להרכיב לכל המישור

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$$

פתרון נרצה להוכיח עבור

$$y \in \mathbb{R}; \sin(z+y) = \sin z \cos y + \sin y \cos z$$

על הציר הממשי $z \in \mathbb{R}$ הנוסחה נכונה ואז ע"פ נוסחת היחידות הם מזדהות על כל התחום.
ניקח $w \in \mathbb{C}$

$$\sin(z_0+w) = \sin z_0 \cos w + \sin w \cos z_0$$

וגם כאן עבור $w \in \mathbb{R}$ ומהיחידות נכון לכל המישור.

שימוש במשפט השארית לחישוב אינטגרל שלא ניתן לחשב אחרת

תרגיל חשבו[21]

$$0<\lambda<1; I = \int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx$$

פתרון הפונקציה שנבחר

$$f(z) = \frac{z^{\lambda-1}}{1+z}$$

נבחר מסלול אינטגרציה: כאשר $R>1, \varepsilon>0, \delta>0$ ונבחר

$$C_1 = B_R(0,R), C_2 = B_\varepsilon(0,\varepsilon), C_{3,4} = Imz = \pm\delta$$

[21] הרצאה ב 20.1.2005

ונעביר את γ מ-C_3 ל C_2 ל-C_4 ל-C_1 וחזרה ל-C_3.
נשים לב כי הפונקציה רב ערכית ולכן האינטגרל על C_3 לא מתאפס אם האינטגרל על C_4 אז

$$\begin{aligned} z &= e^{\log z} \\ \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} &= \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z} \\ &= \frac{e^{(\lambda-1)(\ln\rho+i\theta)}}{1+z} \end{aligned}$$

נבחר כאן $\log z$ הענף הראשי במובן זה ש $\log 1 = 0$

$$\begin{aligned} &= \frac{e^{(\lambda-1)\ln\rho}e^{i\theta(\lambda-1)}}{1+z} \\ &= \frac{\rho^{\lambda-1}e^{i\theta\lambda}e^{-i\theta}}{1+z} \end{aligned}$$

מציאת השארית בנקודה $z=-1$ ($1<R<\infty, 0<\varepsilon<1$)
נשים לב כי $0 \le \theta < 2\pi$ לכן עבור $z=-1$ ערך $\theta=\pi$

תזכורת $\quad Ref(z)|_{z=z_0} = \lim (z-z_0) f(z)$ אם הוא קוטב מסדר ראשון.

$$\begin{aligned} Ref(z)|_{z=-1} &= \lim_{z\to-1} z^{\lambda-1} \\ &= \lim_{z\to-1} \rho^{\lambda-1}e^{i\theta\lambda}e^{-i\theta} \\ &= -e^{i\pi\lambda} \end{aligned}$$

איך משתנים האינטגרנדים לאחר סיבוב

$$\begin{aligned} \theta=0: \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} &= \frac{\rho^{\lambda-1}}{1+\rho} \\ \theta=2\pi: \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} &= \frac{\rho^{\lambda-1}e^{2i\pi\lambda}e^{-2\pi i}}{1+\rho} \\ &= \frac{\rho^{\lambda-1}e^{2i\pi\lambda}}{1+\rho} \end{aligned}$$

כלומר ההבדל הוא כופל שלא תלוי ב ρ אז

$$\int_{C_3}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz - \int_{C_4}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\rho^{\lambda-1}}{1+\rho}\left(1-e^{2i\pi\lambda}\right)$$

אם נניח שהוכחנו $\int_{C_\varepsilon}\to 0, \int_{C_R}\to 0$ אז

$$\begin{aligned} \left(1-e^{2i\pi\lambda}\right)I &\to 2\pi i Ref = -2\pi i e^{-i\pi\lambda} \\ I &= \frac{-2\pi i e^{-i\pi\lambda}}{1-e^{2i\pi\lambda}} \\ &= \frac{e^{-2i\pi\lambda}2\pi i}{e^{i\pi\lambda}-e^{-i\pi\lambda}} \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\lambda} \end{aligned}$$

נשאר להראות $\int_{C_\varepsilon},\int_{C_R}\to 0$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_R}\frac{z^{\lambda gm,-1}}{1+z}dz\right| &\le \int\frac{\left|z^{\lambda-1}\right||dz|}{|z|-1}\\
&\le \frac{1}{R-1}\int\left|z^{\lambda-1}\right||dz|\\
\left(z^{\lambda-1}=\rho^{\lambda-1}e^{i\theta\lambda}e^{-i\theta}\right) \quad &\le \frac{R^{\lambda-1}}{R-1}\int|dz|\\
&\le \frac{R^{\lambda-1}}{R-1}2\pi R\\
&= \frac{R^{\lambda}}{R-1}2\pi\\
(\lambda<1)\Rightarrow \quad &\xrightarrow[R\to\infty]{} 0
\end{aligned}
$$

החלק השני

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{\lambda-1}}{1+z}dz\right| &\le \int_{C_\varepsilon}\frac{\left|z^{\lambda-1}\right||dz|}{1-|z|}\\
&\le \frac{\varepsilon^{\lambda-1}}{1-\varepsilon}2\pi\varepsilon\\
&\le \frac{\varepsilon^{\lambda}}{1-\varepsilon}2\pi\\
(\lambda>0)\Rightarrow \quad &\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0
\end{aligned}
$$

משפט ההעתקה הפתוחה פונקציה[22] אנליטית (שאינה קבוע) בנקודה z_0 ובסביבתה מעתיקה את התחום D

$$D = \{z|\,|z-z_0|<\rho\}$$

לקבוצה פתוחה, בתנאי ש ρ מספיק קטן

הוכחה נניח בלי הגבלת הכלליות $f(z_0)=0$ (אחרת נסתכל על $f(z)-f(z_0)$).
$\rho\ll 1$ $|z-z_0|=\rho; f(z)\neq 0$ אז

$$
\begin{aligned}
\forall z\in|z-z_0| &= \rho\\
\Rightarrow |f(z)| &\ge m>0
\end{aligned}
$$

נבחר $\tau<m$ נוכיח כי המעגל ברדיוס τ (בתמונה) שבחרנו מתכסה כולו ע"י $f(D)$. במילים אחרות

$$\{w,|w|\le\tau\} \subset f(D)$$

ולכן אפס היא נקודה פנימית.
נבחר ערך $f(z_0)=c$ ב-$f(D)$

$$g = f(z)-c$$

לפי רושה
יודעים של $f(z)=0$ יש פתרון ב-D ($f(z_0)=0$)

$$
\begin{aligned}
z\in\partial D; |f(z)|>|c|; N_0(g) &= N_0(f)\\
f(z) &= c-g(z)=0
\end{aligned}
$$

כלומר מספר הפתרונות למשוואה $f(z)=c$ הוא אותו מספר כמו $f(z)=0$

[22] הרצאה ב 25.1.2005

משפט הורביץ תהיה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אנליטיות בתחום D כך ש

$$f_n \twoheadrightarrow f$$

ב-D (במ"ש על תת-קבוצות קומפקטיות של D)
כמוכן

$$z_0 \in D; f(z_0) = 0$$

נקודה מסוימת.
אזי קימות שני אופציות אפשריות בלבד

1. $f \equiv 0$ ב-D
2. עבור כל $\varepsilon > 0$ מספיק קטן ועגול $N(z_0)$ ε סביב z_0 במרכזו. אז f_n מתאפסות ב-$N(z_0)$ החל מ-n מספיק גדול.

הוכחה נשתמש במשפט $Rouche$.
יש לנו $D = \{z | |z - z_0| < \rho\}, \partial D = \{z | |z - z_0| = \rho\}$ נדרוש f אינה מתאפסת על ∂D.
נסמן $f_n = (f_n - f) + f$ אז נשתמש בכך ש $f_n - f \twoheadrightarrow 0$. אז נשתמש בכך ש $N_0(f_n) = N_0(f)$.
אם נראה ש $|f - f_n| < |f|$ ב- $\overline{D}$.
אבל עבור n מספיק גבוה

$$|f_n - f| < m \le |f(z)|$$

$(\forall z \in \partial D; |f(z)| \ge m)$
כאשר f_n מתאפסת אותו מספר פעמים כמו f.

מסקנות של משפט הורביץ

1. תהיה נתונה f_n סדרת פונקציות אנליטיות וחח"ע (אלו נקראות פשוטות $uni - value$) בתחום D. נתון, כמו כן,

$$f_n \twoheadrightarrow f$$

השאיפה במ"ש בכל תת-תחום קומפקטי. אזי קיימות רק שני אפשרויות

(א) $f \equiv const$

(ב) f פשוטה ב-D.

הוכחה כמובן ש א' יכול להתקיים

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{z}{n} \\ D &= \{z | |z| < 1\} \\ f_n(z) &\twoheadrightarrow 0 \end{aligned}$$

נניח ש-א' אינו מתקיים. מטרתנו להראות שאז מתקיים ב'. נשתמש במשפט הורביץ.
ונניח $f(z)$ פונקציה גבולית אינה חח"ע ב-D.
ניקח שני נקודות כך ש

$$\overline{N}(z_1) \cap N(z_2) = \phi$$

נגדיר

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - f(z_1) \\ g_n(z) &= f_n(z) - f_n(z_1) \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}f_n(z)-f_n(z_1) &\twoheadrightarrow f(z)-f(z_1)\\ \Rightarrow g_n(z) &\twoheadrightarrow g(z)\end{aligned}$$

וגם $g(z_2)=f(z_2)-f_n(z_1)=0$.
לפי הורוביץ החל מ-n מסוים g_n מתאפס לפחות פעם אחת ב-$N(z_2)$ נניח בחרנו n מספיק גדול אזי נובע קיימת $z_3\in N(z_2)$ אז

$$\begin{aligned}g_n(z_3) &= 0\\ g_n(z_3) &= f_n(z_3)-f_n(z_1)=0\end{aligned}$$

אבל $z_3\neq z_1$ לפי בחירת התחומים בסתירה.

2. אם f אנליטית וחח"ע (כלומר פשוטה) ב-D $\Leftarrow$ $f'(z)\neq 0$ ב-D.

הוכחה $f_n=\frac{f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z)}{\frac{1}{n}}\to f'(z)$ אם $f'(z)=0$ אזי החל מ-n מסוים גם f_n מתאפסת.