$\Omega =$ קבוצת התוצאות האפשריות של הניסוי

$A =$ קבוצת התוצאות המבוקשות של הניסוי, $|A| =$ מספר האיברים של A $\leftarrow$ $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

<u>הסתברות מותנית:</u>

$$P(A|B)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(B)} \xrightarrow{P(B)>0} P(A\bigcap B)=P(A|B)\cdot P(B)$$

<u>נוסחאת ההסתברות השלמה:</u>

אם: $\Omega=\bigcup_i B_i \leftrightarrow \sum_i P(B_i)=1$ אזי: $P(A)=\sum_i P(A|B_i)\cdot P(B_i)$

$P(B_i)>0$

$P(B_i\bigcap B_j)=0$

<u>נוסחת בייס:</u>

אם $P(A),P(B)>0$ אזי: $P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$

ובניסוח נוסף:

אם: $\Omega=\bigcup_i A_i \leftrightarrow \sum_i P(A_i)=1$ אזי: $P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)\cdot P(A_i)}{\underbrace{\sum_j P(B|A_j)\cdot P(A_j)}_{P(B)}}$

$P(A_i)>0$

$P(A_i\bigcap A_j)\neq 0$

<u>מאורעות בלתי תלויים:</u>

A ו-B ב"ת זה בזה אם: $P(A\bigcap B)=P(A)\cdot P(B)$

הערה: אם בנוסף $P(B)>0$ אזי: $P(A|B)=P(A)$

תכונות: A ו-B ב"ת, אזי: A,B^C ; A^C,B ; A^C,B^C ב"ת

<u>משתנה מקרה בדיד</u>

<u>מודל ניסויי ברנולי עם פרמטר P</u>

<u>בינומי:</u> (ההסתברות לk הצלחות מתוך n ניסויים)

x=מספר ההצלחות

n=מספר הניסויים

k=0,1,2,3,…,n

$$P_X(k)=\binom{n}{k}p^K\cdot q^{n-k}$$

$$X\sim Bin(n,p)$$

<u>גיאומטרי:</u> (ההסתברות לk ניסויים עד להצלחה הראשונה)

$$P_Y(k)=p\cdot q^{k-1}$$

$$Y\sim Geom(p)$$

- חוסר הזיכרון של הפילוג הגיאומטרי: $P(x>n+k|x>n)=P(x>k)$

- <u>פואסון:</u>

$$P_X(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$X \sim Pois(\lambda)$$

- קירוב פואסוני: כאשר n גדול ו‑p קטן (כאשר $1 < n \cdot p < 10$), אזי:

$$Bin(n,p) \approx Pois(\lambda = n \cdot p)$$

<u>משתנה מקרי רציף</u>

X הוא משתנה מקרי רציף בהחלט אם קיימת $f_x(x)$ הנקראת פונ' צפיפות

כך ש $P(a < x < b) = \int_a^b f_x(x)dx$.

תכונות:

1. $0 < f_x(x)$
2. $P\left(\underbrace{-\infty < x < \infty}_{\Omega}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1$
3. פונק' צפיפות נקבעת ביחידות עד כדי מספר סופי או ניתן להימנות של נקודות.

<u>פונקציית צפיפות למשתנה מקרי אחיד</u>

$$f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & else \end{cases}$$

<u>פונקציית צפיפות למשתנה מקרי מעריכי/אקספוננציאלי</u>

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$X \sim \exp(\lambda)$$

- חוסר הזיכרון של הצפיפות המעריכית: $P(x > t+s \mid x > t) = P(x > s)$

<u>פונקציית צפיפות נורמלית כללית/גאוסית</u>

$$f_x(x) = \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$X \sim (\mu, \sigma^2)$$

כללי:

$$x \sim N(0,1)$$

$$P(a < x < b) = \phi(b) - \phi(a)$$

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x)$$

נוסחת התיקון:

$$z \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(a < z < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < x < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$$

<u>פונקציית צפיפות גאמה</u>

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda x}}{(r-1)!} & x > 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$X \sim Gamma(r, \lambda)$$

- פונקציית צפיפות של סכום אקספוננציאלים, עבור $r = 1$ מתקבלת צפיפות אקספוננציאלית רגילה.

<u>פונקציית התפלגות</u>

<u>תכונות:</u>

1. $\lim_{x\to-\infty} F_x(x)=0$
2. $P(-\infty<x<\infty)=\lim_{x\to\infty} F_x(x)=1$
3. $F_x(x)$ פונקצייה לא יורדת
4. $F_x(x)$ רציפה מימין (ערך הפונקציה הוא הגבול מימין)
5. אם x מ"מ רציף (בהחלט) אזי $F_x(x)$ פונק' רציפה
6. $P(X=x)=F_x(x)-\lim_{y\to x^-} F_x(y)$= הקפיצה בערך $F_x(x)$ בנק' X

<u>משפט:</u>

x מ"מ רציף אזי: $F'_x(x)=f_x(x)$ בכל x בו $F_x(x)$ גזירה.

ניסוח נוסף: $F_x(x)=\int_{-\infty}^{x} f_x(u)du$

<u>משפט:</u>

יהיה x מ"מ $F_x(x)$ פונק' התפלגות שלו.

קיים קבוע $0\le\alpha\le 1$, $\alpha=$ סכום הקפיצות (נסמן $\beta=1-\alpha$),

קיימת פונק' התפלגות *בדידה* $F^d{}_x(x)$ וקיימת פונק' התפלגות *רציפה* $F^c{}_x(x)$,

כך ש: $F_x(x)=\alpha F^d{}_x(x)+\beta F^c{}_x(x)$

<u>משפט:</u>

יהי x מ"מ בעל צפיפות $f_x(x)$,

תהי $h(x)$ פונ' מונוטונית ממש וגזירה(בקטע), נגדיר $y=h(x)$, אזי :

$$f_Y(y)=\left|\left(h^{-1}(y)\right)'\right|\cdot f_X\left(h^{-1}(y)\right)$$

<u>משפט:</u>

יהי x מ"מ בעל צפיפות $f_x(x)$,

תהי $h(x)$ פונק' גזירה כזו שלכל y יש מספר סופי של מקורות $x_{1,\dots,}x_k$ (בתומך של x), אזי:

$$f_Y(y)=\sum_{i=1}^{k}\left|\left(h_i^{-1}(y)\right)'\right|\cdot f_X\left(h_i^{-1}(y)\right)$$

<u>**תוחלת** עבור מ"מ בדיד</u>

$$EX=\sum xP_x(x)$$

עבור מ"מ בינומי: $EX=np$

עבור מ"מ גיאומטרי: $EX={}^1\!/_p$

עבור מ"מ פואסוני: $EX=\lambda$

- $\sum_0^\infty \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda$
- $\sum kq^{k-1} = \left(\sum q^k\right)'$
- נוסחאת הבינום: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} p^k = (p+q)^n$

<u>**תוחלת** עבור מ"מ רציף</u>

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_x(x)dx$ * בתנאי שהאינטגרל מוגדר היטב (יכול לקבל את הערך $\pm\infty$)

עבור מ"מ אחיד: $EX = {(b-a)}/{2}$ (אמצע הקטע)
עבור מ"מ אקספוננציאלי: $EX = 1/\lambda$
עבור מ"מ גאוסי: $EX = \mu$

<u>למה</u>: אם צפיפות $f_x(x)$ סימטרית סביב מספר a, כלומר $f_x(a+x) = f_x(a-x)$,
אם התוחלת קיימת, אזי: $EX = a$

- $$\begin{cases} \int_{-\infty}^{0} xf_x(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} F_x(x)\,dx \\ \int_{0}^{\infty} xf_x(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} (1-F_x(x))dx \end{cases} \leftrightarrow EX = -\int_{-\infty}^{0} F_x(x)\,dx + \int_0^\infty (1-F_x(x))dx$$

<u>**תוחלת** עבור מ"מ מעורב</u>

$$F_X(x) = \alpha F^{(d)}(x) + \beta F^{(c)}(x)$$

אם x מ"מ מעורב כאשר $Y \sim F^{(d)}(x)$, $Z \sim F^{(c)}(x)$ אזי: $EX = \alpha EY + \beta EZ$

<u>**תוחלת** של פונקצייה של מ"מ</u>

משפט: X מ"מ בעל צפיפות $f_x(x)$, $Y = h(x)$, אם EY קיימת, אזי: $EY = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_X(x)dx$
עבור מקרה בדיד: $EY = \sum_x h(x) p_X(x)$

<u>**מומנטים**</u>

$m_k = E(x^k)$

- $m_0 = 1$
- $X \sim N(0,1)\left\{\begin{matrix} k-odd & m_k = 0 \\ k=2i-even & m_{2i} = (2i-1)!! \end{matrix}\right.$

<u>**תכונות** יסודיות של **תוחלת**</u>

- $E(X+a) = EX + a$
- $E(cX) = cEX$
- $E(g(x)+h(x)) = Eg(x) + Eh(x)$

<u>שונות</u>

$$VarX = \underbrace{EX^2}_{m_2} - \underbrace{(EX)^2}_{(m_1)^2}$$

<u>שונות של מ"מ בדידים:</u>

- $VarX = \lambda \leftarrow X \sim pois(\lambda)$
- $VarX = npq \leftarrow X \sim Bin(n,p)$
- $VarX = \frac{q}{p^2} \leftarrow X \sim Geom(p)$

<u>שונות של מ"מ רציפים:</u>

- $Var = \frac{(b-a)^2}{12} \leftarrow X \sim U[a,b]$
- $Var = \frac{1}{\lambda^2} \leftarrow X \sim \exp(\lambda)$
- $VarX = \sigma^2 \leftarrow X \sim N(\mu, \sigma^2)$

<u>תכונות של השונות</u>

- $X = const \leftarrow$ מ"מ מנוון אמ"מ: $\sigma_x{}^2 = VarX = 0$
- $Var(X+a) = Var(X)$
- $Var(cX) = c^2 Var(X)$
- $\sigma_{cx} = |c|\sigma_x$

<u>פונקציה יוצרת מומנטים</u>

אם X מ"מ,עבור $s \in \mathbb{R}$ נגדיר $M_X(s) = Ee^{sx}$.

<u>תכונות:</u>

- $M_X(s)$ מוגדרת לכל s.
- $M_X(s)$ יכולה להיות סופית או אינסופית,
  נסמן: $I_X = \{s | M_X(s) < \infty\}$.
- לכל X, $0 \in I_X$, $M_X(0) = 1$.
- I_X קטע רציף הכולל את 0.

אם ל- X יש צפיפות $f_X(x)$ אזי: $M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)dx$ (התמרת לפלס של הצפיפות).

<u>משפט, (נגזרות של פונקציה יוצרת מומנטים):</u>

ננחי ש I_X מכיל קטע פתוח סביב $s=0$ וש- $M_X(s)$ גזירה k פעמים ברציפות ב- $\Delta = 0$,
אזי קיים המומנט מסדר k של X ו- $EX^{(k)} = m_k = M_k^{(k)}(0)$

- אם ניתן לכתוב את $M_X(s)$ כטור: $-\delta < s < \delta$ $M_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$ אזי: $m_k = k!c_k$

יניב בר-מימון

<u>פונקציה אופיינית</u>

אם X מ"מ אזי: $\varphi_X(t)=Ee^{itx}=\int_{-\infty}^{\hbar}e^{itx}\cdot f_X(x)\,dx$

<u>תכונות:</u>

- $\varphi_X(t)$ מוגדר וסופי לכל t
- $\left|\varphi_X(t)\right|\le 1,\varphi_X(0)=1$
- בהנחה ש $\varphi_X^{(k)}(0)$ קיימת אזי: $\varphi_X^{(k)}(0)=i^k m_k$

<u>משפט: אי-שיוויון צ'בישב</u>

יהי X מ"מ בעל תוחלת μ וסטיית תקן σ:

1. $P\left(\left|x-\mu\right|>b\right)\le\frac{\sigma^2}{b^2}$
2. ניסוח נוסף, כאשר $b=a\sigma$: $P\left(\left|x-\mu\right|>a\sigma\right)\le\frac{1}{a^2}$

<u>משפט: אי-שיוויון ינסן</u>

יהי X מ"מ ו-$h(x)$ פונק' קמורה, בהנחה שהתוחלות קיימות וסופיות: $Eh(x)\ge h(Ex)$.

<u>תוספת:</u>אם קיים קטע I כך ש-$P(x\in I)=1$, ו-$h(x)$ קמורה בקטע, עדיין מתקיים המשפט.

<u>וקטור אקראי</u>

פונקציית ההסתברות של ו"א בדיד $(X_1,...,X_n)$ נתונה ע"י:

$P_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=P(X_1=x_1,...,X_n=x_n)$, כלומר לחיתוך של פונקציות ההסתברויות הבדידות.

תכונות:

- $P_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\ge 0$
- $\sum_{X_1}\sum_{X_2}...\sum_{X_n}P_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=1$
- אם (X,Y) בדיד$\leftarrow$X בדיד, Y בדיד
- $P_X(x)=\sum_y P_{X,Y}(x,y)\overset{n=2}{\leftarrow}P_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2,...,x_n}P_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$

<u>הערה:</u>מפונקציית ההסתברות המשותפת ניתן לחשב את פונקציות ההסתברות השוליות
אך לא ניתן ע"י פונקציות ההסתברות השוליות (אפילו לא ע"י כולן) לחשב את המשותפת.

<u>וקטור אקראי רציף</u>

$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$ נקראת פונקציית הצפיפות המשותפת של $(x_1,...,x_n)$ בעלת תכונות:

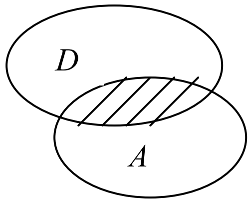
- $P\left((x_1,...,x_n)\in A\right)=\int...\int f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n$
- $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\ge 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)\,dx_1...dx_n=1$
- $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$ נקבעת ביחידות עד כדי קבוצות של $(x_1,...,x_n)$ שנפחן במימד n הוא 0.

- <u>צפיפות שולית</u>: אם ל $(X_1,...,X_n)$ יש צפיפות משותפת $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$ ל- X_1 יש צפיפות:

$$f_{X_1}(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_2,...,X_n}(x_2,...,x_n)dx_2...dx_n$$

- <u>עבור צפיפות אחידה</u>- אם D תחום ב- $\mathbb{R}^n$ בעל נפח d הצפיפות האחידה ב- D :

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=\begin{cases}1/d & (x_1,...,x_n)\in D\\ 0 & else\end{cases}$$



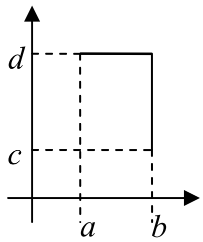
$$P_{X_1,...,X_n}((x_1,...,x_n)\in A)=\frac{VOL(A\cap D)}{d}$$

<u>פונקציית התפלגות של וקטור אקראי</u>

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=P(X_1\le x_1,...,X_n\le x_n)$$

<u>תכונות:</u>

- $\lim\limits_{\substack{(x\to-\infty)or\\(y\to-\infty)}}F_{X,Y}(x,y)=0$
- $\lim\limits_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x)=F_X(x)$
  $\lim\limits_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=P(Y\le y)=F_Y(y)$
- $F(b,d)=F(b,c)-F(a,b)+F(a,c)$



- $$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}...\int_{-\infty}^{x_n}f_{X_1,...,X_n}(u_1,...,u_n)du_1...du_n$$
  $$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=\frac{\partial^n F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)}{\partial x_1...\partial x_n}\xrightarrow{n=2}f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2F_{X,Y}(x,y)}{\partial x\partial y}$$

<u>וקטור אקראי בלתי תלוי</u>

$$F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=F_{X_1}(x_1)\cdot F_{X_2}(x_2)\cdot...\cdot F_{X_n}(x_n)$$

במקרה הרציף: $X_1,...,X_n$ ב"ת אמ"מ $\leftrightarrow f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1} f_{X_i}(x_i)$

במקרה הבדיד: $X_1,...,X_n$ ב"ת אמ"מ $\leftrightarrow P_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1} P_{X_i}(x_i)$

- עבור וקטור אחיד- הרכיבים לא יהיו ב"ת אם תחום האחידות לא יהיה מלבן (מקביל לצירים).

<u>קונבולוציה</u>

הגדרה: נתונות שתי פונקציות אינטגרביליות f_U,f_V הפעולה:

$f_U * f_V=f_{U+V}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_U(u)f_V(x-u)du$ נקראת הקונבולוציה של f_U,f_V

- $f_U*f_V=f_V*f_U$
- $Gamma(r+s,\lambda)=Gamma(r,\lambda)*Gamma(s,\lambda)$

עבור מקרה <u>בדיד</u>: U,V בדידים וב"ת $P_U(k),P_V(k)$ חיוביים רק ב- k שלם, אזי:

$$P_{U+V}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}P_U(k)P_V(n-k)$$

- $Pois(\lambda_1) * Pois(\lambda_2) = Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$
- $Bin(n,p) * Bin(m,p) = Bin(n+m,p)$

<u>תוחלת של פונקצייה של ווקטור אקראי</u>

יהי $(X_1,...,X_n)$ ו"א בעלת צפיפות $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$ ו- $Y = h(X_1,...,X_n)$, אזי:

$$EY = \int ... \int h(x_1,...,x_n) f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) dx_1 ... dx_n$$

- $E(X+Y) = EX + EY$
- אם X ו-Y לא מתואמים אזי: $E(XY) = EX \cdot EY$

<u>טרנספורמציה של ווקטור אקראי</u>

יהי $(X_1,...,X_n)$ ו"א בעלת צפיפות $f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n)$ ו- $(X_1,...,X_n) \xrightarrow{T} (y_1,...,y_n)$

הטרנספורמציה ההפוכה נתונה ע"י $(y_1,...,y_n) \xrightarrow{S} (X_1,...,X_n)$

$$f_{Y_1...Y_n}(y_1,...,y_n) = \left|J_S(y_1,...,y_n)\right| f_{X_1...X_n}(S(y_1,...,y_n))$$

- עבור $n=2$: $(X,Y) \xrightarrow{T} (U,V)$, $f_{U,V}(u,v) = \left|J_S(u,v)\right| f_{X,Y}(S(u,v))$

$$\left|J_S(U,V)\right| = \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(U,V)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial U} & \frac{\partial X}{\partial V} \\ \frac{\partial Y}{\partial U} & \frac{\partial Y}{\partial V} \end{vmatrix} = \left|J_T(U,V)\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial X} & \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial X} & \frac{\partial V}{\partial Y} \end{vmatrix}^{-1}$$

<u>התפלגות מותנית</u>

- A מאורע $P(A) > 0$, X מ"מ, אזי: $F_{X|A}(x|A) \equiv P(X < x|A) = \frac{P(\{X<x\} \cap A)}{P(A)}$

  עבור בדיד: $P_{Y|A}(y|A) \equiv P(y = Y|A) = \frac{P(\{Y=y\} \cap A)}{P(A)}$

- הגדרה: $f_{X|A}(x|A) = \frac{d}{dx} F_{X|A}(x|A)$

$$E(x|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|A}(x|A) dx$$

- אם (X,Y) ו"א בעל צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)$ אזי: $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,

  ובהתאם: $E(Y|x=X) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y|x) dy$

<u>נוסחאת התוחלת השלמה:</u> $E(X) = E(X|A) \cdot P(A) + E(X|A^C) \cdot P(A^C)$

<u>נוסחאת הצפיפות השלמה:</u> $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x) dx$

<u>משפט:</u> $f_{Y|X}(y|x) = \frac{\overbrace{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}^{f_{X,Y}(x,y)}}{f_X(x)}$

משפט ההחלקה: $E\left(E\left(X\middle|Y\right)\right)=EX$

קווריאנס

הגדרה: $\sigma_{X,Y}=\operatorname{cov}(X,Y)=E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]$

בהנחה כי: $EX^2<\infty, EY^2<\infty$

תכונות:

- $\operatorname{cov}(X,X)=\operatorname{var}(X)\geq 0$
- $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$
- אם X,Y בלתי מתואמים:
  $\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=0$
  ${\sigma_{X+Y}}^2={\sigma_X}^2+{\sigma_Y}^2$
- $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$
- $\operatorname{cov}(a\cdot X,Y)=a\cdot\operatorname{cov}(X,Y)$
- $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$
- $\operatorname{cov}(X+C,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)$
- $\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}X+\operatorname{var}Y+2\operatorname{cov}(X,Y)$

משפט: לכל X,Y $|\sigma_{XY}|=|\operatorname{cov}(X,Y)|\leq\sigma_X\sigma_Y$,

צורה נוספת: $|\sigma_{XY}|=|\operatorname{cov}(X,Y)|\leq\sqrt{\operatorname{cov}(X,X)}\cdot\sqrt{\operatorname{cov}(Y,Y)}$

קורלציה

הגדרה: $corr(X,Y)=\rho_{X,Y}=\dfrac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$

$\rho_{X,Y}$ מוגדרת רק אם בנוסף להנחה של cov : $\sigma_X>0,\sigma_Y>0$

תכונות:

- $-1\leq\rho_{X,Y}\leq 1$
- $\rho_{X,Y}=\rho_{Y,X}$
- $\rho_{a\cdot X,Y}=sign(a)\cdot\rho_{X,Y}$
- $\rho_{X+C,Y}=\rho_{X,Y}$

<u>צפיפות גאוסית רב-מימדית</u>

<u>הגדרה:</u> ו"א $\left(x_1,...,x_n\right)$ נקרא גאוסי סימטרי אם קיימת מטריצה סימטרית A

כך ש: $f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=C\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}^T Ax\right)}$.

- הרכיבים ב"ת $\leftrightarrow$ A אלכסונית.
- לא כל A יכולה לשמש לתבנית ריבועית.

<u>הגדרה:</u>מטריצה A מוגדרת חיובית אם $\forall\left(x_1,...,x_n\right):\ x^T Ax=\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}x_i x_j\ge 0$

והשיוויון מתקיים רק עבור $\left(x_1,...,x_n\right)=\left(0,...,0\right)$

<u>טענה:</u> צפיפות $f_{\vec{X}}\left(\vec{x}\right)=C\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\vec{x}^T Ax\right)}$ $\leftrightarrow$ A מוגדרת חיובית.

- מטריצה A מוגדרת חיובית אמ"מ כל הערכים העצמיים של $A>0$
- מטריצה A מוגדרת חיובית אמ"מ כל המינוריים הראשיים של $A>0$

<u>תכונות:</u>

- אם $\left(x_1,...,x_n\right)$ וקטור גאוסי, אזי:

$$X_1-\text{מ"מ גאוסי}\quad X_1\sim N\left(0,\sigma_1^2\right)$$
$$\vdots$$
$$X_n-\text{מ"מ גאוסי}\quad X_n\sim N\left(0,\sigma_n^2\right)$$

- אם $\left(x_1,...,x_n\right)$ וקטור גאוסי סימטרי אזי: $k\subset n$, $\left(x_{i_1},...,x_{i_k}\right)$ גם יהיה וקטור גאוסי סימטרי.
- $\left(x_1,...,x_n\right)$ וקטור גאוסי סימטרי $\mathrm{M}, Y=MX$ מטריצה $n\times n$ לא סינגולרית $\det\left(M\right)\ne 0$,

  אזי: Y וקטור גאוסי סימטרי: $f_Y\left(y\right)=C\underbrace{\left|\det\left(M^{-1}\right)\right|}_{const}e^{-\frac{1}{2}\left(M^{-1}y\right)^T A\left(M^{-1}y\right)}$

<u>מסקנה:</u>לכל מטריצה מוגדרת חיובית A יש מטריצה B מוגדרת חיובית כך ש $B^2=A\leftarrow$
$B\equiv A^{1/2}=\sqrt{A}$

X וקטור גאוסי סימסטרי עם A $Y=\underbrace{A^{1/2}}_{M}X$,

Y וקטור גאוסי עם מטריצה $I=\left(A^{1/2}\right)^{-1}A\left(A^{1/2}\right)^{-1}=\left(M^{-1}\right)^{\cancel{T}}A\left(M^{-1}\right)$

עבור $n=1$

$$X\sim N\left(0,\sigma^2\right)$$
$$A=1/\sigma^2\rightarrow A^{1/2}=1/\sigma\rightarrow 1/\sigma\, X\sim N\left(0,1\right)$$

<u>מטריצת קווריאנס</u>

X וקטור אקראי נגדיר את המטריצה $n\times n$ $\sum_X\left(\sigma_{x_i x_j}\right)_{\substack{i=1\\ j=1}}^n$

עבור $n=3$: $\sum_{X,Y,Z}=\begin{pmatrix}\sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ}\\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ}\\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ}\end{pmatrix}$

<u>תכונות:</u>

- $\sum_X$ מטריצה סימטרית.
- באלכסון מופיעות השונויות.

- עבור $Z = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ (צירוף לינארי של הרכיבים):

$$\sigma_Z{}^2 = \operatorname{var} Z = \operatorname{cov}(Z,Z) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i, \sum_{j=1}^n a_jX_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j \cdot \underbrace{\operatorname{cov}(X_i,X_j)}_{\sigma_{i,j}} =$$

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j \cdot \sigma_{i,j} = a^T \sum\nolimits_X a$$

מסקנה: מטריצת הקווריאנס מוגדרת אי שלילית.

- כתיבה אחרת של מטריצת הקווריאנס: $EX_i = 0$,

$$\sum\nolimits_X = E\left(x-EX\right)\left(X-EX\right)^T$$

- אם ל-X יש מטריצת קווריאנס $\sum_X$ ו- $Y = MX$ אזי: $\underbrace{\sum\nolimits_Y}_{m\times m} = \underbrace{M}_{m\times n}\underbrace{\sum\nolimits_X}_{n\times n}\underbrace{M^T}_{n\times m}$

<u>ווקטור גאוסי (לא בהכרח סימטרי)</u>

$$f_X(x) = ce^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T A(x-\mu)}$$

תכונות:

- $\sum_X = A^{-1}$
- $EX = \mu$

<u>הערה כללית:</u> אם (X,Y) ב"ת $\leftarrow (X,Y)$ בלתי מתואמים, כלומר $\sigma_{XY} = 0$, אבל לא בהכרח להיפך.

<u>שלבי פתרון:</u>

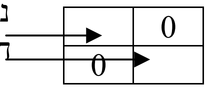
1. זיהוי A: לדוגמא עבור $n=2$:

$$f_{X,Y}(x) = ce^{-\frac{1}{2}\left(a\cdot(x-EX)^2+b\cdot(y-EY)^2+c\cdot(x-EX)(y-EY)\right)} \leftarrow A = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}c \\ \frac{1}{2}c & b\end{pmatrix} \leftarrow f_{X,Y}(x) = ce^{-\frac{1}{2}\left(a\cdot x^2+b\cdot y^2+c\cdot xy+\ldots\right)}$$

ו μ ע"י מציאת נקודות קריטיות של הפונק' (בעצם מספיק של ה exp).

2. זיהוי Σ: $\Sigma = A^{-1}$

כללי להפיכת מטריצה:



נהפוך כל חלק לחוד

הפיכת מטריצה 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}}{|ad-bc|}$

<u>טרנספורמציה:</u>

לדוגמא: $V = cX + dY \quad U = aX + bY \rightarrow M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$

ומטריצת הקווריאנס של $f_{U,V}$ מתקבלת ע"י: $\sum\nolimits_{U,V} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}}_{M} \cdot \sum\nolimits_{X,Y} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix}}_{M^T}$

יניב בר-מימון

<u>חזאי כללי</u>

(X,Y) וקטור גאוסי,

$g(x)=E(Y|X=x)$ כך שלכל h מתקיים: $E(Y-g(x))^2 \le E(Y-h(x))^2$,

- אם X,Y בלתי תלויים $\leftarrow g(x)=const=a$

  המינימום יושג עבור $a=E(Y)$

<u>חזאי לינארי אופטימלי</u>

החזאי הלינארי האפוטימלי של Y באמצעות X נתון ע"י: $\hat{Y}_L=\frac{\sigma_{X,Y}}{{\sigma_X}^2}(x-\mu_X)+\mu_Y$

כתיבה אחרת: $\frac{\hat{Y}_L-\mu_Y}{\sigma_Y}=\rho_{XY}\frac{(x-\mu_X)}{\sigma_X}$

- עבור וקטור גאוסי החזאי האופטימלי הוא הלינארי.

<u>סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים מפולגים זהה-idd</u>

נסמן באופן כללי: $\operatorname{var} X_i=\sigma^2 \qquad EX_i=\mu$

נגדיר: $Y_n=\frac{S_n}{n}$, $\qquad S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$

$$ES_n=\sum_{i=1}^{n}EX_i=n\mu \to EY_n=\frac{ES_n}{n}=\mu$$

$$\operatorname{var} S_n=\operatorname{var}\sum_{i=1}^{n}X_i=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var} X_i=n\sigma^2 \to \operatorname{var} Y_n=\operatorname{var}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\operatorname{var} S_n=\frac{\sigma^2}{n}$$

<u>חוק המספרים הגדולים</u>

תהי $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ סדרה של משתנים מקריים iid אזי לכל $\delta>0$: $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\delta\right)=0$

כלומר $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\mu$ בהסתברות

<u>משפט הגבול המרכזי</u>

יהי (X_i) סדרה של מ"מ בלתי תלויים מפולגים זהה. $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i; EX_n=\mu; \operatorname{var} X_n=\sigma^2$

א. נניח $\mu=0 \leftarrow \frac{S_n}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}N(0,\sigma^2)$ בהתפלגות.

כלומר פונקציית ההתפלגות האופייניות של $\frac{S_n}{n}$ שואפות לזו של $N(0,\sigma^2)$

ב. μ כללי: $\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}}\xrightarrow{n\to\infty}N(0,\sigma^2)$

$$\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}\xrightarrow{n\to\infty}N(0,1)$$

<u>משמעות</u>: אם X מ"מ בעל תוחלת μ ושונות σ^2 ויש סיבה להתייחס אליו כסכום של מספר גדול של idd אזי: $X\approx N(\mu,\sigma^2)$.