(2-1)

מבחן הסתברות

① בוחרים באקראי מספר בן 5 ספרות ע"י בחירה (עם חזרות) של 5 הספרות מתוך 1-9, נסמן $i=1,\dots,9$ X_i המ"מ המקבל 1 אם הספרה i נבחרה לפחות פעם אחת ו-0 אחרת

תוחלת X_1 היא:

$$EX_1 = 1\cdot P(\text{נבחר } 1) + 0\cdot P(\text{לא נבחר } 1) = P(\text{נבחר } 1) = 1 - P(\text{לא נבחר } 1)$$

$$= \boxed{1-\left(\frac{8}{9}\right)^5}$$

② בוחרים מספר באקראי כמו בשאלה 1 נסמן ב-X את מספר הספרות השונות במספר שנבחר, אז התוחלת של X היא:

X_i מ"מ המקבל 1 אם הספרה i נבחרה לפחות פעם אחת

$X = \sum_{i=1}^{9} X_i$ - מספר הספרות השונות במספר.

מ(1א) נכון ש- EX_1 שווה מסימטריה ל- EX_2 וכו' ⇐ לכל i: $\boxed{EX_i}$.

$$EX = 9EX_1 = 9\left(1-\left(\frac{8}{9}\right)^5\right) = 9-9\left(\frac{8}{9}\right)^5$$

③ במערכת קיימת n רכיבים זהים הרכובים מורכבים במקביל, המערכת פועלת כל עוד לפחות אחד תקין. ההסתברות שבמשך יום פעולה רכיב קובע תקלקל $\frac{1}{3}$ הקלקולים ב"ת. בסוף היום המערכת פועלת, מה ההסתברות שרכיב 1 תקין?

נסמן A_i = רכיב i תקין בסוף היום ⇐ המערכת פועלת: $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\bar{A}_i$ משלימים A_i גם הם ב"ת.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i\right) = 1-\prod_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i) = 1-(P(\bar{A}_i))^n = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

הסתברות מותנית

$$P\left(A_1 \,\middle|\, \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{P\left(A_1\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)}{P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \frac{P(A_1)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}\cdot\frac{3^n}{3^n} = \boxed{\frac{2\cdot 3^{n-1}}{3^n-1}}$$

④ 2 שחקנים משחקים כל אחד בתורו (A באי זוגיים, B בזוגיים) כל שחקן בתורו בוחר מספר $\sim U[0,1]$ באופן ב"ת, ספרה ראשונה מתחלקת ב-3 $(9,6,3,0)$ הוא זוכה. ההסתברות שA יזכה:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(2k+1 \text{ ינצח בסיבוב } A) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{6}{10}\right)^{2k}\left(\frac{4}{10}\right) = \frac{4}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{36}{100}} \qquad \frac{a_0}{1-q}$$

$$= \frac{4}{10-\frac{36}{10}}\cdot\frac{10}{10} = \frac{40}{100-36} = \frac{40}{64} = \frac{20}{32} = \frac{10}{16} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

(2-2)

5) ההסתברות שהמשחק יגמר בתום 3 סיבובים היא:

ההסתברות להכרעה בכל סיבוב $\frac{4}{10} \Leftarrow$ בת"ל $\Leftarrow \frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10}=0.144$

6) לוקטור אקראי (X,Y) צפיפות משותפת $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$ $x,y>0$ ו- $0=$ אחרת.

נסמן $U=(X-Y)/2$, $V=Y$ הצפיפות המשותפת $f_{U,V}(u,v)$ של (U,V) היא:

הכוונה היא $f_{U,V}(u,v)=0$ מחוץ לתחום המצוין.

הטרנספורמציה ההופכית $S=T^{-1}$ $\quad Y=V \quad 2U+Y=X \rightarrow \underline{X=2U+V}$

$T^{-1}(u,v)=(2u+v,v)=(x,y)$

היעקוביאן של $S=T^{-1}$ הוא -

$J_S=J_{T^{-1}}(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1\end{vmatrix}=\underline{2}$

מתקיים $f_{U,V}(u,v)=|J_S(u,v)|\,f_{X,Y}(S(u,v))$ עבור $(u,v)\in\tilde{D}$

$\Rightarrow f_{U,V}(u,v)=2\cdot\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(2u+2v)}=\frac{1}{2}e^{-(u+v)}$ $\qquad \underline{x+y=2u+2v}$

נבדוק מהו $\tilde{D}=?\ \leftarrow x,y>0 \leftarrow \underline{v>0}$ $\quad \underline{u>\frac{-v}{2}}$

$x=2u+v>0 \rightarrow 2u>-v \rightarrow$

סיכום טרנספורמציות: (1) מוצאים את הטרנספורמציה ההופכית $S=T^{-1}$
(2) מחשבים יעקוביאן
(3) משתמשים בנוסחה טרנס' הצפיפות
(4) מעבירים את התחום לתחום במשתנים החדשים.

7) X מ"מ בעל התפלגות אקספוננציאלית עם $\underline{\lambda>0}$, $t>0$, $f_{X|\{X>t\}}(x)=?$

הכוונה ש $f_{X|\{X>t\}}(x)=0$ מחוץ לתחום המצוין.

$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ כאשר $x>0$ ולכן -

$$\underline{f_{X|\{X>t\}}(x)=\frac{f_X(x)}{P(X>t)}}=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-t\lambda}}=\lambda e^{-\lambda(x-t)}$$

$\underline{\text{עבור } x>t}$

$\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda x}|_\infty^t=e^{-\lambda t}$

8) X, λ ו-t כמו ב-(7) תוחלת מותנית $E(X|\{X>t\})$ היא

$$E(X|\{X>t\})=\int_{-\infty}^{\infty}x f_{X|\{X>t\}}(x)\,dx=\int_t^\infty x\,\lambda e^{-\lambda(x-t)}dx=\int_t^\infty x\left(-e^{-\lambda(x-t)}\right)'dx$$

$$=-xe^{-\lambda(x-t)}\Big|_t^\infty-\int_t^\infty -e^{-\lambda(x-t)}dx=\cancel{-0}+te^0\left(-\frac{e^{-\lambda(x-t)}}{\lambda}\right)\Big|_t^\infty=$$

$$t+\left(\frac{e^{-\lambda(x-t)}}{\lambda}\right)\Big|_\infty^t=t+\frac{1}{\lambda}-0=\boxed{t+\frac{1}{\lambda}}$$

9. $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ וקטור גאוסי עם מטריצת קווריאנס $\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ וקטור תוחלת $\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\end{pmatrix}$

ויהי $\alpha>0$ נסמן $U_1=X+\alpha Z$, $U_2=X+Y-\alpha Z$ המקדם α עבורו פונקצית הצפיפות המשותפת של (U_1,U_2) היא מהצורה $f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=ce^{-\frac{1}{2}\{a_1(u_1-\mu_1)^2+a_2(u_2-\mu_2)^2\}}$ עבור קבוע נרמול מתאים c הוא:

2-3

פונקצית הצפיפות של וקטור גאוסי כללי (U_1,U_2) היא מהצורה

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=ce^{-\frac{1}{2}\{a_1(u_1-\mu_1)^2+a_2(u_2-\mu_2)^2+bu_1u_2\}}$$

$2b$ או $(u_1-\mu_1)(u_2-\mu_2)$

מתבקשים לתת תנאי לכך ש- $b=0$ או באופן שקול שפונקצית הצפיפות תהיה הצגה כמכפלה:

$$f_{U_1,U_2}(u_1,u_2)=f_{U_1}(u_1)f_{U_2}(u_2)$$

תנאי הכרחי ומספיק לכך שתהיה הצגה כזו הוא ש- U_1 ו- U_2 יהיו ב"ת והוקטור הוא גאוסי זה קורה אמ"מ $cov(U_1,U_2)=0$ אבל -

$$cov(U_1,U_2)=cov(X+\alpha Z,X+Y-\alpha Z)=$$

$$=cov(X,X)+cov(X,Y)-\alpha\,cov(X,Z)+\alpha\,cov(Z,X)+\alpha\,cov(Z,Y)-\alpha^2cov(Z,Z)$$

$$=2+0-\cancel{\alpha\cdot1}+\cancel{\alpha\cdot1}+\cancel{\alpha\cdot0}-\alpha^2\cdot1=2-\alpha^2\Rightarrow cov(U_1,U_2)=0\Rightarrow \underline{\alpha\overset{\alpha>0}{=}\sqrt{2}}$$

---

10. נניח כי הוקטור האקראי (X,Y,Z) מתפלג באופן אחיד בכדור היחידה ב- $\mathbb{R}^3$, אז הצפיפות המותנית $f_{X|Y}(x|y)=?$

כיון צפיפות משותפת של (x,y,z) קבועה בכדור וערכה הם $\frac{3}{4\pi}$

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dz=\frac{3}{4\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}dz=\underline{\frac{3}{4\pi}\cdot2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

עבור x,y כך ש- $x^2+y^2\le1$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y,Z}(x,y,z)\,dx\,dz=\frac{3}{4\pi}\iint_{\{x^2+z^2\le1-y^2\}}dx\,dz=\frac{3}{4\pi}\cdot\pi(1-y^2)=\underline{\frac{3(1-y^2)}{4}}$$

$-1\le y\le1$

האינטגרל נותן את שטח העיגול ברדיוס $\sqrt{1-y^2}$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{3}{4\pi}2\sqrt{1-x^2-y^2}}{\frac{3}{4}(1-y^2)}=\frac{2(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{\pi(1-y^2)}$$

בתחום $x^2+y^2\le1$, $|y|<1$ לא לחלק ב- 0

(2-4)

11) ההתפלגות המשותפת של הו"מ (X,Y) מתוארת כך: Y מתפלג אחיד $[0,1]$
וההתפלגות המותנית של X בהינתן Y היא אחידה בקטע $[-(1-y),(1-y)]$
הערך של פונ' ההתפלגות המשותפת $F_{X,Y}(x,y)$ של הוקטור (X,Y) בנקודה $x=-\frac{1}{4}, y=\frac{1}{2}$

נחשב פונקצית צפיפות משותפת:
$f_{X,Y}(x,y)=f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{1}{2(1-y)} & 0\le y\le 1,\ y-1\le x\le 1-y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases} \Rightarrow =\begin{cases}\frac{1}{2(1-y)} & 0\le y\le 1,\ y-1\le x\le 1-y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$F_{X,Y}\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}}f_{X,Y}(s,t)\,ds\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{t-1}^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{2(1-t)}\,ds\,dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2(1-t)}\left[-\tfrac{1}{4}-(t-1)\right]dt=\int_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8(1-t)}+\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\ln(1-t)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ln\frac{1}{2}}$$

12) X ו-Y מ-11 החזאי האופטימלי $\hat{X}$ של X בהינתן Y הוא:
בהינתן $0<y<1$, X מתפלג אחיד בקטע הסימטרי $[-(1-y),(1-y)]$, ולכן התוחלת המותנית של X בהינתן $Y=y$ היא 0.

13) X ו-Y מ-11 החזאי האופטימלי של Y בהינתן X הוא ($\hat{Y}$):

$$f_X(x)=\int_0^{1-|x|}\frac{dy}{2(1-y)}=\frac{1}{2}\ln(1-y)\Big|_{1-|x|}^{0}=-\frac{1}{2}\ln|x|$$
כאשר $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2(1-y)}$, $0\le y\le 1$, $y-1\le x\le 1-y$ לכן
$|x|<1-y \to y<1-|x|$

$$\Rightarrow f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{2(1-y)}}{-\frac{1}{2}\ln|x|}=\frac{-1}{(1-y)\ln|x|}$$
בתחום $0\le y\le 1$, $y-1\le x\le 1-y$ ולכן

$$\hat{Y}=E(Y|X)=\int_{-\infty}^{\infty}y f_{Y|X}(y|x)\,dy=\int_0^{1-|x|}y\frac{-1}{(1-y)\ln|x|}dy=\frac{-1}{\ln|x|}\int_0^{1-|x|}\frac{y}{1-y}dy=\frac{-1}{\ln|x|}\int_0^{1-|x|}\frac{1-y-1}{1-y}dy$$
$$=\frac{1}{\ln|x|}\left(y+\ln(1-y)\right)\Big|_0^{1-|x|}=\frac{1}{\ln|x|}\left(1-|x|+\ln|x|\right)=\boxed{1+\frac{1-|x|}{\ln|x|}}$$

14) יהיו $\{X_i\}_{i\ge 1}$ מ"מ ב"ת ושווי התפלגות, נשתמש בסימונים הבאים: $EX_1=\mu$, $\operatorname{var}X=\sigma^2$ ו- $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\delta>0$

אזי:

1) $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right|>\delta\right)=0$

2) $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right|>\delta\right)=1$

3) $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n-n\mu}{\sqrt{n}}\right|>\delta\right)=0$

4) $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n-n\mu}{n}\right|>\delta\right)=0$

5) $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n-n\mu}{n}\right|>\delta\right)=1$

החוק החלש של המספרים הגדולים.

(2-5)

(1) נסמן ב- $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ את קבוצת כל המספרים השלמים

X, Y מ"מ דיסקרטיים ב"ת עם ערכים ב- $\mathbb{Z}$, $W=X+Y$, פונ' הסתברות $P_X(x)$, $P_Y(y)$, $P_W(w)$ צ"ל - שלכל w מתקיים $P_W(w)=\sum_{x\in\mathbb{Z}} P_X(x)P_Y(w-x)$

אם W לא אם $P_W(w)=0$ וגם סכום הטור $=0$ לכל $x\in\mathbb{Z}$ גם $w-x$ לא $\Leftarrow P_Y(w-x)=0$

כאשר w אם נציג את המאורע $\{W=w\}$ כאיחוד זר

$$\{W=w\}=\bigcup_{x\in\mathbb{Z}}(\{X=x\}\cap\{Y=w-x\})$$

ולכן $P(W=w)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}P(\{X=x\}\cap\{Y=w-x\})$ אבל X ו-Y ב"ת

$$\Rightarrow P(\{X=x\}\cap\{Y=w-x\})=P(X=x)P(Y=w-x)$$

$$=P_X(x)P_Y(w-x)$$

(2) השתמשו בתכונות פונ' אופיינית כדי להוכיח שאם X_1, X_2 מ"מ גאוסיים ב"ת כאשר $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ אז גם X_1+X_2 הינה גאוסית $N(\mu,\sigma^2)$, $\mu=?, \sigma=?$.

תזכורת: הפונקציה האופיינית של מ"מ גאוסי תקני $X\sim N(0,1)$ היא $\varphi(t)=e^{-t^2/2}$

תכונות פונקציה אופיינית:

(א) a,b ממשיים ו- $Y=aZ+b$: $\boxed{\varphi_Y(t)=Ee^{itY}=Ee^{it(aZ+b)}=e^{itb}Ee^{itaZ}}=e^{itb}\varphi_Z(at)$

(ב) אם Y ו- Z ב"ת אז $\varphi_{Y+Z}(t)=\varphi_Y(t)\varphi_Z(t)$

(ג) אם למ"מ Y ו-Z אותה פונ' אופיינית יש להם אותה התפלגות

$W\sim N(\mu,\sigma^2)$ אמ"מ $W=\sigma X+\mu$ כאשר $X\sim N(0,1)$

$W\sim N(\mu,\sigma^2)$ אמ"מ הפונקציה האופיינית שלו היא $\varphi_W(t)=e^{it\mu}e^{-(\sigma t)^2/2}$

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) \overset{(2)}{=} \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)=e^{it\mu_1}e^{-\sigma_1^2t^2/2}e^{it\mu_2}e^{-\sigma_2^2t^2/2}$$

$$=e^{it(\mu_1+\mu_2)}e^{-(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2/2}$$

כלומר $\mu=\mu_1+\mu_2$ ו- $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ ולכן $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_2^2+\sigma_1^2)$

שאלון	תשס"ו

עבודה מס' 2

① מכיל n כדורים ממוספרים מוציאים כדור ומחזירים עד שמוציאים כדור שכבר הוצא.

X - מס' ההוצאות עד להפסקת התהליך $P_X(4)=?$

$$\boxed{\frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}}$$

$x=2 \rightarrow \frac{1}{n}$

$x=3 \rightarrow \frac{n-1}{n}\cdot\frac{2}{n}$

$x=4 \rightarrow \underset{\text{I הוצאה}}{1}\;\underset{\text{II הוצאה}}{\frac{n-1}{n}}\;\underset{\text{III הוצאה}}{\frac{n-2}{n}}\;\underset{\text{4 הוצאה}}{\frac{3}{n}} = \frac{3(n-1)(n-2)}{n^3}$

$n=3$

ⓑ מהו $\min\{X: F_X(x)=1\}$

$n+1$

---

② כל יום מגיע Y יעילה שמספר מהם הלקוחות באותו היום. n לקוחות: $n=0,1,2,\dots$ $F(y)=y^n,\ y\in(0,1]$ כש נתון

ⓐ מס' לקוחות N שיגיעו ביום נתון מפולג לפי הסתברות $P_N(n)=\frac{5}{6^{n+1}}$ $n=0,1,2,\dots$

חישוב $F_Y\left(\frac{3}{4}\right)$ כפונ' התפלגות:

יש פה "נוסחת" ההסתברות השלמה" וחשוב נוסחת ההסתברות הכוללת

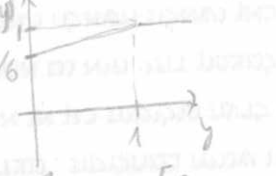
$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\sum_{n=0}^{\infty}P(Y\le y\mid n=N)P_N(n)=\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{5}{6^{n+1}}=\frac{5}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{6}\right)^n=\frac{5}{6}\,\frac{1}{1-y/6}$$

$$\frac{5}{6}\,\frac{1}{\frac{6-y}{6}}=\frac{5\cdot 6}{6(6-y)}=\frac{5}{6-y}\rightarrow F_Y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6-\frac{3}{4}}=\frac{5}{\frac{21}{4}}=\boxed{\frac{20}{21}}\rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{5}{6-y} & 0\le y\le 1\\ 1 & y>1\end{cases}$$

$\frac{1}{6}$ הנגזרת (חיתוך)

החלק הבדיד

החלק הרציף



$\frac{5}{(6-y)^2}$ בפנים

ⓑ חישוב EY

$$EY=\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{5y}{(6-y)^2}dy$$

$$=5\int_0^1\left[\frac{y-6}{(6-y)^2}+\frac{6}{(6-y)^2}\right]dy=5\left[\int_0^1\frac{1}{y-6}dy+\int_0^1\frac{6}{(6-y)^2}dy\right]=5\left[\ln|y-6|+6(6-y)^{-1}\right]_0^1$$

$$5\ln 5+\frac{30}{5}-5\ln 6-\frac{30}{6}=5\ln(5/6)+1$$

---

③ $4n+3$ לקוחות מחליטים עם הסתברות $\frac{1}{2}$ לקנות השנה מכונית חדשה קיימת

באופן בלתי תלוי. לקוח שהחליט לקנות בוחר באקראי אחת מ-$2n$ חברות שונות המייצרות מכוניות

מה ההסתברות שחברה מסוימת יגיעו לפחות 3 לקוחות.

זהו מקרה של פואסון כמקרה הגבולי של בינומי

מס' נסיונות / הסתברות להצלחה

$$\lim_{k\to\infty} pk=\lambda \rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}(4n+3)\rightarrow \lambda=\underline{\underline{1}}$$

$1-\frac{5}{2e}$

פואסוני $e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$

$$P(X\ge 3)=1-P(X<3)$$

$$=1-\left(e^{-\lambda}\left(\frac{1}{0!}+\frac{\lambda^1}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}\right)\right)=1-e^{-1}\left(2\tfrac{1}{2}\right)$$

$$=\boxed{1-\frac{5}{2e}}$$

④ X נורמלי $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ $x\in\mathbb{R}$ חשב את $(e^{-2X})=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2+4x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}((x+2)^2-4)}dx$

$+2)^2\cdot e^2=e^2\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+2)^2}dx}$

$=e^2\cdot 1=\boxed{e^2}$

$x+2=u$

$dx=du$

גבולות - עד ∞

⑤ x מפולג לפי פונקצית צפיפות מעריכית, f עם פרמטר

$\to P(0<Y\le 8)=F_Y(8)-F_Y(0)$

$=P(\max(x,\frac{x}{2}+3)\le y)=P(x\le y\ !\ x\le 2y-6)$

$(8)=P(x\le 8\ !\ x\le 10)=P(x\le 8)$

$(0)=P(x\le 0\ !\ x\le -6)=P(x\le -6)$

$dx=1-e^{-\frac{1}{2}x}\Big|_0^8=\boxed{1-e^{-4}}$

הצפיפות כ-0

$\Rightarrow P(0<y\le 8)=1-e^{-4}-0=\boxed{1-e^{-4}}$

⑥ משתנה אקראי X מפולג לפי פונ' הסתברות

3 { $EX=?$

3

דומה למה בדיד גיאומטרי - $q=\frac{2}{3}$ $p=\frac{1}{3}$

$EY=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}$

$(1(\frac{2}{3})^0+2(\frac{2}{3})^1+3(\frac{2}{3})^2+4(\frac{2}{3})^3+5(\frac{2}{3})^4+\dots$

$(3(\frac{2}{3})^0+4(\frac{2}{3})^1+5(\frac{2}{3})^2+\dots)$

$\frac{1}{3}(1+2\cdot\frac{2}{3})=EY$

$\cdot\frac{7}{3}=EY$

$=EY\to EX=\frac{EY-\frac{7}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{3-\frac{7}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{20}{9}\cdot\frac{9}{4}=\boxed{5}$

$EY=3$

(7) בסדרה של ניסויי ברנולי (ב"ת) $p=\frac{1}{2}$ נגדיר את המאורעות

A_k = {התוצאות של ניסוי k ו-$k+1$ זהות} $k=1,2,\dots$ ✓

האם A_3, A_4, A_5 ב"ת ולא רק בזוגות?

הם אכן ב"ת

{הצלחה ב-... , כשלון ב-...} $P(A_3)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

{הצלחה ב-5... , כשלון ב-5...} $P(A_4)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

{הצלחה ב-... , כשלון ב-...} $P(A_5)=2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\dots \cap A_4$ = {הצלחה ב-3,4,5 , כשלון ב-3,4,5} $P(A_3\cap A_4)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

$\dots A_5$ = {הצלחה ב-4,5,6 , כשלון ב-4,5,6} $P(A_4\cap A_5)=2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

$\dots A_5$ = {הצלחה ב-3,4,5,6 , כשלון ב-3,4,5,6 , הצלחה 3,4 כשלון 5,6 , הצלחה 5,6 כשלון 3,4} $P(A_3\cap A_5)=4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$

$\dots \cap A_4\cap A_5$ = {הצלחה ב-3,4,5,6 , כשלון ב-3,4,5,6} $P(A_3\cap A_4\cap A_5)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$

$\dots A_4) = P(\overset{\frac{1}{2}}{A_3})P(\overset{\frac{1}{2}}{A_4}) = P(\overset{\frac{1}{4}}{A_4\cap A_5}) = P(\overset{\frac{1}{2}}{A_4})P(\overset{\frac{1}{2}}{A_5}) = P(\overset{\frac{1}{4}}{A_3\cap A_5}) = P(A_3)P(A_5)$

$\dots \cap A_4\cap A_5) = P(A_3)P(A_4)P(A_5)=\frac{1}{8}$ ב"ת A_3, A_4, A_5

חורף תשס"ג

בוחן מס' 3 ✓

(1) ✓ מספר האלקטרונים הנפלטים מקתודה של שפופרת ריק במשך ש... $P_x(x)=e^{-2}\cdot\frac{2^x}{x!}$ $x=0,1,\ldots$ האלקטרון פוגע בהסתברות 0.25

מה ההסתברות שמבין האלקטרונים שנפלטו במשך שעה אף אחד לא ...

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{אף אחד לא פגע} \mid n \text{ נפלטו})\, P(n \text{ נפלטו})$$

שלב I הפליטה
שלב II פגיעה

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (0.75)^n e^{-2}\frac{2^n}{n!} = e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1.5)^n}{n!} = e^{-2}e^{1.5} = e^{-0.5}$$

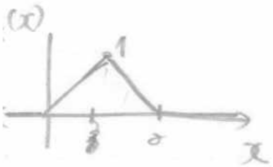
$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

(2) ✓ נמתח את הנקל? דגלאי רציף צפיפות נורמלי $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

צפיפות $f_Y(y)$ רציפה ב- $(0,\infty)$ מצא $\frac{f_Y(9)}{f_Y(1)}$

$$(y) = \sqrt{\frac{y}{4}} \rightarrow (h^{-1}(y))' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4} \quad f_X(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{4}}$$

$$^{-\frac{y}{8}}\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{y}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{f_Y(9)}{f_Y(1)} = \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}e^{-\frac{9}{8}}\cancel{\frac{1}{8}}\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}e^{-\frac{1}{8}}\cancel{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}} = e^{-1}\left(\frac{9}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{3e}}$$



(3) ✓ נתונה הצפיפות $f_X(x) = \begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2-x & 1<x<2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$$dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 x(2-x)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \boxed{1}$$

$$^2 = \int_0^1 x^3dx + \int_1^2 x^2(2-x)dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - 4 - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \boxed{\frac{7}{6}} \Rightarrow \mathrm{VAR}\,X = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{7}{6} - \frac{6}{6} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(4) ✓ 2 חברות מוניות: צהובה-30%, כחולה 70%. בתאונה ...
היתה צהובה. העדה מדייקת ב-75% מהמקרים. מהי ההס...

$$P(B|A_1) = \frac{3}{4}$$
$$P(B|A_2) = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{...} = A_1 \\ &\text{...} = A_2 \\ &\text{...} - B \end{aligned}\right\} \rightarrow P(A_1|B) = ?$$

$$\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B)} = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{9}{40}}{\frac{9}{40} + \frac{7}{40}} = \frac{9}{40}\cdot\frac{40}{16} = \boxed{\frac{9}{16}}$$

5. מכונית יוצרת לנסיעה הדורשת X ליטר דלק. X מ...
קבוע מתאים, כמה דלק בליטרים צריך להיות במכל...
שההסתברות שיגמר לא תעלה על $\frac{1}{16}$

$\Big|_{\infty}^{10} = \frac{c}{4\cdot10^4} = 1 \rightarrow \boxed{c = 4\cdot10^4}$

$1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_{10}^{x} \frac{4\cdot10^7}{x^5}dx$

$\left(\frac{10}{x}\right)^4 - \cancel{1} \Rightarrow \left(\frac{10}{x}\right)^4 = \frac{1}{16} \rightarrow \frac{10}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = 20}$

6. מה ההסתברות שבזריקה הרביעית של קוביה הוגנת התקבלה קודם?

$\boxed{\frac{125}{216}}$

זריקה ... זריקה ... זריקה ...

$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}$	=	$\frac{60}{216}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$	=	$\frac{40}{216}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	=	$\frac{5}{216}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{6}$		

אופציות 6^4 {- - - -

7. אדם משקיע סכום כסף בפקדון המניב תשואה שנתית ...
בהסתברות 0.6 להאריך בשנה נוספת מרגע תחילת התשואה ...
סכום מושקע בתשואה שנתית 25% וכפל עצמו לאחר 3 שנים ...

$Geom(0.4)$ משקיע במשך N שנים

$.25)^N - 1)\Big] =$ סכום משקיע N שנים התשואה

$.25)^N - 1\Big) = \sum (1.25)^n (0.6)^{n-1} 0.4$

$.25\sum (1.25\cdot0.6)^{n-1} = \sum_{0}^{\infty}(0.75)^{n-1}$

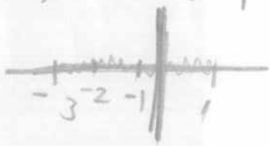
$\underbrace{\frac{1}{1-\frac{3}{4}}}_{\frac{1}{4}} = 4$

$= \frac{20}{10} = \boxed{2}$

00%

8 X מפולג באחידות ב- $[-3,1]$ מצא את פונ' ה

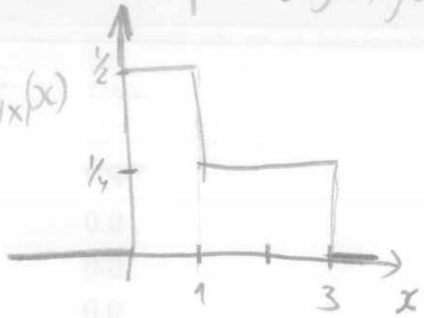
פתרון: $|X|$ מקבל ערכים בין 0 ל-3 עבור $0 \le x$



$\ldots(-x \le X \le x) = \begin{cases} \frac{2x}{4} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1+x}{4} & 1 \le x \le 3 \end{cases}$

$(-x \le X \le x) = P(-x \le X \le 1)$ - השורה השניה נובעת מכך ש

$\begin{cases} 1/2 & 0<x<1 \\ 1/4 & 1<x<3 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$



9 X מ"מ בעל פונקציה יוצרת מומנטים $\ldots(s)=e^{s^2}$

$\frac{\mathrm{Var}X}{b^2}$, $P(|X-\mu|>a\sigma) \le \frac{1}{a^2}$ | $P(X^2 \ge a) \le \frac{2}{a}$

[illegible]

$\ldots 2s e^{s^2} \Rightarrow EX = M_x'(0) = 0$

$\ldots(\ldots + 4s^2) e^{s^2} \Rightarrow EX^2 = M_x''(0) = 2$

$\ldots^2 = 2$

$\ldots(|X| \ge \sqrt{a}) = P(|X - \underbrace{EX}_{=0}| \ge \sqrt{a}) \le \frac{\sigma_x^2}{(\sqrt{a})^2} = \frac{2}{a}$

שאלה 3.19

מספר האלקטרונים הנפלטים מקטודה

$=$ מ"מ פואסוני X עם פרמטר 3 $\quad x=0,1,\ldots$

(א) חשב ההסתברות שנפלט במשך שנה
בדיוק אחד, לכל היותר אחד.

$(\text{ל}) = P(X\geq 1) = 1-P_X(0) = 1-e^{-3}$

$(\text{בד}) = P(X=1) = e^{-3}3$

$(\text{לכל}) = P(X\leq 1) = e^{-3}+3e^{-3} = 4e^{-3}$

$1-e^{-3}+4e^{-3}-3e^{-3} = 1\checkmark$

(ב) האלקטרונים פוגעים בהסתברות $\underline{p=0.7}$
חשבו ההסתברות שאין האלקטרונים שנפלטו במ

נחשב את ההסתברות שאף אלקטרון לא פגע בלוח.
אם n אלקטרונים נפלטו הסתברות זו היתה

נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה -

$\sum_{n=0}^{\infty} P(\text{אף פגיעה} \mid n \text{ פליטות}) P(n \text{ פליטות})$

$\sum_{n=0}^{\infty} (0.3)^n e^{-3}\frac{3^n}{n!} = e^{-3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0.9)^n}{n!} = e^{-3}e^{0.9} = e^{-2.9}$

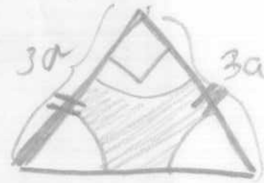
$) = \underline{1-e^{-2.1}} \approx \boxed{0.877}$

ג'ג'ג מיפ"ג

בוחן מס' 4

① משולש ישר זווית בוחרים בו נקודה. מה ההסתברות שמרחקה מכל קודקוד של המשולש גדול משליש אורך השוק?

$$\frac{\pi a^2 \cdot 2}{2 \cdot 9a^2} = \frac{\pi}{9} \rightarrow \boxed{1-\frac{\pi}{9}}$$



② אוניה נעלמת היא ח"בת להיות ב-A,B,C,D,E אזורים מסוג ספינות

	A	B	C	D	E
סיכוי לגילוי אם נמצאת באיזור	0.7	0.5	0.6	0.9	0.8

א' מטוס סורק בעם אחת אחד כל האיזורים. מה ההסתברות שיגלה אותה.

$$\frac{1.1+0.9+1.5}{5} = \frac{2.6+0.9}{5} = \frac{3.5}{5} = \frac{7}{2\cdot 5} = \frac{7}{10} = \boxed{0.7}$$

ב' אם לא נתגלתה באיזה איזור היא נמצאת בהסתברות הגבוהה ביותר.

F - לא נתגלתה בהסתברות $P(F)=0.3$

$$P(A\mid F) = \frac{P(F\mid A)\cdot P(A)}{P(F)} = \frac{1}{5}$$

$P(B\mid F) =$

B

③ אורכה x של שיחת טלפון בדקות יש פונקציית התפלגות

$$F_x(x) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + e^{-[\frac{x}{2}]} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

א' ההסתברות שהשיחה תאריך פחות מ-3 דקות, אם נתון שאורכה יותר מדקה אחת.

$$P(1<x<3 \mid x>1) = \frac{P(1<X<3)}{P(X>1)} = \frac{F_x(3)-F_x(1)}{1-F_x(1)} = \frac{-\frac{1}{2}(e^{-\frac{3}{2}}+e^{-1})+\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}}+1)}{\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}}+1)}$$

$$= 1-\frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}}+1)$$

$$= 1-\frac{1}{2}(e^{-\frac{3}{2}}+e^{-1})$$

$$\rightarrow 1-\frac{e^{-1}+e^{-\frac{3}{2}}}{1+e^{-\frac{1}{2}}}$$

ב' מה ההסתברות שהשיחה תארך בדיוק 2 דקות כלומר הקפיצה -

$$= 1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{-1}) = 1-e^{-1}$$

$$1-\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{0}) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1}$$

$$F_x(4)-L = 1-e^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1} = \boxed{\frac{1-e^{-1}}{2}}$$

④ מתח הזרם במעגל החשמל מתנהג באקראי $X\sim N(3,1)$ התקן מפסיק את המתח המתחיל לפעול כאשר $|X-3|<2$, מתח גדול מ-5 או קטן מ-1

התפלגות מתאימה אקראי $N(0,1)$

$Y=$ המתח המאוזן $= \Phi =$ פונ'

א' חשב: $P(\frac{1}{2}<Y\le 1)$

(ב)

④ מתח הזרם במערכת החשמלי – הינו מ"מ $N(3,1)$,
התקן מכשיר לוויסות המתח המתחיל לפעול כאשר $|x-3|>2$
מתח גדול מ-5 ← 5 , קטן מ-1 ← 1
Y - המתח המווסת , Φ כוון ההתפלגות מ"מ $(0,1)$

$\mu = 3$

$P(\frac{1}{2} < Y \leq 1) = ?$ (א)

$|x-3|<2$
$-2<x-3<2$
$1<x<5$

טווח y:
$1 \leq y \leq 5$

$$y = g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 1 \\ x & 1 \leq x \leq 5 \\ 5 & 5 \leq x \end{cases}$$

$\leq 1) = P(y=1) = P(x \leq 1) = P(Z \leq \frac{1-3}{1}) = P(Z \leq -2)$
$-2) = \boxed{1-\Phi(2)}$

(ב) $P(2 \leq y \leq 4)$
$\leq 4) = F(4) - F(2) = \Phi(\frac{4-3}{1}) - \Phi(\frac{2-3}{1})$
$1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1-\Phi(1)) = \boxed{2\Phi(1)-1}$

(ג) למה שווה α בפירוק
$F_Y = \alpha F_1 + (1-\alpha) F_2$ (בדידה)
$(y=1) + P(y=5) = P(X \leq 1) + P(X \geq 5) = \Phi(\frac{1-3}{1}) + (1-\Phi(\frac{5-3}{1}))$
$2) \underbrace{-\Phi(2)+1} = \Phi(-2) + \Phi(-2) = \boxed{2\Phi(-2)}$

(4) למה שווה α בפירוק $F_Y = \alpha F_1 + (1-\alpha) F_2$ (בדיקה)

$2\Phi(-2)$ ✓

מצבעים
$P(0 < Y \leq 4)$
$2\Phi(1) - 1$

✓
(5) מס' חלקיקים שפלטים במשך זמן t בפקוד = מ"מ X מפולג
T - זמן ההמתנה עד לפליטת החלקיק השני חשוב $(T > 2)$
(עד $t = 2$ היתה פליטה אחת לכל היותר)

$X =$ מספר הפ

$P(X = 0, 1) = e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!}\right) = \boxed{3e^{-2}}$

✓
(6) נסח' והוכח' מונוטונית פונ' התפלגות. X מ"מ F פונ' התפלג
הוכחה: $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = P(X \leq x)$ נקח $x, y \in \mathbb{R}$ $x < y$
$A = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$ $B = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq y\}$
מתקיים $A \subseteq B$ לכן $P(A) \leq P(B)$ ממונוטוניות הסתברות ←

X מ"מ בדיד פונ' התפלג F ⇐ $\int (1 - F(x^{1/5}))dx = EX^5$ ...
$= P(X \leq x^{1/5}) = P(X^5 \leq x) = F_Y(x)$
לפי נוסחה.
$Y = X^5$
$\int (1 - F_Y(x))dx = EY = EX^5$

[illegible]

מבחן מס' 5

(1) (א) מטבע הצלחה $\frac{1}{3}$ מוטל עד ההצלחה הראשונה/10 הטלות. X = מס' הטלות $(=10)$

נסוי ברנולי התפלגות גיאומטרי → הצלחה $p = \frac{1}{3}$

$$X$$

$$\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\left(\frac{2}{3}\right)^7+\right.$$

$$(X>10) = q^{10} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$P(X=10) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^9\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{2}{3}\right)^9}}$$

(ב) ידוע ש-2 הטלות ראשונות הסתיימו בכשלון. מהי $P(X=9)$ במקרה זה?

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^6 \frac{1}{3} = \frac{2^6}{3^7}$$

(2) X מ"מ פואסוני $\lambda = 2$

$$P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\dots$$

(א) חישוב $E\left(3^{-X}X(X-1)\dots(X-9)\right)$

$$(k-1)\dots(k-9)e^{-2}\frac{2^k}{k!} = \sum_{k=10}^{\infty} e^{-2}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{(k-10)!} = e^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\sum_{k=10}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-10}}{(k-10)!}$$

$$\frac{k(k-1)\dots(k-9)}{k(k-1)\dots(k-9)(k-10)!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k}{k!} = e^{-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}e^{\frac{2}{3}} = \boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}e^{-\frac{4}{3}}}$$

(ב)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2}\frac{2^k}{k!}\frac{1}{k+1} =$$

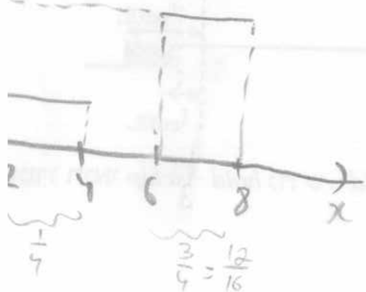
$$\frac{e^{-2}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{-2}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!} = \frac{e^{-2}}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!} - \frac{2^0}{0!}\right)$$

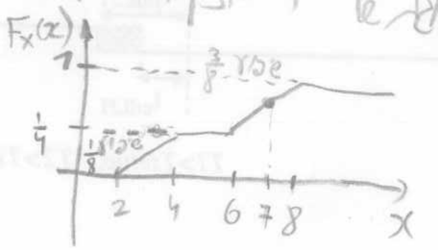
e^x מזכיר פיתוח

$$= \frac{e^{-2}}{2}\left(e^2-1\right) = \boxed{\frac{1-e^{-2}}{2}}$$

$$\frac{1-e^{-2}}{2}$$

(3) את מגיעה לקולנוע בזמן אקראי T. בהסתברות $\frac{1}{4}$ הגעת T נמצאת בקטע הזמ[ן]
... ואז בכל ... בקטע הזמן $[6,8]$ ו-T מפולג באופן אחיד בכל ... בהסתברות $\frac{3}{4}$
חשבי את ערך פונ' ההתפלגות של T בנקודה 7.





$$\frac{3}{4}/2 = \frac{3}{8}$$

$$F_X(7) = \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

(4) נוסחת הדמ"ה של פונ' צפיפ' $f(x) = c\sqrt{x}$ $[1,4]$

נוסחת הדמ"ה של התפלגות נתונה $F=$ פונ' $X=Q(U)$ של מ"מ U אחיד ב-[]

$(7U+1)^{\frac{2}{3}}$

(5) קלט מערכת מ"מ $X\sim N(3,4)$ פלט מ"מ Y

Φ פונ' התפלגות מ"מ $N(0,1)$

(א) חשב $P(\frac{1}{2} \le Y < 2)$ ✓

$= 2$

$1 \le Y \le 6$

$P(1 \le Y < 2) = P(Y=1) + P(1<Y<2)$

$1<X<2) = P(X<2) = P(Z<\frac{2-3}{2})$

$= \Phi(-\frac{1}{2}) = \boxed{1-\Phi(\frac{1}{2})}$

(ב) למה שווה $\alpha(F_1(6)-F_1(6^-))$ קפיצה F_Y כיון (הה

$F_Y = \alpha F_1 + (1-\alpha)F_2$

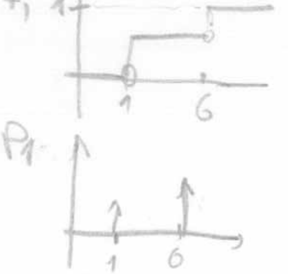
$=6) = P(X\le 1) + P(X \ge 6)$

$(\frac{6-3}{2})) = \Phi(-1) + \Phi(-\frac{3}{2})$

$\Phi(-1)$ $y=1$

$\Phi(-\frac{3}{2})$ $y=6$

0 else



$\Phi(\frac{1-3}{2}) = \Phi(-1)$

$1-\Phi(\frac{6-3}{2}) = \Phi(-\frac{3}{2})$

$(-\frac{3}{2})$ $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha(F_1(6)-F_1(6^-)) = 1-\Phi(\frac{3}{2})}$

ת״ז ___ גש״ט

בוחן מס' 6

(1) 3 קוביות: 2 הוגנות ואחת לא הוגנת. ההסתברות לקבל j שווה cj

$1 = c(1+2+3+4+5+6) = c\cdot 21 \to c = \frac{1}{21}$

(א) זורקים קוביה פעם אחת את הלא הוגנת ומסמנים תוצאה ע"י X

$EX = \sum_{k=1}^{6} k\cdot ck = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{21}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{21} = 4\frac{7}{21}$ $\quad EX=?$

$= \boxed{4\frac{1}{3}}$

(ב) בוחרים אחת מ-3 הקוביות באקראי זורקים אותה פעם אחת אם יצא "6" מהי ההסתברות שנבחרה הקוביה הלא הוגנת.

A = יצא 6

B - נבחרה לא הוגנת

ידוע $P(A|B) = \frac{6}{21}$ $\quad P(A|B^c) = \frac{1}{6}$

$P(B^c) = \frac{2}{3}$ $\quad P(B) = \frac{1}{3}$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)}$$

$$= \frac{\frac{6}{21}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{6}{21}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{2}{21} + \frac{2}{18}} = \frac{\frac{2}{21}}{\frac{2\cdot18+2\cdot21}{21\cdot18}} = \frac{\cancel{21}\cdot18}{\cancel{2}\cdot18+\cancel{2}\cdot21}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{21}} = \frac{18}{39} = \boxed{\frac{6}{13}}$$

$\boxed{\frac{6}{13}}$

(2) $X \sim Exp(2)$ כלומר הצפיפות של X נתונה ע"י $f_X(x) = 2e^{-2x}$ $x \geq 0$ נגדיר $Y = \frac{1}{x+1}$

ונסמן את הצפיפות של Y ע"י $f_Y(y)$ $\quad f_Y(\frac{2}{3}) = ?$

$x+1 = \frac{1}{y}$

$h^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1 \to (h^{-1}(y))' = -\frac{1}{y^2} \to f_X(\frac{1}{y}-1) = 2e^{-2(\frac{1}{y}-1)}$

$f_Y(y) = \frac{1}{y^2}\, 2e^{-\frac{2}{y}+2} \to f_Y(\frac{2}{3}) = \frac{1}{\frac{4}{9}}\cdot 2e^{-\frac{2}{\frac{2}{3}}+2} = \frac{9}{\cancel{4}}\cancel{2}e^{2-\cancel{3}}$

$= \frac{9}{2}e^{-1} \to \boxed{\frac{9}{2e}}$

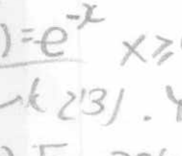
(3) $X \sim Exp(1)$ הצפיפות של x נתונה ע"י $f_X(x) = e^{-x}$ $x \geq 0$ נגדיר

$$Y = \begin{cases} X & X \in (2,7) \\ 2, & X \leq 2 \\ 7, & X \geq 7 \end{cases}$$

פונ' ההתפלגות של המ"מ המעורב Y. נציג את $F_Y(y)$ בצורה $F_Y(y) = (1-p)F_c(y) + pF_d(y)$ כאשר F_c פונ' התפלגות הרציפה.

(א) $p = ?$

$2 \leq y \leq 7$



x רק בתחום

$P(y=2) = P(X \leq 2) = \int_0^2 e^{-x}dx = 1-e^{-2}$

$P(y=7) = P(X \geq 7) = \int_7^\infty e^{-x}dx = e^{-7}$

$1-e^{-2}+e^{-7}$

$\Rightarrow \boxed{1-e^{-2}+e^{-7}}$

ב) Z מ"מ מפלג לפי פונ' ההתפלגות F_d $EZ=?$

לא מנורמלות

$1-e^{-2}$ e^{-7}

נורמל

$\frac{1-e^{-2}}{1-e^{-2}+e^{-7}}$ $\frac{e^{-7}}{1-e^{-2}+e^{-7}}$

$e^{-7})\Big)\Big] = \boxed{2-2e^{-2}+7e^{-7}}$

4) א) $X\sim U[0,1]$ רציפה X $f_X(x)=1 \quad 0\le x\le 1$

מצוא הערך של $c\in(0,1)$ עבורו EY הכי קטנה

$=\int_0^1 g(x)\, 1\, dx$

רציפה

ב) עבור $c=\frac{1}{2}$?

$1dx=\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2dx+\int_{1/2}^1 x^2dx$

$\Big|_{1/2}^{1}=\frac{1}{12}\frac{1}{8}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{96}+\frac{7}{27}=\boxed{\frac{19}{96}}$

5) עבור כל מספר טבעי n, יהיו $X_n\sim Bin(n,\frac{1}{n})$ הצטרפות

א) $\lim_{n\to\infty} P(X_n=2)=?$

$-2)!\,\frac{1}{n^2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\left(\frac{n}{n-1}\right)^2$

$\frac{1}{2e}$

ב נגדיר $m=0,1,2\ldots$ $P_m = \lim_{n\to\infty} P(X_n=m)$

יהי Y מ"מ המקיים $P(Y=m)=P_m$, $m=0,1,\ldots$

ד ✓

להשלים את 6, 7.

מורג מג״ד

מבחן מס' 7 הסתברות

1) $X \sim U[0,1]$ מה $Z=\ln X$ פונ' צפיפות שלו היא:

$$F_Z(z) = 1\cdot e^z = \begin{cases} e^z & z\in(-\infty,0) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

2) X מ״מ מעריכי עם פרמטר $\lambda=\frac{1}{4}$ ($f_x(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}, x>0$)

מצא x_0 עבורה $P(X>x_0)=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$$1-P(X\le x_0) = 1-F(x_0) = 1-\int_0^{x_0}\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}} = 1-\frac{\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}}{-\frac{1}{4}}\Big|_0^{x_0}$$

$$= \cancel{1} - e^{-\frac{x_0}{4}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}} \to \frac{x_0}{4}=\frac{1}{2} \to \boxed{x_0=2}$$

3) לאילנה 5 מטבעות הוגנים בשניים מהם מופיע עץ בשני
באופן כאלו בשני הצדדים ו3 מטבעות נורמלים רגילים. בוחרת מטבע
ומקבלת "עץ" בפאה העליונה. מה ההסתברות שגם בפאה התחתונה יש עץ.

תשובה: $\boxed{\frac{2}{3}}$

A-עץ בעליונה
B-עץ בתחתונה

$$P(\text{עץ }2 \mid \text{עץ }1) = \frac{P(\text{עץ }2\cap \text{עץ }1)}{P(1\text{ עץ})} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{6}{10}} = \frac{2}{5}\cdot\frac{10}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

לפחות 1 עץ

4) מאמן בוחן כדורסלנים אשר גובהם מ״מ מפולג נורמלית $(1.95, 0.01)$
מהי תוחלת מס' השחקנים שיבחנו עד שיגיע הראשון שגובהו מעל

$$Var = 0.01 \to \sigma = 0.1$$

ניסויי ברנולי $p=$ הסתברות שיהיה מעל 2.10

$$P(X>2.1) = P\left(Z>\frac{2.10-1.95}{0.1}\right) = P\left(Z>\frac{0.15}{0.1}\right) = 0.067 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

$Z \sim N(0,1)$

$$1-P(Z\le 1.5)$$

0.933

והתוחלת - מס' הניסוי להצלחה ראשונה

$$\frac{1}{p} = 15$$

V (5) חדרנית עוברת בכל החדרים n

היא מנסה לפתוח עם מפתח שנבחרת באקראי מתוך n מפתחות.
אם בחירתה מוצלחת, מחליפה מקבלת.
מה בערך ההסתברות שתוכל להכנס כך לפחות ל-3 מחדרי המלון?

n ניסוי ברנולי $\frac{1}{n}$ הסתברות להצלחה $\Leftarrow \lambda=1$

$$P(x)=\frac{e^{-1}1^x}{x!}=\frac{e^{-1}}{x!} \qquad P(X\geq 3)=1-e^{-1}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)=\underline{1-e^{-1}2\tfrac{1}{2}}$$

$$1-\frac{5}{e\cdot 2}=1-\frac{5}{5.4}\approx 0.1$$

V (6) יהי X של מערכת מ״מ בעל צפיפות

$$f_X(x)=\begin{cases}1+x & -1<x<0\\ 1-x & 0<x<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

והפונ' Y של המערכת נתון ע״י
$$Y=\begin{cases}0 & x<0\\ \sqrt{x} & x\geq 0\end{cases}$$

מה ערך פונ' ההתפלגות $F_Y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$P\left(y\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=P\left(\sqrt{x}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=P\left(x\leq\frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-1}^{0}1+x\,dx+\int_{0}^{1/2}(1-x)\,dx=x+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+x-\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1/2}=$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\boxed{\frac{7}{8}}$$

V (7) אורך הצלע X של ריבוע מהווה מ״מ בעל פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(s)=Ee^{sX}$
הנתונה ע״י הטור $M_X(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)s^n=1+2s+3s^2+\dots$ מה השונות של שטח הריבוע?

$1+2s+3s^2+4s^3+5s^4$

$\checkmark\ M_X(0)=1$

$h(x)=x^2$

$EX=M_X'(0)=2$

$Eh(x)=\sum h(x)$

$EX^2=M_X''(0)=6$

EX^4-EX^2

$M_X^{(4)}(0)=120$

$E(X^2)=m_2=$

$120-36=\boxed{84}$

(8) הגדירו את מושג פונקצית ההתפלגו[ת]
והוכיחו שהיא יורדת:

$(X \le x)$

$x \in \mathbb{R}$

$\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$ אזי $x_1 < x_2$

$X \le x_1) \le P(X \le x_2) = F_X(x_2)$ לכן

(9) Ω מרחב המדגם של כל התמורות של
כל אחת.

$A_1 = \{$ תמורות בהן 1 במקום הראשון $\}$ $= \{$ תמורות בהן 2 במקום השני $\}$

האם קיים n כך ש- A_1 ו- A_2 ב"ת?

עם איברים ב- A_1 ו- A_2 הוא

$) = P(A_2) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

$A_1 \cap A_2$ קבוצת כל התמורות המשאירות

$= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

עפ"י הגדרת תלות ב"ת: $)P(A_2)$

$n^2 \Leftarrow \quad \frac{1}{n(n-1)} = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

לא ניתן למצוא n $\Leftarrow$ מסקנה:

הסתברות מבחן 8

1) n חלקיקים מתפלגים באופן אקראי בין m תאים ממוספרים ($m>2$)

א) מה ההסתברות שתא מס' 1 ריק?

א. $\frac{n-1}{mn}$ ב. $\frac{(n-1)^m}{n^m}$ ג. $\frac{m-1}{mn}$ ד. $\frac{(m-1)^n}{m^n}$ ה. $\frac{(m-1)^n}{m^n n}$

$|\Omega| = m^n$ $A_1 = \{\text{תא 1 ריק}\}$ $P(A_1) = \frac{(m-1)^n}{m^n}$

כל חלקיק יכול להיות עם $m-1$ מקומות

m^n (=y= 2 x 3 x (1,2), 03, 30 ... האפשרויות הן ... נניח יש 3 חלקיקים ו-2 מקומות

ב) לאילו ערכי $m>2$ ו-$n>0$ המאורעות {תא מס' 1 ריק} ו-{תא 2 ריק} בלתי תלויים

א. לכל ערך ב. לאף ערך ג. תלוי ב-n ד. תלוי ב-m ה. תלוי ב-m ו-n

$$P(A_1)=P(A_2)=\frac{(m-1)^n}{m^n} \qquad P(A_1\cap A_2)=\frac{(m-2)^n}{m^n}$$

$$\Rightarrow P(A_1)P(A_2)=\frac{(m-1)^{2n}}{m^{2n}}$$

$$P(A_1\cap A_2)-P(A_1)P(A_2)=\frac{(m-2)^n}{m^n}-\frac{(m-1)^{2n}}{m^{2n}}=\frac{1}{m^{2n}}\left[m^n(m-2)^n-(m-1)^{2n}\right]$$

$$=\frac{1}{m^{2n}}\left((m^2-2m)^n-(m^2-2m+1)^n\right)<0$$

תלויים עבור כל הערכים של m, n או בת עבור אף ערך m, n

2) בניסוי עם קבוצה של 100 גברים ו-200 נשים, ההסתברות שגבר ישלים מבחן מסוים היא 0.5 ואישה 0.3. אדם נבחר באקראי מתוך 300 לא נשלם את המבחן. מה ההסתברות שנבחרה אישה?

A - אישה $P(A)=\frac{2}{3}$

B - גבר $P(B)=\frac{1}{3}$

C - נשלם $P(C|B)=0.5$ $P(C|A)=0.3$

$$P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=0.5\cdot\frac{1}{3}+0.3\cdot\frac{2}{3}$$

$$P(A|C^c)=\frac{P(C^c|A)P(A)}{P(C^c)}=\frac{0.7\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{3}\right)}=\frac{\frac{7}{10}\cdot\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)}=\frac{7\cdot 30}{5\cdot 3\cdot 19}=\frac{7\cdot 6}{3\cdot 19}=\boxed{\frac{14}{19}}$$

$\frac{11}{30}$

3) יהי X מ"מ בעל צפיפות $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<\infty$, משתנה אקראי $Y=\frac{1}{X}$

א) מהי הצפיפות $f_Y(y)$ של Y?

$$h^{-1}(y)=\frac{1}{y} \quad (h^{-1}(y))'=-\frac{1}{y^2}, \quad f_X\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\pi\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{\pi\frac{(y^2+1)}{y^2}}=\frac{\cancel{y^2}}{\pi\, \cancel{y^2}(y^2+1)}=\boxed{\frac{1}{\pi(y^2+1)}} \qquad y\in\mathbb{R}$$

$\frac{1+x^2)}{} \Big|_{\infty}^{-\infty} = \frac{1}{\pi 2}(\infty - \infty)$: X תוחלת (ב)

$E_+X = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi 2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\infty} = \infty$

$E_-X = \int_{\infty}^{0} \frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{\pi 2}\ln(1+x^2)\Big|_{\infty}^{0} = -\infty$

לא קיים

(4) יהי C מ"מ אחיד בקטע $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ויהי

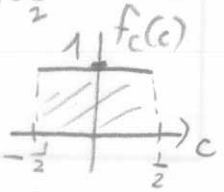
$\frac{1}{2}x^2 - x + C = 0$ שתי $x_1 \leq x_2$ -ש

$\sqrt{1-2c}$: X_1 מציאת תוחלת (א)

$= E(1-\sqrt{1-2c}) = 1 + E(-\sqrt{1-2c}) =$

$\sqrt{1-2c}\,\underbrace{f_c(c)}_{=1}dc = 1 + \frac{(1-2c)^{3/2}}{\cancel{2}\cdot 3/\cancel{2}}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= 1 - \frac{1}{3}2^{3/2} = \boxed{1 - \frac{\sqrt{2}\,2}{3}}$



$-2c) = \cancel{1} - (\cancel{1} - 2c) = 2c$: X_1X_2 מציאת תוחלת (ב)

$(C) = 0$

(5) X מ"מ נורמלי סטנדרטי נגדיר $Y = e^X$

(א) התוחלת של Y:

$e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$

$e^{-\frac{1}{2}((x-1)^2-1)}dx = e^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}dx}_{} = e^{\frac{1}{2}}$

החלפת משתנים $x-1=u$ — $dx = du$ — הגבולות $-\infty-1 \leftarrow \infty-1$

(ב) שונות של Y:

$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-4x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}((x-2)^2-4)}dx$

6) מס' הלקוחות לקבלת שירות = משת...
עם פרמטר $\lambda = 3$. ספק השרות מסוגל ל...
הצורך אלה נבחרים באקראי מהפונים. ל...
מה שירות בהסתברות $p = \frac{2}{3}$ (ב"ת)

א) אם ידוע שיש לקבל שרות מבחינת... $k \geq 1$.
הוי לפחות אחד), מה ההסתברות שבסה"כ יגיע...

N = מס' הפונים. $N \sim Pois(3)$ לכל $k = 1,2,3...$

$$\frac{P(N=k \cap N \geq 1)}{P(N \geq 1)} = \frac{P(N=k)}{P(N \geq 1)}$$

$$= \frac{\dots 3}{(e^3-1)} = \boxed{\frac{3^k}{k!(e^3-1)}}$$

ב) מה ההסתברות למצוין לקוח מרוצה אחד.

$$\dots) + P(A \mid N \geq 2)P(N \geq 2) =$$

$$\dots \frac{3^0}{1} - \frac{e^{-3}3^1}{1!}\Big) = 2e^{-3} + \frac{4}{9}(1-4e^{-3}) =$$

$$= \frac{4e^3+2}{9e^3}$$

7) בניסוי במעבדה מוסיקה אך נ... במהירות קבועה...
אם כעבור דקה אחת ריקוד עבר לפחות סך ס"מ, נותנים ...
אם כעבור דקה אחת (והוא עבר פחות מ- סך ס"מ...
והוא לתנועה באותה מהירות V עד שעבור אמה צריך ...

א) פונ' ההתפלגות T: ערכי T הם $\dots \leq \frac{240}{60} + \frac{1}{2} = 4.5$

לכן עבור $3 \leq t \leq \frac{24}{7}$:

$$\dots) = \frac{80 - \frac{240}{t}}{20} = 4 - \frac{12}{t}$$

$V > 70$: $T = \frac{240}{V}$

$V < 70$: $T = \frac{240}{V} + \frac{1}{2}$

$\frac{x}{T} = v$

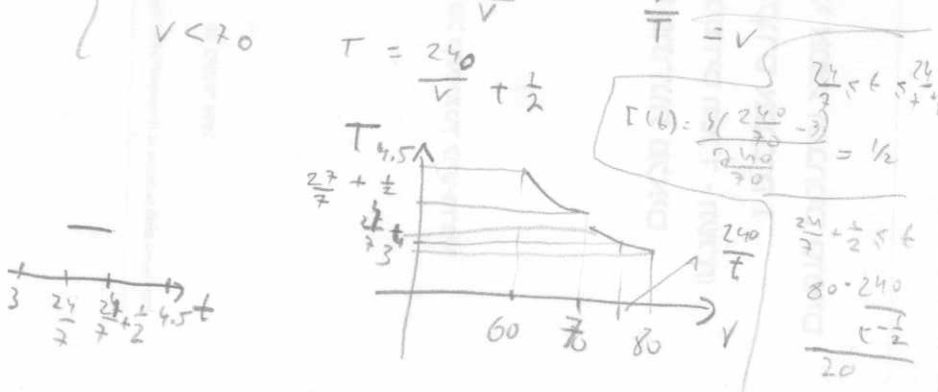
$\frac{24}{7} \leq t \leq \frac{24}{7} + \frac{1}{2}$

$F(t) = \frac{8(\frac{240}{70} - 3)}{\frac{240}{70}} = \frac{1}{2}$

$\frac{240}{t}$

$\frac{24}{7} + \frac{1}{2} \leq t$

$\frac{80 - \frac{240}{t-\frac{1}{2}}}{20}$



מבחן בהסתברות

① משדר, ממסר ומקלט. משדרים "0"/"1" ב"ת

ידוע ששודר 0 מה ההסתברות לקלוט 0 : $\boxed{0.6}$

② אם 0 משודר בהסתברות 0.8 מהי ההסתברות לשדר

$= 0.2(0.63+0.02) = 0.2\cdot 0.65 = \boxed{0.13}$

③ בוחרים 2 נקודות באקראי ב"ת $[0,1]$ מצאי ... פונ' ...

נניח הנקודות הן X ו- Y

$$\int_0^1\int_0^1 e^{s|x-y|}dx\,dy$$

$$2\int_0^1 e^{sx}dx\int_0^x e^{-sy}dy = \frac{2}{s}\int_0^1 e^{sx}\left(e^{-sy}\right)\Big|_x^0 = \frac{2}{s}\int_0^1 e^{sx}(1-e^{-sx})dx$$

$$-x\Big|_0^1 = \frac{2}{s}\left(\frac{e^s}{s}-1-\frac{1}{s}+\phi\right) = \boxed{2\left(\frac{e^s-s-1}{s^2}\right)}$$

$$+\frac{s^2}{4\cdot 3}+\frac{s^3}{5\cdot 4\cdot 3}+\dots$$

④ חשבי את השונות המרחק בין שתי הנקודות

$$= \frac{2}{4\cdot 3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{6}-\frac{1}{9} = \frac{3}{18}-\frac{2}{18} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

⑤ מחלקת השונות של שעון מתקדמת :
- 0.1 ב-3 שניות
- 0.2 ב-2
- 0.3 ב-1
- 0.4 לא מתקדם

כל השתמש בשעה... בשנה... מדויק.

$.3 = \underline{2}$ $EX_1 = 0.1\cdot 3 + 0.2\cdot 2 + 0.3 = 0.3+0.4+0.3 = \underline{1}$, סכום מ"מ ...

$$P(3570 < X < 3630) = P\left(\frac{3570-3600}{60} < \frac{X-3600\cdot 1}{60\cdot 1} < \frac{3630-3600}{60}\right)$$

$$\phi\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \phi\left(\tfrac{1}{2}\right)-\left(1-\phi\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 2\phi\left(\tfrac{1}{2}\right)-1 = 0.69\cdot 2-1 = \boxed{0.38}$$

1.38

⑥ בורר בגז מהירות ויציאה V זווית יציאה θ גובה מקס' H של המ...

$L =$ מרחק בין יציאה ונפילה , $\frac{\sin 2\theta\, V^2}{g}$, מהירות אופקית W

θ , V מ"מ ב"ת $\theta \sim U[0,\frac{\pi}{2}]$ $EV = \pi V_0$ $= 12V_0^2$

נגדיר $Z = \frac{H}{L}$ עבור Z $F_Z(z) = \frac{1}{2}$ הוא $\frac{\sin\theta}{\dots\cos\theta} = \frac{tg\theta}{4}$

$tg 4z = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$z) \Rightarrow arctg\, 4z = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 4z = tg\, 45^\circ \rightarrow \boxed{z=\frac{1}{4}}$$

⑦ $\rho_{V,W}$ עזרה $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}$, $\int^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta = 1$

$$= \frac{(E\cos\theta)\sigma_V^2}{\sqrt{V^2E\cos^2\theta-(EV)^2(E\cos\theta)^2}} = \frac{\frac{2}{\pi}\sqrt{12V_0^2-\pi^2V_0^2}}{\sqrt{12V_0^2\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\pi}-\pi^2V_0^2\frac{4}{\pi^2}}} = \frac{\frac{2}{\pi}V_0\sqrt{12-\pi^2}}{\sqrt{2V_0^2}}$$

$6V_0^2 - 4V_0^2$

שחקן זורק n פעמים לכל היותר קוביה לבנה ואדומה (הוג'). אין לו כסף, בכל שלב הוא ז[וכה]
המופיע בקוביה הלבנה אבל אם קיבל 6 האדומה נוצא מפסיד את כל הזכיות ונגמר המשחק
מהי תוחלת הונו של השחקן בתום המשחק?

$X=$ הונו
$T=$ פעם ראשונה שקוביה אדומה מקבלת "6" $\sim \mathrm{Geom}(p=\frac{1}{6}) \Rightarrow P(T>n)=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

בסוף המשחק ⇐ תוחלת קוביה לבנה 3.5 בכל צעדה

$$E(X\mid T>n)P(T>n)+E(X\mid T\le n)P(T\le n)=3.5n\left(\tfrac{5}{6}\right)^n+0\cdot\left(1-\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right)=\boxed{3.5n\left(\tfrac{5}{6}\right)^n}$$

(9) אם הדבר תלוי בשחקן, הגיע ערך של n כדי לו לבחור (במובן שתוחלת זכייתו תהיה מקסימלית)?

שווה תוחלות הן עבור $n+1$ ו- n

$$3.5n\left(\tfrac{5}{6}\right)^n-3.5(n+1)\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n+1}=3.5\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\left(n-\tfrac{5}{6}(n+1)\right)=3.5\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\left(\tfrac{6n-5n-5}{6}\right)=3.5\left(\tfrac{5}{6}\right)^n\left(\tfrac{n-5}{6}\right)$$

גדל שלילי עבור $n<5$, $=0$ עבור $n=5$ חיובי עבור $n>5$ ⇐ תוחלת מקסימלית כאשר 5

(10) $f(x), g(x)$ פונ' צפיפ' $f(x)=0\ \forall x<0$ ומה $h(x)=f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)dt$ קונבולוציה

הוכ' $\int_1^\infty h(x)dx \ge \int_1^\infty g(x)dx$

יהי X מ"מ בעל צפיפות f, Y מ"מ בעל צפיפות g, ... h היא הצפיפות $X+Y$.

$f(x)=0$ כאשר x שלילי ⇐ X מקבל רק ערכים חיוביים, מכאן אם $Y>1$ אז $X+Y>1$

נסיק ש-

$$\int_1^\infty h(x)dx=P(X+Y>1)\ge P(Y>1)=\int_1^\infty g(x)dx$$

(11) $Y\sim U[0,X]$ X בעל צפיפות $f_X(x)=\frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}}$, $x>0$, 0 אחרת.

$E(X\mid Y)=Y+a$, $a=?$

$$\frac{f_{Y|X}(y|x)f_X(x)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}}}{\frac{1}{9}\int_y^\infty e^{-\frac{x}{3}}dx}=\frac{e^{-\frac{x}{3}}}{-3e^{-\frac{x}{3}}\Big|_y^\infty}=\frac{e^{-x/3}}{+3e^{-\frac{y}{3}}}=\boxed{\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(x-y)}}\qquad x>y$$

$$f_{X,Y}(x,y)=f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{9}xe^{-\frac{x}{3}}=\boxed{\tfrac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}}$$

$$\int_y^\infty x\tfrac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}(x-y)}dx=\tfrac{1}{3}e^{\frac{y}{3}}\left(-3xe^{-\frac{1}{3}x}\Big|_y^\infty+\int_y^\infty 3e^{-\frac{1}{3}x}dx\right)=\tfrac{1}{3}e^{\frac{y}{3}}\left(+3e^{-\frac{1}{3}y}y+9e^{-\frac{x}{3}}\Big|_y^\infty\right)$$

$$\tfrac{1}{3}e^{\frac{y}{3}}\left(+3e^{-\frac{1}{3}y}y+9e^{-\frac{y}{3}}\right)=+y+3\implies\boxed{a=3}$$

(12) התנאי הוארי של X בהינתן $Y=\boxed{Y+3}$

התנאי הוארי של Y בהינתן $X=\boxed{X/2}$

(13) $D=$ התחום במישור מעל $y\ge e^{\frac{x^2}{2}}$. (X,Y) וקו בעל צפיפות $f_{X,Y}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{y^3}$ אם $(x,y)\in D$

$EY=?$

$$f_Y(y)=\int\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{y^3}dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{y^3}2\sqrt{2\ln y}=\boxed{\frac{4\sqrt{2\ln y}}{\sqrt{\pi}\,y^3}}\qquad\boxed{y>1}$$

$$y\ge e^{\frac{x^2}{2}}\to 2\ln y>x^2\to\boxed{-\sqrt{2\ln y}<x<\sqrt{2\ln y}}$$

$$EY=\int_1^\infty\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\ln y}}{y^2}dy=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int\frac{\sqrt{\ln y}}{y^2}2y\sqrt{\ln y}\,du=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{2\ln y}{y}du=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{2u^2}{e^{u^2}}du$$

$u=\sqrt{\ln y}$, $du=\frac{1}{2}(\ln y)^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{y}$, $\sqrt{\ln y}\,2y\,du=dy$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty 2\frac{v^2}{2}e^{-\frac{v^2}{2}}\frac{dv}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^\infty\frac{v^2e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dv=\boxed{2\sqrt{2}}$$

$u=\frac{v}{\sqrt{2}}$, $du=\frac{dv}{\sqrt{2}}$

מומנט שני של $N(0,1)$

(14) $E(X\mid Y)=?$

הצפיפות של X בהינתן $Y=y$ תלויה רק ב-y כי אחידה ב-x. בקטע x סימטרי סביב 0

לומר $E(X\mid Y=y)=0 \Leftarrow \boxed{E(X\mid Y)=0}$

$$f_{X|Y}=\frac{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{y^3}}{\frac{4\sqrt{2\ln y}}{\sqrt{\pi}y^3}}=\frac{1}{2\sqrt{2\ln y}}\to E(X\mid Y)=\int_{-\sqrt{2\ln y}}^{\sqrt{2\ln y}}\frac{x}{2\sqrt{2\ln y}}dx=\frac{1}{2\sqrt{2\ln y}}\frac{x^2}{2}\Big|_{-\sqrt{2\ln y}}^{\sqrt{2\ln y}}=\frac{1}{2\sqrt{2\ln y}}\left(\frac{2\ln y}{2}-\frac{2\ln y}{2}\right)=0$$

200

מבחן בהסתברות

① 5 טרנזיסטורים, 2 פגומים N_1 ו-N_2 מס' הבדיקות עד

מלאי את טבלת פוני ההסתברות המשותפת של (N_1, N_2)

② רשמי את פונ'

3	4	5
0.2	0.3	0.4

$N_2 =$

$N_1 =$

	1	2	3	4	5	שורה
1	0	0.1	0.1	0.1	0.1	$\frac{2}{5}=0.4$
2	0	0				
3	0	0				$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=0.3$
4	0	0	0			$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=0.2$
5	0	0	0	0	0.1	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=0.1$
		0	0	0	0	
	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=0.1$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$		

③ מטונה בגמ' ארוזה וקמח שערה במשקל אחיד בין $\underline{0.3}$ ל-$\underline{0.5}$ ק"ג

מה ההסתברות בערך שמשקלו של קרטון יהיה בין 29 ל-30.5 ק'

$: 0.4 \overset{\times 75}{\Rightarrow} 30$

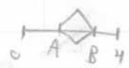
$\sigma_x^2 = \frac{(0.2)^2}{12} \overset{\times 75}{\Rightarrow} 0.25$

$z < \frac{30.5-30}{0.5}\Big) = \Phi(1)-\Phi(-2) = 0.84-(1-\Phi(2)) = -0.16+0.98 = \boxed{0.82}$

④ A ו-B נבחרות בה"ג $\sim U[0,4]$ מהי תוחלת שטח הריבוע אשר הקטע

$\frac{1}{2}E(A^2-2AB+B^2) = \frac{1}{2}EA^2 - EAB + \frac{1}{2}EB^2$

$\sigma_A^2 = \frac{(4-0)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$



⑤ פרקים בני שעה $\underline{0.25}$ מאוכזב, בפעם השניה הסדרה מופסקת מפרסומים ושאר הפרקים מוקרנ'

עד מפסיק שאוציה קנק' וקרלית אחידה במהלך סידור הסרט וצופה בו T ש

זהו ניסוי דו שלבי כאשר 2 השלבים הם משתנים גיאומטריים הניסוי הראשון

הניסוי השני זהה מתכונת חוסר הזכרון של משתנה גיאומטרי עם $E=4$ כלומר בניסו

$\Leftarrow$ סה"כ יוצרו ברצף 7 פרקים. $\Leftarrow t$ זמן שפותח הנער את הטלוויזיה

$E(t|7)) = 7 - E(\frac{7}{2}) = 7 - E(3.5) = 7-3.5 = \boxed{3.5}$

⑥ $? = f_T(1.5)$ $t=$ זמן הדלקת טלויזיה $k = t+T$

$f_{(T|k)} = f_k(k)\cdot\frac{1}{k} = (\frac{1}{4})^2(\frac{3}{4})^{k-1}$

$\frac{1}{16}\ \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{16}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16}\ \frac{3}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4} = \boxed{\frac{3}{16}}$

⑦ N מ"מ פואסוני עם $A>0$ $EA = \mu$ $Var\,A = \sigma^2$ $EN = ?$

⑧ $\rho_{N,A} = ?$

$A)) = E(A^2) = \sigma^2+\mu^2$

$^2(A)) - \mu^2 = E(A+A^2)-\mu^2 = EA+EA^2-\mu^2 = \mu+\cancel{\mu^2}+\sigma^2-\cancel{\mu^2} = \mu+\sigma^2$

$\frac{-\cancel{\mu^2}}{\mu+\sigma^2} = \boxed{\frac{\sigma}{\sqrt{\mu+\sigma^2}}}$

⑨ 31% מהמסמרים קצרים מ-24 מ"מ, 7% ארוכים מ-28 מ"מ. מודל גאוסי $\leftarrow$ הוכיח

$X =$ אורך המסמרים $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\left.\begin{array}{l}\Phi(\frac{24-\mu}{\sigma}) \\ 1-\Phi(\frac{28-\mu}{\sigma})\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\frac{24-\mu}{\sigma} = -0.5 \\ \frac{28-\mu}{\sigma} = 1.5\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mu=25}\ \boxed{\sigma=2}$

צ'בישב

$\leq \frac{\sigma^2}{25^2} = \frac{4}{25^2} < \frac{4}{400} = 0.01$ ולכן,

2000

(3) תוכנה מעגלת למספר שלם מוסיפה $[-0.5,0.5]$ מ"מ את
ההסתברות שסכום הפקודות הלקוח יפסיד 4 ש"ח או

X_i = התוספת לסכום $\quad EX_i=0 \quad \sigma^2_{X_i} = \frac{1^2}{12} = \frac{1}{12}$

$= 1-\Phi\left(\frac{4}{5}\right) = 1-0.79 = \boxed{0.21}$

(4) אם $P(A_k)=1$ עבור $k=1,\dots,n$ הוכח ש- $_k)=1$

$) = 1-P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k^c\right)$

כעת, $P(A_k^c)=0$ לכל $k=1,\dots n$ ולכן 0

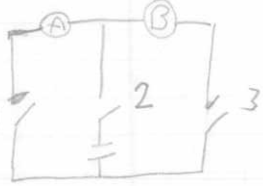
!

(5) פתוח q סגור p
תלות מס נורה דולק

$A \leftarrow 2+1$

$B \leftarrow 2+3$

$pp = 2p^2q + 2p^3 = 2p^2(q+p) = \boxed{2p^2}$



(6) ידוע שהנורה A דולקת מה ההסתברות שגם B דולקת? $\boxed{p}$

(7) נניח $p=\frac{1}{3}$ הנורה 2 כבויה, מה' ההסתברות שמתג 2 סגור

$= \frac{4}{22} = \boxed{\frac{2}{11}}$

$\overline{}, 1, 2, 3, 13,$

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3$

(8) נניח מודל שונה להפעלת המעגל - $t=0$ מתגים פתוחים ונסגרים ל
עבור מ"מ מעריכי T כמה: $(T>t) = e^{-\lambda t}$

T = אורך החיים של הרכיב

$\int e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t}\Big|_t^\infty = e^{-\lambda t}$

ההסתברות שבזמן נתון t המתג 1 יהיה כבר סגור $\{T_1 \le t\}$

(9) נניח $\lambda=1$ תוחלת הזמן בו תידלק הנורה האחרונה מבין השנים הינו:
S = הזמן בו תידלק הנורה האחרונה, T_i = זמן סגירת המתג ה-i

$e^{-s})^3 \Rightarrow f_S(s) = 3(1-e^{-s})^2\cdot(+e^{-s}) = 3e^{-s}(1-2e^{-s}+e^{-2s})$

$\underbrace{{}^{-2s}ds}_{Exp(\lambda=2)} + \underbrace{3\int_0^\infty s e^{-3s}ds}_{E(exp(\lambda=3))} = 3 - 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{11}{6}}$

(1) שונה בג'ינר מסוים ומשוס מתפצל. מנסים סורק את כל הג'ינרים

ג'ינר	A	B	C	D	E
סיכוי שנמצא בו/נמצא	0.1	0.2	0.2	0.3	0.2
סיכוי לגילוי אם נמצא	0.7	0.3	0.5	0.6	0.4

[redacted]

(2) בהינתן לא התגלה ת' ג'ינר נמצא מהסתברות הגבוהה ביותר?

B הכי גדול

$0.7\cdot0.2 \qquad C: 0.2\cdot0.5=$

(10) הכנסה $\sim N(1000,1600)$ כמה צריך להרוויח להימנות בין 5% שמרוויחים הכי

$$\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{t-1000}{\sqrt{1600}}\right)=\Phi\left(\frac{t-1000}{40}\right)$$

$$\ldots 2 + 1000 = \boxed{1052}$$

(11) המודל הנתון מהווה קירוב, כי יש אפשרות להכנסה שלילית! הראו כי הסתבר

$\underline{P(Z<-25)}$ ⇐ מחוץ לטווח הגבולות

$$P(Z<-25)\le P(|Z|>25)\le \frac{1}{25^2}<\frac{1}{100}=\boxed{0.01}$$

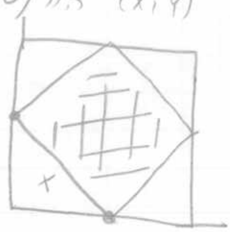
תלוי הגאוסי סימטרי

$$|Z|>25) \Rightarrow P(Z<-25)\le\frac{1}{2\cdot 625}\le\frac{1}{1000}=\boxed{0.001}$$

(12) ריבוע בעל אורך צלע 1 מחולק ל-4 מלבנים ע"י הגרלת נק' פנימית

ההיקפים (X,Y):

$$\frac{3}{2}>x+y \leftarrow 3>2y+2x$$
$$1>2y-2x \leftarrow 3>2(1-x)+2y$$
$$1>2x-2y \leftarrow 3>2(1-y)+2x$$
$$-1>-2(x+y) \leftarrow 3>2(1-y)+2(1-x)$$



⇐ היחס השטחים $\boxed{\frac{1}{2}}$

(13) ערך מקדם המתאם בין שטח המלבן הצפון מערבי והדרום מזרחי כאשר X,Y ב"ת

השטחים הם: $U=X\cdot(1-Y)$ $V=Y(1-X)$

$$=(1-X)X\,E\,Y(1-Y)=(EX-EX^2)^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

$$EX^2=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

$$EU=EV=EX\,E(1-Y)=\frac{1}{2}\left(E1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$=(1-Y)^2-(EX)^2(E(1-Y))^2=\frac{1}{3}\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}$$

$$(1-X)^2-(EY)^2(E(1-X))^2=$$

$$^2)=E1-2EY+EY^2=1-1+\frac{1}{3}$$

$$)=E1-EY=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{144}{7}\left(-\frac{5}{144}\right)=\boxed{\frac{5}{7}}$$

(14) מספר X נבחר באקראי $\sim U[0,\sqrt{Y}]$ Y בעצמו אחיד ב- $[0,1]$

$$\left(\frac{\sqrt{Y}}{2}\right)=\frac{1}{2}E\sqrt{Y}=\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{y}\,dy=\frac{1}{2}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

(15) מצאו את החזאי $\hat{Y}=g(X)$ הטוב ביותר של Y באמצעות X

$$\frac{f_Y(y)}{}=\frac{\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot 1}{2(1-x)}=\frac{1}{2\sqrt{y}(1-x)} \qquad \underline{x^2\le y\le 1}$$

$$y)f_Y(y)\,dy=\int_{x^2}^1\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_{x^2}^1=2-2x=2(1-x)$$

$$dy=\frac{1}{2(1-x)}\int_{x^2}^1\sqrt{y}\,dy=\frac{1}{2(1-x)}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{x^2}^1=\frac{2}{3\cdot 2(1-x)}(1-x^3)$$

$$x+x^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{E(Y|X)=\frac{1}{3}(1+X+X^2)}$$

2001 מבחן בהסתברות

$M_X(s)=Ee^{sX}$ פונ' יוצרת מומנטים

① X נתונה ע"י $M_X(s)=\frac{c}{(3-s)^2}$, סרס, שונות X הינו:

$1 \Rightarrow \underline{c=9}$

$(3-s)^{-3}\cdot +1 = \frac{18}{(3-s)^3} \Rightarrow EX=M_X'(0)=\frac{18}{3^3}=\frac{6\cdot 3}{3^3}=\frac{3^2\cdot 2}{3^3}=\boxed{\frac{2}{3}}$ $\quad \sigma_X^2=EX^2-(EX)^2$

$\cdot 3\cdot(3-s)^{-4}\cdot +1=\frac{18\cdot 3}{(3-s)^4} \quad EX^2=M''(0)=\frac{2\cdot 3^2 3}{3^4}=\boxed{\frac{2}{3}} \Rightarrow =\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\boxed{\frac{2}{9}}$

② ינה ונורלי השותפים בקו טלפון הנשתמש בו זמן Exp. נורלי $\underline{\lambda=2}$ ינה $\underline{\lambda=1}$ מ"מ

Z = החלק היחסי של הזמן בו ינה השתמש בקו, אזי $F_Z(\frac{1}{3})=?$

$Z=\frac{X}{X+Y}$ { ינה ~~שלה~~ שהה $X\sim Exp(1)$, נורלי ~~שהתה~~ שהה $Y\sim Exp(2)$

$\frac{X}{X+Y}\le\frac{1}{3}) = P(Y\ge 2X)=$

$X\le X+Y$

$dy)\,dx=\int_0^\infty e^{-5x}dx=\boxed{\frac{1}{5}}$

$\int_0^\infty 2e^{-2y}\int_0^{y/2} e^{-x}dx\,dy=\int_0^\infty 2e^{-2y}(e^{-x}|_{y/2}^0)dy$ $\quad 1-e^{-\frac{y}{2}}$

$=\int_0^\infty 2e^{-2y}-2e^{-2\frac{1}{2}y}dy= e^{-2y}|_\infty^0+\frac{2}{2.5}e^{-2\frac{1}{2}y}|_0^\infty$

$=1-\frac{2}{2.5}=1-\frac{2}{\frac{5}{2}}=1-\frac{2}{5}\cdot 2=1-\frac{4}{5}=\boxed{\frac{1}{5}}$

③ אמנית בונה 3 כדים, היא נכשלת בהסתברות $\frac{1}{3}$ מ"מ מה תוחלת מס' אומנים שישברו ~~משלמים~~ ללא שיבוש לכ

$P=1-(\frac{2}{3})^3=\frac{19}{27}$

ניסוי ברנולי הצלחה = שיבוש אחד

תוחלת מס' האומנים עד המשובש הראשון ללא $\frac{27}{19}$ - ~~עד בכלל~~ תוחלת מס' האומנים עד המשובש הראשון ~~עד בכלל~~

④ משדרים אות וספרת ביקורת = 0 אם סכום הביטים זוגי, לאחר השידור ספרת הביקורת
$= 1$ אם סכום הביטים אי זוגי] מה ההסתברות שלא חל

$6=\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}$

$P(\text{ביקורת מתאימה} | \text{אין שגיאות}) = \frac{P(\text{אין שגיאות})}{P(\text{ביקורת מתאימה})}=\frac{(\frac{2}{3})^4}{(\frac{2}{3})^4+3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})^2+3(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^4}=\frac{16}{4\cdot 6+1+16}=\boxed{\frac{16}{41}}$

⑤ $W=h(Z)$, $Z\sim U[0,1]$, h גזירה ועולה ב- $(0,1)$ מחקית, $f_W(w)=\begin{cases}3w^2 & 0<w<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$, $h(\frac{1}{8})=?$

דרך 1 - נוסחת טרנס' צפיפות עבור $0<w<1$: $\quad 3w^2=f_W(w)=(h^{-1})'(w)\cdot 1 \Leftarrow$

$f_X(x)$ צפיפות מ"מ X, $y=h(x)$ טרנס' של x, 1:1, גזירה $= f_Y(y)=|h^{-1\prime}(y)|f_X(h^{-1}(y))$

דרך 2 $\quad \underline{w^3}=P(W\le w)=P(h(U)\le w)=P(U\le h^{-1}(w))=\underline{h^{-1}(w)}$ עולה

ומשנה המקרים $\quad \to h(u)=u^{\frac{1}{3}} \to h(\frac{1}{8})=\boxed{\frac{1}{2}}$

⑥ $X\sim U[0,1]$, $Y\sim U[0,1]$ ב"ת מהו $\rho_{V,W}$ בין $V=\min(X,Y)$, $W=\max(X,Y)$? $\quad =XY$

$X\in Y=\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$1-F_V(v)=P(X>v,Y>v)=(1-v)^2\to F_V(v)=2(1-v)$ $\quad$, $Y\le w)=w^2\to f_W(w)=2w$

$EV=2\int_0^1 v(1-v)dv=\frac{1}{3}$ $\quad EW^2=2\int_0^1 w^3dw=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \rho_{V,W}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}}=\boxed{\frac{1}{2}}$ $\quad {}^2-(EW)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

⑦ מגרילים n ספרות $D_1\ldots D_n$ ב"ת $X_i=$ הספרה האחרונה של D_i^4 : $i=1,\ldots,n$ אם $D_i=2$

חני אומר שיש סיכוי גבוה ש- $\frac{X_1+X_2+\ldots X_n}{n}$ אזי קובע שיבוא חני כאשר n ומרכז אחר.

יש ניחוש אחר חני ידע בהסתברות הקרובה ל-1 כרצונו. מהו? חוק המספרים הגדולים $>\varepsilon)=0$

$-EX_1|\le\delta)\xrightarrow{n\to\infty}1$

תוחלת ח"ב להיות EX_1

D_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_i	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1

$EX_i=\frac{24+9}{10}=\frac{33}{10}=\boxed{3.3}$

$\boxed{\text{מועד א 2001}}$

8. קטע מעגל חשמלי מורכב מ-64 נגדים במקביל. התנגדות 1 או 2 אום בהסתברות שווה, בת"ל. ההסתברות שההתנגדות הכוללת של הקטע תעלה על 0.02 אום היא בערך:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots\frac{1}{R_n}$$

$$E\frac{1}{R_1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\qquad var\frac{1}{R}=\frac{5}{8}-\frac{9}{16}=\frac{1}{16}\qquad \to P(R>0.02)=P\left(\frac{1}{R}<50\right)\to P\left(Z<\frac{50-48}{2}\right)=\Phi(1)=\boxed{0.85}$$

$$E\left(\frac{1}{R_1}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}\qquad \frac{1}{R}\sim N\left(64\cdot\frac{3}{4},64\cdot\frac{1}{16}\right)=N(48,4)$$

9. $N\sim Pois(\lambda)$, $\lambda>0$, $X\sim Geom\left(\frac{1}{N+2}\right)$ אזי $Cov(N,X)=$?

$$EN=\lambda\qquad Var\,N=\lambda\qquad EN^2=\lambda+\lambda^2$$

$$EX=E(E(X|N))=E(N+2)=2+\lambda$$

$$E(XN)=E(E(XN|N))=E(N\,E(X|N))=E(N^2+2N)=\lambda+\lambda^2+2\lambda=\lambda^2+3\lambda$$

$$\Rightarrow Cov(N,X)=ENX-ENEX=\cancel{\lambda^2}+3\lambda-\lambda(\lambda+2)=\boxed{\lambda}$$

10. נבחר נק' Q באופן מקרי מתוך עיגול ברדיוס R, $f_R(r)=\begin{cases}2r & 0<r<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ X - מרחק מ-Q למרכז העיגול. חשבו EX.

$$EX=E(E(X|R))$$

$$F_{X|R}(x|r)=P(X<x|R=r)=\frac{\pi x^2}{\pi r^2}\to f_{X|R}(x|r)=\begin{cases}\frac{2x}{r^2} & 0<x<r\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$\Rightarrow E(X|R)=\int f_{X|R}(x|r)\,x\,dx=\int_0^R\frac{2x^2}{R^2}dx=\frac{2}{R^2}\frac{R^3}{3}=\boxed{\frac{2}{3}R}$$

$$\Rightarrow EX=E\left(\frac{2}{3}R\right)=\frac{2}{3}ER=\frac{2}{3}2\int_0^1 r^2dr=\frac{4}{3}\frac{1}{3}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

11. מהו אומד אופטימלי של R בהינתן X

$$E(R|X)=?$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X|R}(x|r)f_R(r)\,dr=\int_x^1\frac{2x}{r^2}2r\,dr=-4x\ln x\qquad 0<x<1$$

$$f_{R|X}(r|x)=\frac{f_{X|R}(x|r)\cdot f_R(r)}{f_X(x)}=\frac{\frac{2x}{r^2}2r}{-4x\ln x}=-\frac{1}{(\ln x)r}\qquad x<r<1$$

$$E(R|X=x)=\int_x^1 f_{R|X}(r|x)\,r\,dr=\int_x^1\frac{-r}{r\ln x}dr=-\frac{1}{\ln x}(1-x)\Rightarrow\boxed{\frac{x-1}{\ln x}}\qquad E(R|X)=\boxed{\frac{X-1}{\ln X}}$$

12. נתונה הצפיפות $f_{X,Y,Z}(x,y,z)=ce^{\{-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}y^2-z^2+3yz-x-z\}}$, $c>0$ קבוע מתאים, מה מטריצת הקווריאנס $\Sigma_{X,Y,Z}$?

(X,Y,Z) וקטור גאוסי הצפיפות $ce^{-\frac{1}{2}(r^TAr)}$ כאשר $r=(x-\mu_x,y-\mu_y,z-\mu_z)$

$$\Sigma_{X,Y,Z}=A^{-1}=\boxed{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&3&5\end{pmatrix}}\leftarrow A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&-3\\0&-3&2\end{pmatrix}\leftarrow-\frac{1}{2}(x^2+5y^2+2z^2-6yz+2x+2z)$$

13. תשובה: הצפיפות המשותפת של $(X-Y,Z-Y)$ עד כדי קבוע מנרמל.

הוקטור האקראי $(U,V)=(X-Y,Z-Y)$ הוא וקטור גאוסי כהתמרה לינארית של (X,Y,Z) יש למצוא EU, EV באמצעות EX,EY,EZ ואת מטריצת הקווריאנס $\Sigma_{U,V}$ של (U,V).

את תוחלות X,Y,Z נמצא ע"י נק' הקיצון של (האקספוננט של) פונק' הצפיפות המשותפת של (X,Y,Z)

$$\begin{rcases}\frac{\partial}{\partial x}\to x+1=0\\ 5y-3z=0\\ 3y-2z-1=0\end{rcases}\to(\mu_x,\mu_y,\mu_z)=(-1,-3,-5)\Rightarrow\boxed{EU=2,\ EV=-2}$$

$$\begin{rcases}\sigma_{U,U}=\sigma_{XX}-2\sigma_{XY}+\sigma_{YY}=3\\ \sigma_{U,V}=\sigma_{X,Z}-\sigma_{X,Y}-\sigma_{Y,Z}+\sigma_{Y,Y}=-1\\ \sigma_{V,V}=\sigma_{Z,Z}-2\sigma_{ZY}+\sigma_{YY}=1\end{rcases}$$

$$\Sigma_{U,V}=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&1\end{pmatrix}\to det=3-1=2$$

$$\Rightarrow A=\Sigma_{U,V}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&3\end{pmatrix}\Rightarrow f_{U,V}(u,v)=C_1e^{-\frac{1}{4}((u-2)^2+2(u-2)(v+2)+3(v+2)^2)}$$

$$=\boxed{C_2e^{-\frac{u^2}{4}-\frac{3v^2}{4}-\frac{uv}{2}-2v}}$$

14. מהי $P(2Y>-(Z+8))$?

$$W=2Y+Z\sim N(\mu_W,\sigma_W^2)\qquad \mu_W=2\mu_y+\mu_z=-11,\ \sigma_W^2=4\sigma_{yy}^2+4\sigma_{yz}+\sigma_z^2=25$$

$$P(W>-8)=1-P(W<-8)=1-\Phi\left(\frac{-8-(-11)}{5}\right)=1-\Phi\left(\frac{3}{5}\right)=1-\Phi(0.6)=\boxed{0.27}$$

מבחן בהסתברות 2002 מועד א

(1) 4 אותיות משודרים
| a 0.2 | b 0.1 | c 0.4 | d 0.3 |
תיתכן שגיאה
| a 0.4 | b 0.3 | c 0.1 | d 0.5 |
מהנתון ששודרה האות.

ידוע d לא שודר והיתה שגיאה מה ההסתברות שהאות ששודרה היה b?

$$P(b \text{ שודר} \mid d \text{ לא שודר, היתה שגיאה}) = \frac{P(d \text{ לא שודר היתה שגיאה} \mid b \text{ שודר})\,P(b \text{ שודר})}{P(d \text{ לא שודר והיתה שגיאה})} = \frac{0.3\cdot 0.1}{0.4\cdot 0.1 + 0.1\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.4} = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{4}{100}+\frac{3}{100}+\frac{8}{100}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = \boxed{0.2}$$

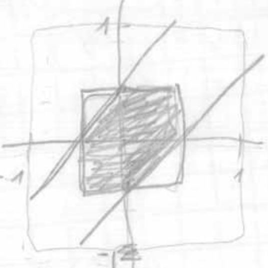
(2) זמן הפליטה הראשונה של חלקיק שמסתו M מתפלג Exp עם αM, α קבוע ידוע. M מ"מ

$$F_M(m) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{m^2} & m \ge 1 \\ 0 & m < 1 \end{cases} \qquad -m^{-2} \;\; +2m^{-3}$$

$$ET = E(E(T\mid M)) = E\left(\frac{1}{\alpha M}\right) = \frac{1}{\alpha} E\left(\frac{1}{M}\right) = \frac{1}{\alpha}\int_1^\infty 2m^{-3}\frac{1}{m}\,dm = \frac{1}{\alpha}\, 2\,\frac{m^{-3}}{-3}\Big|_1^\infty = \boxed{\frac{1}{\alpha}\,\frac{2}{3}}$$

(3) 2 נקודות נבחרות באקראי ב"ת מתוך $[-1,1]$ מה ההסתברות שהקטע המחבר ביניהן כולו ב- $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ואורכו קטן מ- $\frac{1}{2}$

התנאי הראשון מוריד $\frac{3}{4}$ מהתחום: $\frac{1}{4} = \frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}$



$$-\tfrac{1}{2} < y - x < \tfrac{1}{2} \rightarrow y < x + \tfrac{1}{2}, \quad \rightarrow y > x - \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{16}}$$

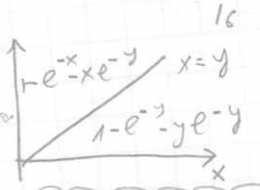
(4) ב-5 הטלות של קוביה מקבלים x ו-y מצא $e(x^2 \mid x+y=8)$

2 6	4
6 2	36
3 5	9
5 3	25
4 4	16

$$\frac{1}{5}(4+36+9+25+16) = \frac{90}{5} = \boxed{18}$$

(5) פונ' ההתפלגות

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} - ye^{-y} & 0 \le y < x \le \infty \\ 1 - e^{-x} - xe^{-y} & 0 \le x \le y \le \infty \\ ?? \end{cases}$$



$$\rightarrow f_{X,Y}(1,2) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F_{XY} = \frac{\partial(-e^{-y})}{\partial y} = e^{-y} = e^{-2} = \boxed{\frac{1}{e^2}} \rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \le x \le y \le \infty \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\int_0^\infty\int_x^\infty e^{-y}\,dy\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = e^{-x}\Big|_\infty^0 = 1$$

$$\Rightarrow F_{X,Y}(-2,1) = \boxed{0}$$

$$\rightarrow P(X \le 1, Y \ge 2) = \int_0^1\int_2^\infty e^{-y}\,dy\,dx = \int_0^1 e^{-y}\Big|_\infty^2 dx = e^{-2} = \boxed{\frac{1}{e^2}}$$

$$\rightarrow P(Y > 1) = \int_1^\infty\int_0^y e^{-y}\,dx\,dy = \int_1^\infty y e^{-y}\,dy = -e^{-y}y\Big|_1^\infty + \int_1^\infty e^{-y}\,dy = e^{-1} - e^{-y}\Big|_1^\infty = e^{-1} + e^{-1} = \boxed{\frac{2}{e}}$$

$$\rightarrow P(Y < X) = \boxed{0}$$

תשובות אפשריות $0, \frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}, \frac{2}{e}$

(6) סטודנט ממלא את התשובות ב- (5) באקראי מה שונות הניקוד שיקבל עבורה?

X = ניקוד k = תשובות נכונות ← $X = 2k$

k משתנה בינומי $K \sim Bin(5, \frac{1}{4})$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{2k}^2 = 4\sigma_k^2 = 4\cdot npq = 4\cdot 5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{15}{4} = \frac{12+3}{4} = \boxed{3.75}$$

(7) בוועדת קבלה סטודנטים של מכללה יודעים שמועמד שמתקבל לומד בהסתברות $\frac{2}{3}$ בה. בשנה יש 315 מקומות פנויים ושולחים הודעת קבלה ל-450 מועמדים. העזר בנוסחת הגבול המרכזי להעריך את ההסתברות לכך שיגיעו ללימודים יותר ממספר המקומות הפנויים.

k = מס סטודנטים שמגיעים למכללה

$$EK = n\cdot p = 450\cdot\frac{2}{3} = 300$$

$$\text{var}k = npq = 450\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{3} = 100 \Leftarrow k \sim Bin(\overset{n}{450}, \overset{p}{\tfrac{2}{3}})$$

$$P(k > 315) = 1 - P(k \le 315) = 1 - \Phi\left(\frac{315-300}{10}\right) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93 = \boxed{0.07}$$

(8) $X_1, X_2, X_3, \ldots$ סדרת מ"מ ב"ת בעלי אותה צפיפות, ויהי N האורך של הקטע היורד המקסימלי בתחילת הסדרה (למשל: $n=3$ עבור $\underbrace{5, 3.2, 1}, 4.5, \ldots$ ו- $n=1$ עבור $1.6, 4, 3, 11.5, \ldots$) מצאו את EN ע"י שימוש ב- $EN = \sum_{n=0}^\infty P(N > n)$

$$P(N > n) = P(N \ge n+1) = P(\text{אם הראשונים יורדים } n+1) = \frac{1}{(n+1)!}$$

ישנם $(n+1)!$ סידורים אפשריים (פרמוטציות) לסדר את $X_1 \ldots X_n$ כאשר אין שוויון ביניהם $x<\ldots<x$. אנחנו מעוניינים בסידור אחד מתוכם $x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n$.

$$\Longrightarrow EN = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)!} \underset{\text{הצגת טיילור}}{=} e - 1$$

(9) (X,Y) בעלי צפיפות $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}} & x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ $R = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \text{arctg}\frac{Y}{X} \in [0, 2\pi)$ חשבו $f_{R,\theta}(\frac{4}{5}, \pi)$

$$f_{R,\theta} = \begin{cases} \frac{R}{2\pi\sqrt{1-R^2}} & R^2 < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \rightarrow f\left(\tfrac{4}{5}, \pi\right) = \frac{\frac{4}{5}}{2\pi\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{2}{5\pi\sqrt{\frac{9}{25}}} = \boxed{\frac{2}{3\pi}}$$

2002

(10) X,Y מ"מ ב"ת , $\operatorname{cov}(X,\frac{Y}{X})$ מוגדר היטב , Y

הוכח' $\operatorname{cov}(X,\frac{Y}{X}) \le 0$

X, Y ב"ת גם

← נובע מהנתון $EX>0,\ EY>0$

$XE\frac{Y}{X} = EY - EXE\frac{1}{X}EY = \underset{>0}{EY}[\underbrace{1-EXE\tfrac{1}{X}}]$

⇐ נותר להוכיח $1-EXE\frac{1}{X}\le 0$ ← $1\le EXE\frac{1}{X}$

נקח את א"ש ינסן עבור $h(x)=\frac{1}{x}$ כי קמורה ב- $(0,\infty)$ הת

$E\frac{1}{X} \ge \frac{1}{EX}$

(11) בחדר ובו n כסאות יושבים n אנשים. קמים מסתו

(א) $X_i = \begin{cases} 1 & \text{אדם i מתיישב על כסאו המקורי} \\ 0 & \text{לא מתיישב על כסאו המקורי} \end{cases}$ $i=1,2,\dots n$ ה

$P(\text{אדם}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \to \underline{P(X_2=1)=\frac{1}{n}}$

$P(\text{מתיישב } 2\text{ ו-}1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

$\frac{1}{n^2}=P(X_1=1)P(X_2=1) \Longrightarrow$ X_1, X_2 אינם ב"ת

(ב) מהי תוחלת מס' האנשים שיתיישבו באותו כסא בו ישבו קודם

$\Leftarrow\ X_i = \begin{cases} 1 & \text{בהסתברות } \frac{1}{n} \\ 0 & \text{בהסתברות } 1-\frac{1}{n} \end{cases}$

X = מס' האנשים שיתיישבו שוב בכסא בו ישבו בתחילה ⟸ ⟸

$\Rightarrow EX=\sum_{n=1}^{n} EX_i=\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$

במילים אחרות, אדם אחד בממוצע יתיישב בחזרה על כסאו ה

לראשון מס' אפשרויות לשני לאחרון

$\frac{A}{\Omega} \to \quad \Omega = n\,(n-1)\,(n-2)\cdots 1$

P(y

$= \int_{0.4}^{1}$

קרא' ,

?

P(נוצא

P(

הראשון

צת?

$\Rightarrow 1$

$\frac{n}{(n+1)^2}$

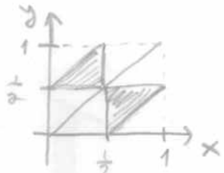
מבחן הסתברות

(1) בוחרים נקודה, מה ההסתברות ש...

$0 \quad x \quad y \quad 1$

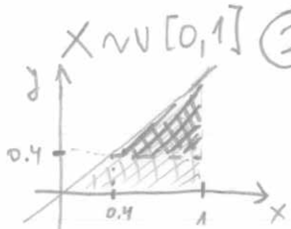
$x<y$	$y<x$
$x<1-x$	$y<1-y \rightarrow y<\frac{1}{2}$
$1-y<y$	$1-x<x \rightarrow \frac{1}{2}<x$
$y-x<1-y+x$	$x-y<1-x+y \rightarrow -\frac{1}{2}+x<y$

$\boxed{\frac{1}{4}} \Leftarrow$



(2) $X\sim U[0,1]$ $\quad f_{Y|X}(y|x)=\frac{2y}{x^2}$ עבור $...<1$

$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x)\cdot f_X(x) = \boxed{\frac{2y}{x^2}}$



$...dx = \int_{0.4}^{1}\frac{2}{x^2}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{0.4}^{x}\right)dx = \int_{0.4}^{1}\frac{2}{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{0.4^2}{2}\right)dx$

$...\Big|_{0.4}^{1} = 1+0.4^2-0.4-0.4 = 1+0.16-0.8 = \boxed{0.36}$

(3) כדי שחקן 1 3 קלפים: 2,7,9 ו-2 4,5,8
השחקן שהוא קלף גבוה יותר מנצח. אם 2 נצח:

$P(\text{1 נצח}) = \frac{2}{9} = \frac{1}{3},\ P(\text{2 נצח}) = \frac{4}{9}$

$\frac{P(\text{הוצא}\ 8|\ldots)\,P(\ldots)}{P(\text{2 נצח})} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

	2	7	9
4	X		
5	X		
8	X	X	

(4) בקופסא 1 אדום n לבנים, A ראשון מוציא... שמוציא אדום. מהו n המינימלי שמבטיח ש...
הסיכוי של B לנצח: סיבוב 2 - $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\left(\frac{1}{n+1}\right)$ - סיבוב 4

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2k-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ - סיבוב 2k

סכום סדרה הנדסית אינסופית $\frac{a_0}{1-q}$

$\ldots\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\frac{n}{n+1}}{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}\right) = \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2}}$

$\rightarrow n>0.9n+0.45 \rightarrow 0.1n>0.45$

$n>4.5 \Rightarrow \boxed{n=5}$

n של

$D=\{($...

$24 =$ ...

$f_{X,Y}(x,y$...

$f_X(2)=\int_{-\infty}^{\infty}f$...

2002 קורס ב

$EX = E\sum$...

$EX_i = 1$...

$\Rightarrow EX$...

$x>$...

$P(\{(2B)^2$...

$f_{BC}(b$...

$P(C<$...

$=\int_0^\infty e^{-b}($...

$=1-\int_0^\infty($...

$1-\sqrt{2\pi}$...

$=\boxed{0.1\ldots}$

פרמטר T.

$ET=\frac{1}{\lambda}, E$...

$EN = E($...

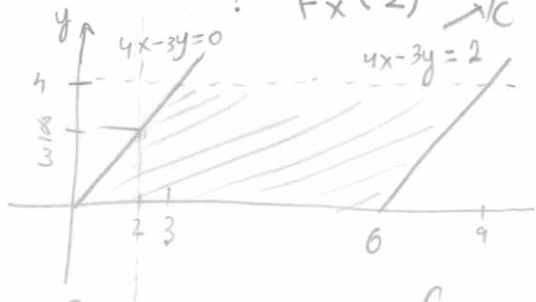
$ENT =$ ...

$cov(N,T) =$ ...

$\sigma_N^2 = EN$...

(5) (X,Y) וק"ו אחיד במקבילית 3 $3y \le 2y$

מצאו את $f_X(2) = ?$ צפח המ



$= \boxed{\frac{1}{9}}$

(6) מהי תוחלת מספר הפאות שלא מתקבלות

רמז: $X = X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6$ עבור X_i מתאים

נגדיר מ"מ אקראי X_i $\quad X_i = \begin{cases} 1 & \text{הפאה ה-i לא התקבלה} \\ 0 & \text{הפאה ה-i התקבלה} \end{cases}$ $\quad)^6$

נגדיר $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ - סה"כ הפאות שלא מת

$) = P(X_i = 1) = \left(\frac{5}{6}\right)^6$

(7) נתונים מ"מ מ"ת B ו-C בלתי תלויים מ

מהי ההסתברות שלמשוואה $x^2+2Bx+2C=0$

$<0) = P(C > \frac{B^2}{2}) = 1 - P(C < \frac{B^2}{2})$

$bdc = \int_{b=0}^{\infty}\int_{c=0}^{b^2/2} e^{-b}e^{-c}\,db\,dc = \int e^{-b}\left(-e^{-c}\Big|_0^{\frac{b^2}{2}}\right)db$

$db = -e^{-b}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\frac{(b^2+2b+1-1)}{2}}\,db$ סוף התפלגות נורמלי תקני

$-\frac{r^2}{2}dr = 1 - \sqrt{e}\,\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}dr\right) =$

$84)\sqrt{2\pi e} \Rightarrow P(C > \frac{b^2}{2}) = 1 - P(C < \frac{b^2}{2})$

(8) שפופרת כוללת ב-T זמן מ"מ אקראי ש מ

$c>0$, $T \sim Exp(\lambda)$ תזכורת $Z \sim Pois(\lambda) \leftarrow$ $^2 = \lambda + \lambda^2$

$T) = \boxed{\frac{c}{\lambda}}$

$T)) = E(T(cT)) = cET^2 = \boxed{\frac{2c}{\lambda^2}}$

$= \boxed{\frac{c}{\lambda^2}}$

$E(N^2) = E($

$=$

$\Rightarrow$

$\rho_{N,T} = \frac{Co}{}$

ום לפי מטה

המקו33ים

המרכזי

ג"א עמלה.

$P(S_{12} < 55)$

$\mu = \frac{10+0}{2} = 5$

$\Rightarrow \Phi\left(\frac{55-12\mu}{\sqrt{12}\,\sigma}\right)$

$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$, F_X

$\Rightarrow EF(X) = \int$

ואיפה.

$\int_a^b f'(x)g(x)d$

$2\int_{-\infty}^{\infty} F(x$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}F(x)\right)^2$

$\int_{-\infty}^{\infty} F$

פלגות $F(x)$, ומספרם

את $F_X(x)$ כמותנים

$F_{X|N}(x|N$

$=$

$F_X(x) =$

$\frac{\frac{F(x)}{2}}{1 - \frac{F(x)}{2}}$

$\cdots r^2) = C\,ET + C^2 ET^2$

מועד 2002 2002

$\boxed{\frac{c}{\lambda} + \frac{c^2}{\lambda^2}}$

$$\frac{\frac{c}{\lambda^2}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}(c\lambda + c^2)\frac{1}{\lambda^2}}} = \frac{\frac{c}{\lambda^2}}{\frac{1}{\lambda^2}\sqrt{c\lambda + c^2}} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{c\lambda + c^2}}}$$

(9) כנס׳יונר מקבל את קצבתו בכל ראשון מחוד׳
לעשרה הקרובה (דוגמא) 1638.47 → 1630
בחודשים השונים מהווים מ״מ אחידים $U[0,10]$
כדי לערוך את ההסתברות שבשנה נתונה הס׳
על פי משפט הגבול המרכזי: $) = \Phi\left(\frac{55 - 12\mu}{\sqrt{12}\sigma}\right)$

$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.69 = \boxed{0.31}$

(10) X מ״מ בעל פונ׳ התפלגות $F(x)$ וצפיפות $f(x)$
א. נניח $x \sim U[0,1]$ ← $f(x) = \begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ חשבי $F(x)$

$\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{EF(x) = \frac{1}{2}}$

ב. הוכיחי שהתוצאה שהתקבלה בסעיף א׳ תקפה

$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \underset{(F(x))'}{f(x)} dx = F(x)F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} F(x) f(x)\,dx \Rightarrow$

$) - F^2(-x) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow 2EF(x) = 1 \rightarrow \boxed{EF(x) = \frac{1}{2}}$

רק $F(x)$ בהנחה כי $f(x)$ רציפה

$) f(x) \Rightarrow$ דרך נוספת -

$\frac{1}{2} F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty} F(x)^2 - \lim_{x\to -\infty} F(x)\right] = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$

(11) X הערך הגדול מבין $X_1, X_2 \ldots X_N$ כאשר b ה׳
N בעצמו משתנה גיאומטרי עם פרמטר $p = \frac{1}{2}$ דהיינו $(\ldots)^n$
של $F(x)$

$\cap X_n < x) \xrightarrow[\text{ב״ת } X_i]{} P(X_1 < x)P(X_2 < x)P(\ldots\ P(X_N < x)$

$(x)^N$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(x)^N \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F(x)}{2}\right)^n$$

$0 \le \frac{F(x)}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow$ טור גיאומטרי

10 ...

$F_{X,Y}(5$

$F_{X,Y}(5,5) =$

$((3,2,3)$ עבור x

$P_1 = \frac{6}{6^3} =$

$P_2 = \frac{3\cdot 6\cdot 5\cdot 1}{6^3}$

$P_3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3} =$

...יגיע בהפרש של יותר מ־20 דקות

$\boxed{\frac{5}{9}}$ ⇐ יגיעו בהפרש קטן מ־20 דקות

...בהפרש קטן מ־5 ימים

$P(A^c$

$P(B|A) =$

$P(B) = 0.1$

$P(A^c|B^c)$

$\Rightarrow P(A)$

$\Rightarrow P(B$

$P(k) =$

גיאומטרי,

ההנחה השנייה

$k+1$

Ge

מבחן הסתברות

① נתון $f_{X,Y}(x,y) = 3xy^2 - e$ עבור $x>1$ ו- $\frac{1}{x}$

$y^3))\int_0^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$

$= +\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \boxed{0.8}$

② X מס' בגולות שונות המתקבלות בשלוש זריקות של קוביה

מצאי תוחלת של $X(X-1)$

$\frac{15}{36} + 3\cdot\frac{20}{36} = \frac{1+30+60}{36} = \boxed{\frac{91}{36}}$

$+ \frac{9\cdot 20}{36} = \boxed{\frac{241}{36}}$

$-X) = \frac{241}{36} - \frac{91}{36} = \frac{150}{36} = \boxed{\frac{25}{6}}$

אחיד

③ עדי ושי קובעים בבית קפה 5 ימים מגיעים בין 2 ל-3

$\longleftarrow \quad -\frac{1}{3} < y-x < \frac{1}{3}$

$x \sim U[2,3]$

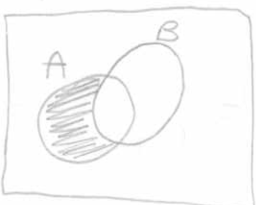
$y \sim U[2,3]$

שרפרס ← $1 = $ נטפ

$\frac{5^5}{9^5} + \frac{5^5}{9^5}4 = \boxed{\frac{5^6}{9^5}}$ $\Leftarrow$

④ 10% מהמכשירים פגומים A = פגום לפי הבדיקה B-

אם הבדיקה מראה כי פגום מה ההסתברות שב



$\frac{(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{0.9}$

$\frac{36}{100} + P(A|B)P(B) = \frac{36}{100} + \frac{8}{10}\frac{1}{10} = \frac{44}{100}$

$= \frac{4}{22} = \boxed{\frac{2}{11}}$

⑤ מטילים מטבע עם פרמטר הצלחה $\alpha \in (0,1)$ פונ' ה

הפונקציה $(P*P)(k)$ קונבולוציה בדידה של $p(k)$ עם

$\Leftarrow$ $P_K(k)$ מייצג את ההסתברות שהצלחה הר

שיצאה עד החלפ משתנים $P*P$ מ"ז

פונ' ההסתברות המתנה היא הפונקצ

הצלחה $\Leftarrow$ כלומר, סופרת את מס'

הזכני אותי כך שלו

נקח 2 כאלו ובאמצע

$\Leftarrow$ מס' כשלונות

$f_{Y,U}(y,u) = ce^{ay^2+bu^2}$

$f_{Y|U}(y|u) = ce^{-\frac{1}{2}(}$

$\mu_u = Eu = E($

$\sigma_u^2 = \sigma_{x+z}^2 =$

$\sigma_{y,u} = \sigma_y \sigma_{x}$

$\Rightarrow A = \Sigma_{y,u}^{-1}$

$\Rightarrow \begin{cases} -2c = 2 \\ -2a = 2 \\ -2b = 1 \end{cases}$

$=$

$f_{R,\theta}(r,\theta) = 2e$

$\Rightarrow f_R(r) = \int_R^\infty 2e^{-R}$

$\rightarrow ER = \int_0^\infty R$

$\lambda = 2$, Geom(λ)

$= var(E(S_{n+m}|S_n))$

$E(S_{n+m}|S_n) =$

$= E(S_n|S_n$

$\rightarrow var(S_n+$

$? \ \frac{1}{X}$

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) d$

$E\frac{1}{X} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f_X(x)$

$E X\cdot\frac{1}{X} = E1 = \boxed{1}$

$\Longrightarrow$

$cov(X, \frac{1}{X}) =$

מקבל ערכים רק ב-I

$E\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{}{E(}$

$\rightarrow 1-$

(6) וקטור גאוסי מטריצת קווריאנס $\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ וקטור $\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

מצאו את a,b,c,d,e?

מועד ג 2004

$_z + \sigma_z^2 = 3 - 2\cdot1 + 1 = 2$ $\Big\}$ $\Sigma_{yu} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ σ_y^2

-1

נגזור את f_{yu} ונשווה לאפס המקסימום בתוחלת $\mu_u=5$ $\mu_y=-1$

$\frac{\partial}{\partial y} \to -4ay - 2cu - 2d = 0 \to \boxed{d=3}$

$\frac{\partial}{\partial u} \to -4bu - 2cy - 2e = 0 \to \boxed{e=4}$

(7) X, Y מ"מ ב"ת $\sim Exp(1)$ תוחלת היקף מעגל מקסימלי ה

מצאו כיוון רדיוס מעגל מקסימלי, היקפו של מעגל

$R=\min\{x,y\}$

$Q=\max\{x,y\}$

נגדיר $\begin{cases}X\sim Exp(1)\\Y\sim Exp(1)\end{cases}$

$\pi R) = 2\pi ER = \cancel{2}\pi \frac{1}{\cancel{2}} = \boxed{\pi}$

(8) תהי $\{X_i\}_{i\ge1}$ סדרת i.i.d $EX_1=\mu$, $\sigma^2=\mathrm{var}X$

$+\dots+X_{n+m}|S_n) = E(S_n+X_{n+1}+\dots+X_{n+m}|S_n) =$

$S_n + E(X_{n+1}+\dots+X_{n+m}) = \boxed{S_n+m\mu}$

$.2$

(9) X מ"מ בעל צפיפות $f_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{x^6}&x>1\\0&x<1\end{cases}$ מהו הקווריאנס

9.1

$^{-4}\Big|_1^\infty = \boxed{\frac54}$

$=\frac1x = 1 - \frac56\cdot\frac54 = 1-\frac{25}{24} = \boxed{-\frac{1}{24}}$

9.2 X מ"מ עבורו $F_X(0)=0$ X מקבל ערכים חיוביים

$x) = \frac1x$ - e אין צורך להוכיח

אי השוויון של ינסן קובע כי אם $h(x)$ פונ' קמורה

) גורר $P(X\in I)=1$ עי :

במקרה זה $h(x)=\frac1x$ פונ' קמורה על $I=(0,\infty)$

$EXE\frac1X \ge \frac{EX}{EX} \to -EXE\frac1X \le -1$

$\mathrm{ov}(X,\frac1x) \le 0$

$u\in(0,1]$

מועד ג 200

$\Psi_X(u) = EU$

ים של g ו-h למשל

כאן $W=u^Y$, $Z=u^X$

Ψ_X

א מתפלג למשל -

גים כמו X.

$\Psi_X(u)$

תאים אליהם התפלג (...)

$\Psi_Y(u) = Eu$

$(\Psi$

10. תזכורת: מ"ה X המקבל ערכים אי

1. אם $X \sim Pois(\lambda)$ חשבי $(u) = ?$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda u)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda u} = \boxed{e^{-\lambda(1-u)}}$$

2. הוכיחי שאם X ו-Y מ"מ ב"ת המקב

$$\boxed{(u)\, \Psi_Y(u)}$$

נשתמש בעובדות:

1. X, Y ב"ת אז $g(x)$, $h(Y)$
h, g רציפות למקוטעין כאן $) = u^t$

2. אם Z ו-W ב"ת אז $= EZEW$

$$u^Y \underset{\text{ב"ת}}{=} Eu^X\, Eu^Y = \Psi_X(u)\Psi_Y(u)$$

3. תאי במעבדה מתפצל למספר אקראי $\underline{X}$
תאים כך שמספרם הכולל $\underline{Y}$ (מס' ו
בעזרת משפט ההחלקה מצאי ביטוי

אם יודעים כי $X = n$ אז $+ \dots + Y_n$
מס' i של הדור הראשון.

$Y_1 \dots Y_n$ ב"ת ומפולגים כ

$_X(u)^n$ לכן -

$$(u)^X = \underline{\underline{\Psi_X(\Psi_X(u))}}$$

$$\boxed{\Psi_X(u))} //$$

בְּ

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{1} \int_{z=y}^{1} 12x^2$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 12x$$

$$= 1\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - 3$$

$f_X(x) = 1 \quad 0 \le x$

$$f_Y(y) = \int_y^1 \frac{2y}{x^2}$$

$P(Y > 0.3) =$

$2 - 1 - 0.6 -$

הסשה נ' בבדיקת השנייה.

$P(\quad ת3 ; \quad 0$

$\Rightarrow P(\quad ת3$

$P($ נוצא בבדיקה השנייה $|$

$\Phi_{Z_n}(1) = ? \quad Z_n = X_1 + \sqrt{2}X_2$

$\varphi_{Z_n} = \varphi_{X_1}(1) \cdot \varphi$

$(t = 1$ עבור$) \quad e^{-\frac{t^2}{2}} e$

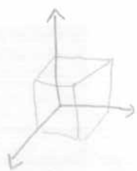
$$\varphi(N(0,4)) = \int_{-\infty}^{\infty}$$

$(t = 2$ עבור$) \quad e^{-2t}$

מבחן הסתברות

(1) $f_{X,Y,Z}(x,y,z)=\begin{cases}12x^2yz & 0<x,y,z<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ מהי $Y<Z)$

זהו ריבוע היחידה. $y\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_y^1 dy\,dx$



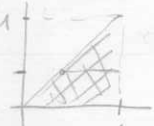
$\frac{x^2y^2}{2}-\frac{6x^2y^4}{4}\Big)\Big|_x^1 dx=\int_0^1\left(3x^2-\frac{6x^2}{4}-3x^4+\frac{6}{4}x^6\right)dx$

$+\frac{3}{2\cdot 7}=\frac{35-14\cdot 3+15}{70}=\frac{8}{70}=\boxed{\frac{4}{35}}$

(2) $X\sim[0,1]$ מ"מ $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{2y}{x^2} & 0<y<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$(y|x)\cdot f_x(x)=\begin{cases}\frac{2y}{x^2} & 0<y<x<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

$=2y \quad 0<y<x<1$



$=$

(3) 2 כדורסלנים התחרו, מי שהתחיל, הסתברות לקלוע $\frac{1}{2}$ בכ"א.

$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\boxed{\frac{2}{3}}$

$)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{16}}$

(4) X_i מפולגים נורמלית $N(0,4)$ לכל $i\in\mathbb{N}$ את $\phi_{Z_n}(t)$

$\phi_X(t)=e^{-t^2/2}\Longleftarrow X\sim N(0,1)$

$^2\sum_1^n k=e^{-\frac{1}{2}\frac{(1+n)n}{2}}\Rightarrow \phi(1)=e^{-\frac{1}{4}(n+1)n}$

$t)^2$

$\Lambda_x\, e^{-2t^2}$

$e^{-2t^2\sum_1^n k}=e^{-t^2(1+n)n}\Rightarrow \phi(1)=e^{-(1+n)n}$

חורף ב'

$P(T>$

$P(n)=e$

$f_T(T)=$

$P(T$

$P(T>$

ב'. המינימום X ו-Y_0

$y=x$

$y^{(B)}$

EX

EY

EXY

$\int x,y$

$\boxed{3.4}=3\frac{2}{5}$

ת הגב = סכום העשׂ

$EX_1=$

$P(S_n<4$

?זו

$F_Y(y)=e$

$f_X(x)=1$

$\int_{-\infty}^{\infty}f_x(x)f_y$

$\int_0^1 e$

(5) מכונה בחני- צלום מדפיסה תמונה בדקה, צריכה להדפיס N תמונות N י
המכונה תתקלקל כעבור T דקות מתחילת עבודתה $T\sim Exp(\ln\beta)$
מה ההסתברות שהמכונה תצליח להדפיס את 6 התמונות לפני ש
$\ldots) = \sum_n P(T>N|N)P(N)$

$\cancel{\ln\beta}\dfrac{e^{-\ln\beta t}}{\cancel{-\ln\beta}}\Big|_N^\infty = e^{-(\ln\beta)N}$

$\dfrac{\beta(\overbrace{e^{-\ln\beta}}^{=1})^n}{n!} = e^{-\beta}\cdot e^{1} = \boxed{e^{1-\beta}}$

(6) לפרבולה האקראית $x^2-2Bx+1$ $B\sim U[0,1]$ נק' מינימום (y_0)

$\beta \to y'=0 \to \underline{x=\beta}$, $y''=2 \Rightarrow$ מינימום

$\boxed{\frac{1}{12}}$ $\qquad Ey^2=E(1-2\beta^2+\beta^4)=1-2\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$

$=\frac{2}{3}$ $\qquad \sigma_y=\sigma_{1-\beta^2}=\sqrt{Ey^2-Ey^2}=\sqrt{\frac{8}{15}-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{24-20}{45}}=\sqrt{\frac{4}{45}}=\frac{2}{3\sqrt5}$

$\int_0 \beta^3\,d\beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}{\frac{2}{\cancel{2}\cdot3\sqrt{15}}}=\dfrac{-\frac{1}{12}}{\frac{\cancel{1}}{3\sqrt{15}}}=\boxed{-\frac{\sqrt{15}}{4}}$

(7) מקופסא המכילה 5 כדורים ממוספרים 1,2,3,4,5 מוציאים כדור צובעי
מוציאים באקראי כדור מהי תוחלת מס' הכדורים כולל את הצבועים

$\underline{25}$

$\frac{17}{5}=\frac{1}{5}+\frac{16}{5}=\frac{1}{5}\cdot1+\frac{4}{5}\cdot4 \leftarrow$
$\frac{13}{5}=\frac{4+9}{5}=\frac{2}{5}\cdot2+\frac{3}{5}\cdot3 \leftarrow$
$\frac{13}{5}=\frac{9+4}{5}=\frac{3}{5}\cdot3+\frac{2}{5}\cdot2 \leftarrow$
$\frac{17}{5}=\frac{16+1}{5}=\frac{4}{5}4+\frac{1}{5}\cdot1 \leftarrow$
$5 \leftarrow$

(8) כלי מכיל גז המורכב ממס' n חלקיקים שלו אנ"ך
מהי בערך ההסתברות שהאנ' הקינטית של הגז לא תעלה

$+\frac{16}{2}+\frac{100}{6}=8\frac{1}{3}+16\frac{2}{3}=25 \qquad \sigma^2=25-16=9$

$\ldots)=P(\underset{N(0,1)}{Z}<-\frac{4}{3})=\Phi(-\frac{4}{3})=1-\Phi(1\frac{1}{3})=1-0.908=\boxed{0.092}$

(9) $X\sim U[0,1]$, $Y\sim Exp(1)$ ב"ת, ל-$\underline{Z=X+Y}$ צפיפות $f_Z(z)$
הבדלי בין תחומים שונים של Z בחישוב $f_z(z)$ על

$\underline{e^{-z}}$ $\quad \underline{x>1}$ $\quad \underline{y>0}$, $\underline{f_z(z)=0}$ $\quad$ ובאו: $x<0$ $y<0$ / $x>1$

כאשר $0\le x<1$ ו- $y>0$ יש קונבולוציה של הצפיפויות -

$(e-1)$

מבחן הסתברות

① במשולש A 2 צלעות אדומות ולבנה, ב-B 2 לבנות ואדומה. בוחרים משולש ופעמיים צלע בה"ח ב-2 הבחירות נבחרו צלעות אדומות. ההסתברות שגם בבחירה שלישית של צלע מאותו משולש תבחר צלע אדומה היא? ←

Ⓑ לבן לבן אדום

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{18}\Rightarrow 1\to\frac{1}{5}$

Ⓐ לבן אדום אדום

$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{9}\to 4\to\frac{4}{5}$

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{15}+\frac{1}{15}=\frac{9}{15}=\boxed{\frac{3}{5}}$$

② ב ① מתברר שנבחרו 2 צלעות אדומות מה ההסתברות שנבחר A – $\boxed{\frac{4}{5}}$

③ יהי X התפלגות גאוסית תקנית $X\sim N(0,1)$ את התוחלת המותנית $E(X|X>0)$ היא:

נחשב פונ' צפיפות מותנית – $P(X>0)=\frac{1}{2}$

$$f_{X|\{X>0\}}(x)=\frac{f_X(x)}{P(X>0)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$ עבור $X>0$

$$E(X|X>0)=\int_0^\infty x f_{X|\{x>0\}}(x)dx=\int_0^\infty x\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^\infty=\boxed{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}$$

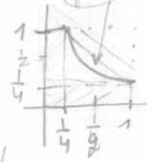
④ בוחרים באופן מקרי 2 צלעות סמוכות של ריבוע. אחר כך באופן ב"ת ובהתפלגות אחידה נקודה על כל אחת מהצלעות שנבחרו. 2 הנקודות יוצרות עם הקודקוד משולש – ההסתברות ששטחו קטן מ-$\frac{1}{8}$ שטח הריבוע הוא:

מטעמי סימטריה אין חשיבות לבחירת הצלעות – נניח צלע 1 שטח 1 (סמן ב-X ו-Y מרחק מהקודקוד, ב"ת התפלגות אחידה ⇐ (X,Y) ו"ו מתפלג אחיד בריבוע $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ השטח המבוקש הוא $S=\frac{XY}{2}$

שטח הנקודה $XY<\frac{1}{4}$ מתוך ריבוע היחידה $y=\frac{1}{4x}$

$S<\frac{1}{8}=\frac{XY}{2}<\frac{1}{8}=XY<\frac{1}{4}\longrightarrow$ צפיפות משותפת מכפלת 1×1

$Y<\frac{1}{4x}$



$$\iint_A dxdy=\int_0^{1/4}\int_0^1 1\,dy\,dx+\int_{1/4}^1\int_0^{\frac{1}{4x}}dy\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{4}}1\,dx+\int_{\frac{1}{4}}^1\frac{1}{4x}dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}(\ln x)\Big|_{\frac{1}{4}}^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4}\ldots=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4=\boxed{\frac{1}{4}(1+\ln 4)}$$

⑤ (X,Y) ו"ו מתפלג באחיד במשולש $T\{(x,y):0\le x\le 3;\ 0\le y\le 1-\frac{x}{3}\}$ $P(X<Y)=?$

שטח המשולש $\frac{3}{2}$ המאורע $\{X<Y\}$

$1-\frac{x}{3}=x\to 1=\frac{4x}{3}\to x=\frac{3}{4}\to(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$

שטח המשולש הקטן $\frac{1\cdot\frac{3}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ ⇐ ההסתברות לכן היא $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\boxed{\frac{1}{4}}$

⑥ X,Y מ-5 הרגרסור האופטימלי $\hat{X}^2$ של X^2 בה' Y הוא...?

$f_{X,Y}(x,y)=\frac{2}{3}$ ב-D פונ' צפיפות y: $3y\le 3-x$, $3-3y\ge x$

$$f_Y(y)=\int_0^{3-3y}\frac{2}{3}dx=2-2y$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{2}{3}}{2-2y}=\boxed{\frac{1}{3-3y}}\to$$ (x,y) במשולש T

$$\hat{X}^2=E(X^2|Y)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_{X|Y}(x|y)dx=\int_0^{3-3y}x^2\frac{1}{3-3y}dx=\frac{(3-3y)^3}{3(3-3y)}=\frac{3^3(1-y)^3}{3^2(1-y)}=$$

תשו' – תוחלת מותנית

תשו' של $\hat{X}^2$ הוא מבוסס בהתאם Y להיות $X^2|Y$ תוחלת-אינטגרל של X.

$X^2|Y\Leftarrow Y$ בה' X^2

(7) X מ"מ פונ' התפלג F_X רציפה ועולה ממש. תוחלת מ"מ

משפט: F_Y מ"מ Y עם פונקצית התפלג F_Y רציפה ועולה ממש

הוכחה - אם $0 \le y \le 1$ אז : $(y) = F_Y(F_Y^{-1}(y)) = y$

$\Leftarrow F_X(X)$ מתפלג אחיד בקטע $[0,1] \Leftarrow Z$ מתפלג אחיד דקטע

(8) X, Y מ"מ ב"ת פונ' יוצרת מומנטים שלהם ב- (a,b) הן

פונ' יוצרת מומנטים של המשתנה $Z = 2X - Y + $ בקטע $b)$

$e^{2sX}e^{-sY}e^{-s} = e^{-s}Ee^{2sX}Ee^{-sY}$

$s\frac{1}{1-2s}\frac{e^{-s}}{2-e^{-s}} = \boxed{\frac{e^{-2s}}{(1-2s)(2-e^{-s})}}$

(9) n רכיבים זהים מחוברים במקביל, קלקול ב"ת, משך זמן ח'
אם המערכת מתקלקלת לפני t_0 מחליפים מקולקלים ומפעילים. ב
אם מתקלקלת אחרי t_0 מחליפים מקולקלים ומפעילים מיידית.

T = זמן מקרי מתחילת פעולה ועד חידוש פעולה אחרי ה

X_i זמן קלקול ראשון רכיב i, M זמן עד לפעם הראשונה ש

$) = \int_0^t e^{-x}dt = e^{-x}\Big|_t^0 = 1-e^{-t}$ $\quad t>0$

$-e^{t})$

$) = P(T \le t) = \begin{cases} 0 & \text{אם } t \le t_0 \\ P(M \le t) & \text{אם } t \ge t_0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{אם } t < t_0 \\ (1-e^{-t})^n & \text{אם } t \ge t_0 \end{cases}$

(10) (9) רק מחוברים בטור

N הזמן עד לפעם הראשונה שהמערכת הפסיקה לפעול $X_i \Leftarrow$ ח'

$\prod_{i \le n} P(X_i > t) = 1 - e^{-nt}$ $\qquad \int_t^\infty e^{-t}dt = e^{-t}\Big|_\infty^t = e^{-t}$

$) = P(T \le t) = \begin{cases} 0 & \text{אם } t \le t_0 \\ P(N \le t) & \text{אם } t \ge t_0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{אם } t < t_0 \\ 1-e^{-nt} & \text{אם } t \ge t_0 \end{cases}$

(11) נניח (X, Y) מתפלג אחיד ברבע העיגול $0 \le x^2+y^2 \le 1$, $y>0$, רבע

$f_{U,V}(u,v) = ?$ $(f_T(u,v) = 0$ מחוץ לתחום המצוין$)$

≤ 1 $\Big\}$ $J_{h^{-1}}(u,v) = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u$

$\le \frac{\pi}{2}$

פונ' צפיפות משותפת (X, Y) קבועה $\frac{4}{\pi}$ ברבע העיגול $\Leftarrow$ במלבן $0-1$

$f_{U,V}(u,v) = J f_{X,Y}(s(u,v))$

(12) $\binom{X}{Y}$ וקטור גאוס' עם מטריצת קווריאנס $\Sigma_{X,Y} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$f_{X,Y}(x,y) = Ce^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T A \vec{x}}$, $C > 0$ קבוע

צפיפות משותפת X, Y
המטריצה A היא:

A היא ההופכית $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\det}$

$=1$

$v) = ?$ $V = X - 2Y$ $U = 2X - Y$ (12) - כמו ב X, Y (13)

$s(X,Y) - cov(Y,X) + 2cov(Y,Y) = 2\cdot 5 - 5/2 + 2\cdot 1 = \boxed{2}$

דרך אחרת

$= \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \ (U,V) = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

(14) ... X_1, X_2 משתנים ב"ת ושווי התפלגות $EX_1 = 2$, $X_1 = 9$

חשב את $P(197 < S < 206)$ בקירוב

$\cong P(-0.1 < Z < 0.2) = \Phi(0.2) - \Phi(-0.1) = \Phi(0.2) + \Phi(0.1) - 1$

(1) (X,Y) וקטור מקרי $E(Y|X) = 1$ (א) צ"ל: X

נשתמש בתכונות: 1. לכל f עבורה הביטוים מוגדרים - $(X|X)$

2. נוסחת ההחלקה $E(E(W|X)) = EW$

$)) = E(X \underbrace{E(Y|X)}_{=1}) = EX$

(ב) צ"ל $E(XY)^2 \geq EX^2$

ידוע $E(Y^2|X) \geq (E(Y|X))^2 = 1$ - ינסן

$) = E(X^2 E(Y^2|X)) \geq EX^2$

(2) נסחו והוכיחו את חוק המספרים הגדולים

טענה: יהיו $X_1 X_2 \ldots$ משתנים ב"ת כך

נסמן $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ אז לכל $\delta > 0$ מתקיים

$-\mu| > \delta) = 0$

הוכחה הנוספת: א' שוויון צ'בישב אומר שלכל W מ"מ

מתקיים: $> \delta) < \frac{var(W)}{\delta^2}$

נשתמש באי השוויון עם $W = \frac{S_n}{n}$ ו μ כי הוכחנו $\mu =$

$= E\sum X_i = n\mu \to E\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}ES_n = \cancel{\frac{n\mu}{n}} = \mu$

$| > \delta) < \frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{n\delta^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$