פתרון לתרגיל 1.3

א. מרחב הסתברות מתאים הוא תוצאות זריקת הקובייה כאשר כל תוצאה מספר שונה של פעמים, כמספר התוצאה. כלומר: $\Omega=\{1,2a,2b,3a,3b,3c,4a,4b,4c,4d,5a,5b,5c,5d,5e,6a,6b,6c,6d,6e,6f\}$.
מרחב זה סימטרי בגלל האופן שבו בנינו אותו, למרות שהבעיה המקורית לא סימטרית. כל יוצא שההסתברות לקבל את התוצאה 1 היא $P(1)=\frac{1}{21}$, לקבל 2 היא $P(2)=\frac{2}{21}$ וכו'.

ב. המספרים הראשוניים הרלוונטיים הם $2,3,5$. נביט במרחב Ω שהגדרנו קודם ובתת המרחב הרלוונטי $A=\{2a,2b,3a,3b,3c,5a,5b,5c,5d,5e\}$, ונקבל $P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10}{21}$.

פתרון לתרגיל 1.12

כבר ראינו בתרגילי קובייה קודמים, שיש לנו 36 תוצאות אפשריות לזריקת שתי קוביות הוגנות: $\Omega=\{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$.

א. אם המספר המכסימלי הוא 1 או 2 או 3, כלומר $M\le 3$, נחפש את ההסתברות לתוצאות האלו:
$$A=\left\{\begin{matrix}(1,1),\\(1,2),(2,2),(2,1),\\(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\end{matrix}\right\}$$
, ולכן $P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

ב. אם המספר המכסימלי הוא 1 או 2, כלומר $M<3$, נחפש את ההסתברות לתוצאות האלו:
$A=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$, ולכן $P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

ג. אם המספר המכסימלי הוא 5 או 6, כלומר $M\ge 5$, נחפש את ההסתברות לתוצאות האלו:
$$A=\left\{\begin{matrix}(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),\\(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\end{matrix}\right\}$$
, ולכן
$$P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$$

ד. אם המספר המכסימלי הוא 3 או 4, כלומר $2<M<5$, נחפש את ההסתברות לתוצאות האלו:
$$A=\left\{\begin{matrix}(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2),\\(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,3),(4,2),(4,1)\end{matrix}\right\}$$
, ולכן $P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

ה. אם המספר המכסימלי הוא 2 או 3, כלומר $2\le M<4$, נחפש את ההסתברות לתוצאות האלו:
$$A=\left\{\begin{matrix}(1,2),(2,1),(2,2)\\(1,3),(2,3),(3,3),(3,1),(3,2)\end{matrix}\right\}$$
, ולכן $P=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

פתרון לתרגיל 1.13

א. לכל מטבע שני צדדים: הצלחה – צד מסוים של המטבע. כשלון – הצד השני. אם לה הייתה אף הצלחה, אז בחמשת הניסיונות קיבלנו את צד הכישלון. המאורעות המשלימים הם כל אלו שלא נכשלים בהם 5 פעמים, כלומר כל המאורעות שיש פעם לפחות הצלחה אחת. מספר המאורעות השונים הם $|\Omega|=2^5$, כי אנו מטילים 5 פעמים כאשר כל פעם יש שתי תוצאות אפשריות. ההסתברות שלא הייתה אף הצלחה היא הסתברות למאורע יחיד מתוך כל ה 2^5, ולכן המשלים שלו הוא $P=1-\frac{1}{|\Omega|}=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$.

ב. המשלים של "לפחות ארבע הצלחות" (כלומר 4 הצלחות או 5 הצלחות) הוא "לכל היותר 3 הצלחות" (כלומר 0 הצלחות או הצלחה אחת או 2 הצלחות או 3 הצלחות).
את ההסתברות שיהיו 5 הצלחות כבר ראינו (עד כדי כשלון) והיא $P_5=\frac{1}{32}$, כי יש צרוף אחד שייתן 5 הצלחות.
ההסתברות שיהיו 4 הצלחות קשורה בגודל של הקבוצה $A=\{01111,10111,11011,11101,11110\}$, כאשר

0 מסמן כשלון ו 1 מסמן הצלחה. כל ספרה היא הטלת מטבע. לכן ההסתברות היא $P_4=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{5}{32}$.

ולסיכום, $P=1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}\right)=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}$, כי המאורעות שסימנו זרים.

פתרון לתרגיל 1.14

ראשית נחשב את מספר הסידורים האפשריים – וזהו גודל מרחב ההסתברות שלנו. עבור n זוגות, יש לנו $2n$ אנשים שצריך לסדר בזוגות, ללא חשיבות לסדר, ולכן נקבל

$$|\Omega|=\frac{\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2}\binom{2n-4}{2}\cdots\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{n!}=\frac{1}{n!}\frac{(2n)!}{2!(2n-2)!}\frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!}\cdots\frac{4!}{2!2!}\frac{2!}{2!0!}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}$$

א. אם כל הזוגות המקוריים רוקדים יחד, אז סידרנו אותם בסידור אחד מסוים, ולכן $P=\frac{1}{|\Omega|}=\frac{2^n\cdot n!}{(2n)!}$

ב. כדי לקבל זוגות שמכילים בחור ובחורה, נוכל להעמיד את n הנשים בשורה ומולן לסדר את n הגברים, ולשם כך יש $n!$ סידורים שונים, ולכן $P=\frac{n!}{|\Omega|}=\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n)!}$.

פתרון לתרגיל 1.18

א. נבחר מרחב מדגם הכולל תת-קבוצה לכל 8 תוצאות של זריקות, כאילו זרקנו בבת-אחת 8 קוביות. כלומר $\Omega=\{(11111111),(11111112),....,(66666665),(66666666)\}$

ב. 5 איברים השייכים ל A_2 : $\{13111111,14111111,15111111,16111111,23111111,\}$

5 איברים השייכים ל S_{45} : $\{66666666,66665666,66666566,66666656,66666665,\}$

ג. נניח בשלילה שלא צריך תוצאה 3 ומעלה בשום קובייה כדי לקבל סכום גבוה מ 16. נביט אם כן בסכום הגדול ביותר שיכול להתקבל: זה יקרה כאשר כל הקוביות יראו תוצאה 2, כלומר $S=2\cdot 8=16$, בשלילה להנחה. לכן, חייבים תוצאה של 3 ומעלה לפחות בקובייה אחת כדי לקבל סכום גדול מ 16, ולכן מש"ל $S_{16}\subset\bigcup_i A_i$.

פתרון לתרגיל 2.7

ההסתברות שהקבל תקין:

$$P(C)=P(C\cap\Omega)=P\left(C\cap\left(R\cup R^c\right)\right)=P(C\mid R)P(R)+P\left(C\mid R^c\right)P\left(R^c\right)$$

ובמקרה שלנו $P(C\mid R)=P\left(C\mid R^c\right)$ ולכן

$$P(C)=P(C\mid R)\left(P(R)+P\left(R^c\right)\right)=P(C\mid R)P(\Omega)=P(C\mid R)=0.95$$

ההסתברות שהקבל וגם הנגד תקינים:

$$P(C\cap R)=P(C\mid R)P(R)=0.95\cdot 0.9=0.855$$

ההסתברות שהנגד תקין בהינתן שהקבל תקין:

$$P(R\mid C)=P(C\mid R)\frac{P(R)}{P(C)}=0.95\frac{0.9}{0.95}=0.9$$

ההסתברות שהנגד מקולקל בהינתן שהקבל מקולקל:

$$P\left(R^c\mid C^c\right)=1-P\left(R\mid C^c\right)=1-P\left(C^c\mid R\right)\frac{P(R)}{P\left(C^c\right)}=1-\left(1-P(C\mid R)\right)\frac{P(R)}{1-P(C)}$$

$$=1-(1-0.95)\frac{0.9}{1-0.95}=0.1$$

פתרון לתרגיל 2.15

נגדיר את מרחב המדגם הכולל את ארבע הפאות של הפירמידה:

$$\Omega=\{R,G,B,RGB\}$$

ולכן

$$E=\{R,RGB\},\quad F=\{B,RGB\},\quad G=\{G,RGB\}$$

וההסתברויות

$$P(E)=\frac{1}{2},\qquad P(F)=\frac{1}{2},\qquad P(G)=\frac{1}{2},\qquad P(E\cap F\cap G)=\frac{1}{4}$$

ולכן

$$P(E\cap F\cap G)=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(E)P(F)P(G)$$

ולכן המאורעות E,F,G תלויים.
אבל

$$P(E\cap F)=\frac{1}{4}=P(E)P(F)$$

$$P(F\cap G)=\frac{1}{4}=P(F)P(G)$$

$$P(E\cap G)=\frac{1}{4}=P(E)P(G)$$

ולכן המאורעות E,F,G בלתי תלויים בזוגות.

פתרון לתרגיל 2.18

סעיף א

יש לנרמל את פונקצית ההסתברות כך ש

$$\sum_{k=0}^{5}C(k+1)^2=1$$

כלומר

$$C\left(1^2+2^2+3^3+4^2+5^2+6^2\right)=1$$

$$\Rightarrow\quad C=\frac{1}{91}$$

סעיף ב

נסמן:

$A=$ ליאת ניצחה

$B_k=$ התווספו k שחקנים

ולכן נקבל, מנוסחת ההסתברות השלמה

$$P(A)=P(A\cap\Omega)=\sum_{n=0}^{5}P(A\mid B_n)B_n=\sum_{n=0}^{5}\frac{1}{n+1}\frac{1}{91}(n+1)^2=\frac{1}{91}\sum_{n=0}^{5}(n+1)=\frac{3}{13}$$

סעיף ג

הנרמול הפעם:

$$\sum_{k=0}^{n}C(k+1)^2=1\ \Rightarrow\ C=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1}k^2}=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n+1}k^2}=\frac{6}{(n+1)(n+2)(2n+3)}$$

ואז,

$$P(A)=P(A\cap\Omega)=\sum_{k=0}^{n}P(A\mid B_k)B_k=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}Ck(n+1)^2=C\sum_{k=0}^{n}(k+1)$$

$$=C\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{6}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{3}{(2n+3)}$$

ואכן עבור $n=5$, נקבל $P(A)=\frac{3}{13}$.

פתרון לתרגיל 2.21

נסמן:

$A_k=$ נשלף כדור לבן מכד k

עבור $n=1$ השאלה היא פשוט מה ההסתברות לשלוף כדור לבן מהכד, ולכן

$$P(A_1)=\frac{w}{w+b}$$

עבור $n=2$ השאלה היא מה ההסתברות לשלוף כדור לבן מהכד השני, בהינתן שכדור אחד נשלף מהראשון ועבר לתוך השני. מתוך נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(A_1^c)P(A_2\mid A_1^c)=P(A_1)\frac{w+1}{w+b+1}+P(A_1^c)\frac{w}{w+b+1}$$

$$=\frac{w}{w+b}\frac{w+1}{w+b+1}+\frac{b}{w+b}\frac{w}{w+b+1}=\frac{w}{w+b}\left(\frac{w+1}{w+b+1}+\frac{b}{w+b+1}\right)=\frac{w}{w+b}$$

עבור $n=3$ השאלה היא מה ההסתברות לשלוף כדור לבן מהכד השלישי, בהינתן שכדור אחד נשלף מהשני ועבר לתוך השלישי. מכיוון ש $P(A_2)=P(A_1)$, והכד השלישי זהה לכד השני, לפני שהוספנו אליו כדור, נקבל חישוב ותוצאה זהים למקרה $n=2$. לכן, נסיק באינדוקציה ש $P(A_n)=\frac{w}{w+b}$, לכל n.

פתרון לתרגיל 2.23

נסמן:

$A_k=$ קטע k ניצח

$B_k=$ קטע k ניצח פעמיים ברציפות

מכיוון שכל קטע קטן בחצי מקודמו, $P(A_k)\propto\frac{1}{2^k}$, כלומר $P(A_k)=\frac{c}{2^k}$. נחשב את קבוע הנרמול:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{2^k}=c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1\ \Rightarrow\ c=1$$

כלומר

$$P(A_k)=\frac{1}{2^k}$$

כעת, המאורעות A_k בלתי תלויים, ולכן ההסתברות שקטע מסוים יבחר פעמיים

$$P(B_k)=P(A_k)P(A_k)=\frac{1}{2^{2k}}$$

ההסתברות שאיזשהו קטע ניצח פעמיים (נקרא למאורע זה C) היא

$$P(C)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

ולכן

$$P(B_k\mid C)=\frac{P(B_k\cap C)}{P(C)}=\frac{P(B_k)}{\frac{1}{3}}=3P(B_k)$$

מכיוון ש

$$B_k\subset C$$

פתרון לתרגיל 3.4

ראשית, נבדוק מה הערכים ש X יכול לקבל:

$$X=1,2,3,4,6,8,9,12,16$$

ולכן פונקצית ההסתברות היא

$$p_X(k)=\begin{cases}\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{16}, & k=1\\ \frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}, & k=2\\ \frac{1}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}, & k=3\\ 3\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{3}{16}, & k=4\\ 2\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}, & k=6\\ 2\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}, & k=8\\ \frac{1}{16}, & k=9\\ 2\cdot\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{8}, & k=12\\ \frac{1}{16}, & k=16\\ 0, & else\end{cases}$$

וזו התפלגות האפשרויות.

נוודא שאכן מתקיים

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_X(n)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1$$

פתרון לתרגיל 3.8

נגדיר משתנה חדש:

X = מספר הנורות הפועלות יותר מ 10 שעות

ולכן פונקצית ההסתברות המתאימה היא

$$P_X(k)=\binom{4}{k}p^k(1-p)^{4-k}$$

כאשר $p=0.4$.

<u>סעיף א</u>

המערכת לא תכשל (מאורע S) כאשר לכל הפחות 2 נורות לא פועלות, כלומר

$$P(S)=1-\left(P_X(1)+P_X(0)\right)=1-\binom{4}{1}p^1(1-p)^3-\binom{4}{0}p^0(1-p)^4=1-\frac{4!}{1!3!}0.4\cdot 0.6^3-0.6^4=0.5248$$

<u>סעיף ב</u>

מחפשים את ההסתברות :

$$P\left(S\mid P_X(X\geq 1)\right)=\frac{P\left(S\cap P_X(X\geq 1)\right)}{P_X(X\geq 1)}=\frac{P(S)}{1-P_X(0)}=\frac{0.5248}{1-(0.6)^4}\approx 0.603$$

פתרון לתרגיל 3.11

<u>סעיף א</u>

ההסתברות שיבחר המפתח הנכון היא $p=\frac{1}{n}$. מדובר כאן בסדרת ניסויי ברנולי עם פרמטר p . אם X הוא המשתנה עבור מספר הניסיון שהצליח להביא לפתיחת הדלת, אזי $X\sim Geom(p)$, ולכן

$$P_X(k)=(1-p)^{k-1}p=\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{k-1}\tfrac{1}{n}=\left(\tfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\tfrac{1}{n}$$

<u>סעיף ב</u>

יש לסכום את ההסתברויות להצלחה בניסיון ראשון עד חמישי, כולל :

$$P_X(n\leq k)=\sum_{n=1}^{k}P_X(n)=\sum_{n=1}^{k}(1-p)^{n-1}p$$

<u>סעיף ג</u>

הצלחה בניסיון 1 :

$$p_X(1)=\frac{1}{n}$$

הצלחה בניסיון 2 :

$$p_X(2)=\frac{n-1}{n}\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$$

הצלחה בניסיון 3 :

$$p_X(3)=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{1}{n-2}=\frac{1}{n}$$

ובאופן כללי, כדי להצליח בניסיון מספר k , יש להיכשל $k-1$ פעמים, כלומר יש לבחור את המפתח הלא נכון $k-1$ פעמים, ולכן :

$$P_X(k)=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{n-(k-1)}{n-(k-2)}\underbrace{\frac{1}{n-(k-1)}}_{success}=\frac{1}{n}$$

פתרון לתרגיל 3.19

<u>סעיף א</u>

ההסתברות שיפלט אלקטרון אחד בדיוק היא

$$P_X(1)=e^{-3}\frac{3^1}{1!}=\frac{3}{e^3}\approx 0.149$$

ההסתברות שיפלט אלקטרון אחד לכל היותר היא

$$P_X(0)+P_X(1)=e^{-3}\frac{3^0}{0!}+e^{-3}\frac{3^1}{1!}=\frac{1}{e^3}+\frac{3}{e^3}=\frac{4}{e^3}\approx 0.199$$

ההסתברות שיפלט לפחות אלקטרון אחד היא

$$\sum_{i=1}^{\infty}P_X(i)=1-P_X(0)=1-\frac{1}{e^3}\approx 0.95$$

<u>סעיף ב</u>

נסמן את המשתנה

Y = מספר האלקטרונים שפגעו בלוח המתכת

ואז ההסתברות שלפחות אלקטרון אחד יפגע בלוח היא

$$P_Y(y\geq 1)=1-P_Y(0)$$

מנוסחת ההסתברות השלמה מקבלים

$$P_Y(y\geq 1)=1-P_Y(0)=1-\sum_{i=0}^{\infty}P(no\,electron\,hits\,|\,i\,ejected)P(i\,ejected)$$

$$=1-\sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^i e^{-3}\frac{3^i}{i!}=1-e^{-3}\sum_{i=0}^{\infty}(0.3)^i\frac{3^i}{i!}=1-e^{-3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(0.9)^i}{i!}=1-e^{-3}e^{0.9}\approx 0.877$$

פתרון לתרגיל 3.22

<u>סעיף א</u>

פילוג מספר הלקוחות הוא

$$P_X(X=k)=e^{-3}\frac{3^k}{k!}$$

ולכן

$$P(X=k\,|\,X\geq 1)=\frac{P(X=k\cap X\geq 1)}{P(X\geq 1)}$$

עבור $k>0$ נקבל

$$P(X=k\,|\,X\geq 1)=\frac{P(X=k)}{P(X\geq 1)}=\frac{P(X=k)}{1-P(X=0)}=\frac{e^{-3}\frac{3^k}{k!}}{1-e^{-3}\frac{3^0}{0!}}=\frac{e^{-3}}{1-e^{-3}}\frac{3^k}{k!}$$

<u>סעיף ב</u>

מכיוון שלקוח אחד כבר הגיע, פילוג מספר הלקוחות הוא כעת

$$P_Y(k)=P_X(X=k\,|\,X\geq 1)=\frac{e^{-3}}{1-e^{-3}}\frac{3^k}{k!}=\frac{1}{e^3-1}\frac{3^k}{k!}$$

נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, ונפריד את המקרים שבהם הלקוח בא לבד (ואז הוא מטופל ישירות), עם עוד אדם (ואז שניהם מטופלים ישירות) או עם יותר מאדם אחד (ואז יש לבחור שני אנשים ולטפל להם). לאחר בחירת שני אנשים לטיפול, הסיכוי שהאדם יהיה מרוצה הוא $p=\frac{2}{3}$.

$$P(satisfied)=pP_Y(1)+pP_Y(2)+\sum_{n=3}^{\infty}P(satisfied\,|\,Y=n)P_Y(n)\cdot p$$

$$=\frac{p}{e^3-1}\left(\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n}\frac{3^n}{n!}\right)$$

$$=\frac{2}{3e^3-3}\left(\frac{15}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n}\frac{3^n}{n!}\right)$$

<u>סעיף ג</u>

אם אדם אחד בא, אזי הוא יהיה מרוצה בהסתברות p. אם יותר מאדם אחד בא, שניים יקבלו טיפול, ונרצה שרק אחד מהם יהיה מרוצה:

$$P(1\,satisfied)=pP_X(1)+\sum_{n=2}^{\infty}P(1\,satisfied\,|\,n\,arrived)P_X(n)$$

$$=pe^{-3}\frac{3^1}{1!}+\binom{2}{1}\sum_{n=2}^{\infty}p(1-p)e^{-3}\frac{3^n}{n!}$$

$$=2e^{-3}+\frac{4}{9}e^{-3}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=2e^{-3}+\frac{2}{9}e^{-3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}-\frac{3^0}{0!}-\frac{3^1}{1!}\right)$$

$$=e^{-3}\left(2+\frac{4}{9}\left(e^3-1-3\right)\right)\approx 0.455$$

פתרון לתרגיל 3.21

נשתמש בנוסחת Beigs:

$$P(drug\ worked \mid sick\ twice) = P(sick\ twice \mid drug\ worked)\frac{P(drug\ worked)}{P(sick\ twice)}$$

$$= e^{-3}\frac{3^2}{2!}\frac{0.75}{0.75e^{-3}\frac{3^2}{2!}+0.25e^{-5}\frac{5^2}{2!}}$$

$$= \frac{27}{27+25e^{-2}} \approx 0.888$$

פתרון לתרגיל 3.23

<u>סעיף א</u>

נתייחס להפצת השמועה כניסוי ברנולי, כאשר הצלחה היא בסיכוי $p=\frac{1}{n}$, כי יש לבחור אדם מסוים מתוך n האנשים אליהם מפיצים את השמועה בשביל להצליח. אנו מעוניינים בהפצה הראשונה המוצלחת, כאשר הניסוי הראשון לא נספר. לכן, מספר הפעמים שתופץ השמועה מפולגת גיאומטרית, כאשר הצלחה בניסוי ה k היא $k-2$ כישלונות והצלחה אחת:

$$N \sim Geom(p)$$

$$\Rightarrow\ P_N(k) = (1-p)^{k-2}p$$

ולכן פונקצית ההסתברות היא

$$P_N(k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{1}{n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}\frac{1}{n} = \frac{(n-1)^{k-2}}{n^{k-1}}, \qquad k = 2,3,\ldots$$

<u>סעיף ב</u>

כעת בכל הפצת שמועה, הסיכוי להצליח גדל. בהפצה מספר i, הסיכוי להפיץ את השמועה למי שכבר שמע אותה הוא $\frac{i-1}{n}$, והסיכוי להפיץ את השמועה למי שלא שמע אותה הוא $\frac{n-(i-1)}{n}$. לכן אם נרצה שהשמועה תגיע למי שכבר שמע אותה לאחר k הפצות, נקבל

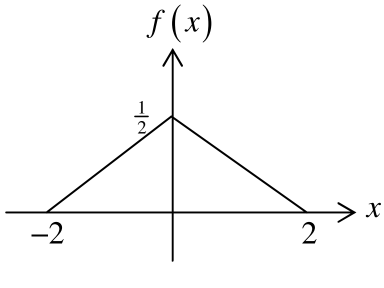
$$p_N(k) = \underbrace{\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-2)}{n}\frac{k-1}{n}}_{k-1\,spreads} = \frac{(n-1)!}{(n-k+1)!}\frac{k-1}{n^{k-1}}$$

פתרון לתרגיל 4.3

<u>סעיף א</u>

תהא הפונקציה

$$f(x) = \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}|x|, \qquad |x| \le 2$$



מכיוון ש

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}|x|\right)dx = 2\int_{0}^{2}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x\right)dx = 2\left[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2\right]_0^2 = 2\left(1-\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

זוהי פונקצית צפיפות הסתברות תקינה.

<u>סעיף ב</u>

$$P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}|x|\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}x\right)dx=2\left[\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2\right]_0^1=2\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\right)=\tfrac{3}{4}$$

$$P\left(X>-\tfrac{1}{2}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}|x|\right)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}x\right)dx+\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}+\left[\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{8}x^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}$$
$$=\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{32}\right)=\tfrac{23}{32}$$

<u>סעיף ג</u>

נחשב את פונקצית ההתפלגות של X , לפי ההגדרה:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

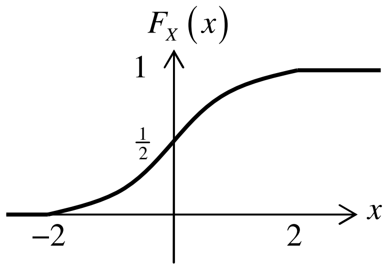
עבור $-2\le x<0$ נקבל

$$F_X(x)=\int_{-2}^{x}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}t\right)dt=\left[\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{8}t^2\right]_{-2}^{x}=\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}+1-\tfrac{1}{2}=\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}+\tfrac{1}{2}$$

ועבור $0\le x\le 2$ נקבל

$$F_X(x)=\tfrac{1}{2}+\int_{0}^{x}\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}t\right)dt=\tfrac{1}{2}+\left[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}t^2\right]_{0}^{x}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{8}$$

ולסיכום:



פתרון לתרגיל 4.6

נתונה מערכת בעלת אורך חיים X , עם צפיפות הסתברות

$$f_X(x)=\frac{81}{x^4},\quad x>3$$

<u>סעיף א</u>

עבור $x>3$, פונקצית ההתפלגות של X היא

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{3}^{x}f(t)\,dt=\int_{3}^{x}\frac{81}{t^4}dt=\left[\frac{27}{t^3}\right]_x^3=1-\frac{27}{x^3}$$

ולכן

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<3\\ 1-\frac{27}{x^3}, & x\ge 3\end{cases}$$

<u>סעיף ב</u>

נחשב את ההסתברות שהמערכת תפעל לפחות 10 שעות בהינתן שהיא פעלה כבר 5 שעות, כאשר באופן כללי, עבור $b>a$ מתקיים:

$$P_X(X>b\mid X>a)=\frac{P_X(X>b\cap X>a)}{P_X(X>a)}=\frac{P_X(X>b)}{P_X(X>a)}=\frac{1-F_X(b)}{1-F_X(a)}=\frac{1-\left(1-\frac{27}{b^3}\right)}{1-\left(1-\frac{27}{a^3}\right)}=\frac{a^3}{b^3}$$

ולכן

$$P_X(X>10\mid X>5)=\frac{5^3}{10^3}=\frac{1}{8}$$

<u>סעיף ג</u>

מהסעיף הקודם,

$$P_X\left(X > b \mid X > a\right) = \frac{a^3}{b^3} \neq \frac{27}{\left(b-a\right)^3} = 1 - F_X\left(b-a\right) = P_X\left(X > b-a\right)$$

ולכן ההסתברות של X לא חסרת זיכרון.

פתרון לתרגיל 4.9

<u>סעיף א</u>

נתון משתנה אקראי רציף $X \sim N\left(3,4\right)$. אזי, בהיעזרנו ב $Z \sim N\left(0,1\right)$ ובהתפלגות הנורמאלית התקנית שלו,

$$P\left(X > 9\right) = P\left(Z > \frac{9-3}{2}\right) = P\left(Z > 3\right) = 1 - \Phi\left(3\right) = 0.0013$$

$$P\left(X < 7\right) = P\left(Z < \frac{7-3}{2}\right) = P\left(Z < 2\right) = \Phi\left(2\right) = 0.977$$

<u>סעיף ב</u>

נתון משתנה אקראי רציף $Y \sim N\left(2.5,16\right)$. אזי, בהיעזרנו ב $Z \sim N\left(0,1\right)$ ובהתפלגות הנורמאלית התקנית שלו,

$$P\left(Y < 1.5\right) = P\left(Z < \frac{1.5-2.5}{4}\right) = P\left(Z < -\tfrac{1}{4}\right) = 1 - P\left(Z < \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\tfrac{1}{4}\right) = 0.4013$$

$$P\left(3.5 < Y < 8\right) = P\left(\frac{3.5-2.5}{4} < Z < \frac{8-2.5}{4}\right) = P\left(\frac{1}{4} < Z < \frac{11}{8}\right) = \Phi\left(\tfrac{11}{8}\right) - \Phi\left(\tfrac{1}{4}\right)$$
$$= 0.9154 - 0.5987 = 0.3167$$

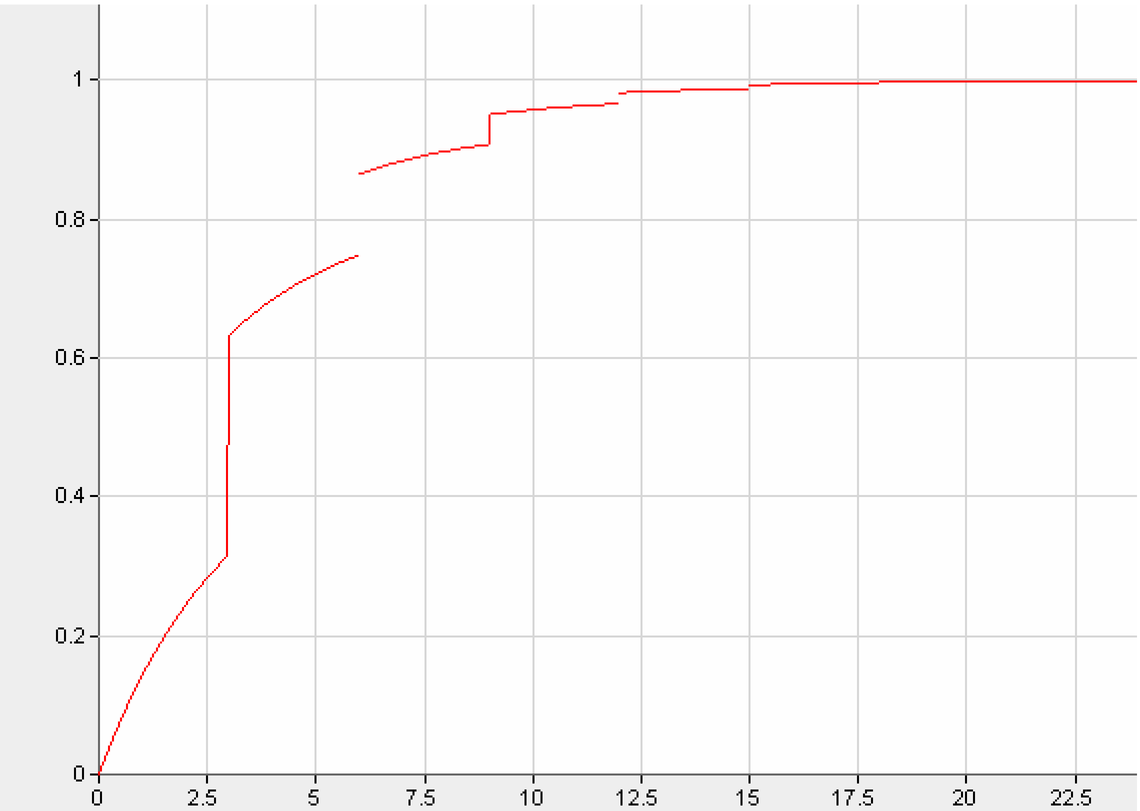
פתרון לתרגיל 4.13

<u>סעיף א</u>

הפונקציה $f\left(x\right) = \left[x\right]$ רציפה מימין לכל $x > 0$, ובעלת נקודות אי-רציפות משמאל רק מסוג קפיצה. הפונקציה

$$F_X\left(x\right) = 1 - \tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{x}{3}} + e^{-\left[\frac{x}{3}\right]}\right)$$

היא הרכבה של $\left[x\right]$ ושל פונקציות רציפות, ולכן גם היא רציפה מימין לכל $x > 0$, ובעלת נקודות אי-רציפות משמאל רק מסוג קפיצה. מתקיים $\lim_{x\to\infty} F_X\left(x\right) = 1$ וגם $\lim_{x\to-\infty} F_X\left(x\right) = 0$, ולכן היא אכן פונקציית התפלגות. להלן תאור מדויק של הפונקציה.



הקפיצות מתרחשות עבור $x=3k$, $k=1,2,3,\dots$.

<u>סעיף ב</u>

ההסתברות שהשיחה תמשך יותר מ 5 דקות היא

$$P(x>5)=1-P(x\le 5)=1-F_X(5)=1-\left[1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-\left[\frac{5}{3}\right]}\right)\right]=\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-1}\right)$$

ההסתברות שהשיחה תמשך פחות מ 4 דקות היא

$$P(x<4)=P(x\le 4)-P(x=4)=F_X(4)-0=1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{4}{3}}+e^{-\left[\frac{4}{3}\right]}\right)=1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{4}{3}}+e^{-1}\right)$$

ההסתברות שהשיחה תמשך 3 דקות היא

$$P(x=3)=F_X(3)-\lim_{y\to 3^-}F_X(y)=1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{3}{3}}+e^{-\left[\frac{3}{3}\right]}\right)-\left(1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{3}{3}}+e^{-0}\right)\right)$$

$$=1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-1}+e^{-1}\right)-1+\tfrac{1}{2}\left(e^{-1}+1\right)=1-\tfrac{1}{2e}$$

ההסתברות שהשיחה תמשך פחות מ 9 דקות, כאשר היא ארכה כבר יותר מ 5 דקות, היא

$$P(x\le 9\mid x>5)=\frac{P(x\le 9\cap x>5)}{P(x>5)}=\frac{P(5<x\le 9)}{P(x>5)}=\frac{F_X(9)-F_X(5)}{\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{9}{3}}+e^{-\left[\frac{9}{3}\right]}\right)-\left(1-\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-\left[\frac{5}{3}\right]}\right)\right)}{\tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{5}{3}}+e^{-1}\right)}=\frac{e^{-\frac{5}{3}}+e^{-1}-2e^{-3}}{e^{-\frac{5}{3}}+e^{-1}}$$

פתרון לתרגיל 4.18

יהי X מפולג פואסונית, כלומר $p_X(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ ויהי $Y=aX+b$. מצא את $p_Y(Y=k)$.

עבור $a=0$, $Y=b$, ולכן $p_Y(k)=b$.

עבור $a\ne 0$, $Y=aX+b$ ולכן

$$p_Y\left(Y=k\right)=p_Y\left(aX+b=k\right)=p_Y\left(X=\frac{k-b}{a}\right)=\begin{cases}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{k'}}{k'!}, & k'=\dfrac{k-b}{a}\in N\\ 0, & k'=\dfrac{k-b}{a}\notin N\end{cases}$$

פתרון לתרגיל 4.19

יהי $X\sim U\left[0,1\right]$, כלומר

$$f_X\left(X\right)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$F_X\left(X\right)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

<u>סעיף א</u>

חשב את פונקצית ההתפלגות והצפיפות של $Y=\frac{1}{X}$.

ראשית, עבור $x>1$, או $y<1$, נקבל ש $f_Y\left(y\right)=F_Y\left(y\right)=0$.

עבור $0<x\le 1$, או $y\ge 1$, הרי ש Y יקבל ערכים בתחום $Y\in\left[1,\infty\right)$. נקבל:

$$F_Y\left(Y\right)=P\left(Y\le y\right)=P\left(\tfrac{1}{X}\le y\right)=P\left(X\ge\tfrac{1}{y}\right)=\int_{\frac{1}{y}}^{1}1dx=1-\frac{1}{y}$$

ואז

$$f_Y\left(y\right)=F_Y'\left(y\right)=\frac{1}{y^2}$$

ולסיכום

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y\ge 1\\ 0, & y<1\end{cases},\qquad F_Y\left(y\right)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{y}, & y\ge 1\\ 0, & y<1\end{cases}$$

<u>סעיף ב</u>

חשב את פונקצית ההתפלגות והצפיפות של $Z=\ln X$.

Z יקבל ערכים בתחום $Z\in\left(0,-\infty\right)$. נקבל:

$$F_Z\left(z\right)=P\left(Z\le z\right)=P\left(\ln X\le z\right)=P\left(X\le e^z\right)=F_X\left(e^z\right)=e^z\quad\Rightarrow\quad f_Z\left(z\right)=e^z$$

עבור $x>1$, או $z>0$, נקבל ש $f_Z\left(z\right)=0$ ו $F_Z\left(z\right)=1$.

פתרון לתרגיל 4.21

לקלט של מערכת יש צפיפות

$$f_X(x)=\tfrac{1}{2}(x+1), \qquad -1\le x\le 1$$

והפלט מוגדר ע"י

$$Y=g(X)$$

כאשר

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$$

מצא את $F_Y(y)$.

נמצא ראשית את $F_X(x)$:

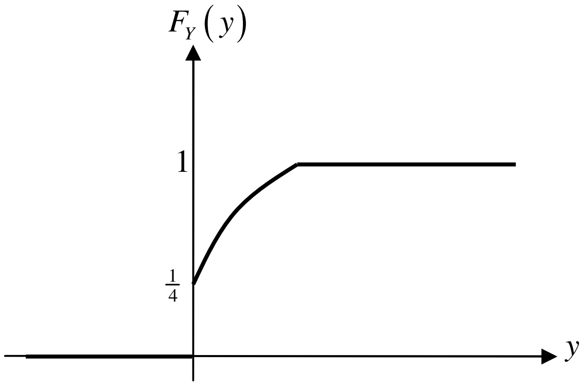
$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-1}^{x} f_X(s)\,ds=\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{x}(s+1)\,ds=\tfrac{1}{4}\left[(s+1)^2\right]_{-1}^{x}=\tfrac{1}{4}(x+1)^2, \quad -1<x<1$$

ולכן

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \tfrac{1}{4}(x+1)^2, & -1<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

ע"פ הגדרתו, המשתנה האקראי Y מזדהה עם X בערכים החיוביים, ומתאפס על קטע הציר השמאלי, כלומר

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \tfrac{1}{4}(y+1)^2, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}$$



בגלל הקפיצה ב $y=0$, זהו משתנה מעורב.

פתרון לתרגיל 4.22

יהיה $X\sim U[-3,5]$, אזי

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -3\\ \tfrac{1}{8}x+\tfrac{3}{8}, & -3<x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$$

נגדיר

$$Y=g(X)=\begin{cases}4, & x\ge 4\\ x, & |x|<4\\ -4 & x\le -4\end{cases}$$

ולכן

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}1, & y\ge 4\\ P(X\le y), & -4<y<4\\ 0, & y\le -4\end{cases}=\begin{cases}1, & y\ge 4\\ \tfrac{1}{8}y+\tfrac{3}{8}, & -3<y<4\\ 0, & y\le -3\end{cases}$$

פתרון לתרגיל 5.2

X הוא מספר העצמים מסוג א', ולכן

$$p_X(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}, \qquad k\le n$$

ולכן

$$EX=\sum_{k=0}^{n}kp_X(k)=\frac{1}{\binom{a+b}{n}}\sum_{k=1}^{a}k\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!}\sum_{k=1}^{n}k\frac{a!}{k!(a-k)!}\frac{b!}{(n-k)!(b-(n-k))!}$$

$$=\frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{a!}{(k-1)!(a-k)!}\frac{b!}{(n-k)!(b-(n-k))!}$$

$$=\frac{n!(a+b-n)!}{(a+b)!}\sum_{k=1}^{n}\frac{a(a-1)!}{(k-1)!((a-1)-(k-1))!}\frac{b!}{((n-1)-(k-1))!(b-((n-1)-(k-1)))!}$$

$$\underset{j=k-1}{=}\frac{n!a(a+b-n)!}{(a+b)!}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(a-1)!}{j!((a-1)-j)!}\frac{b!}{((n-1)-j)!(b-((n-1)-j))!}$$

$$=\frac{n!a(a+b-n)!}{(a+b)!}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{a-1}{j}\binom{b}{(n-1)-j}\underset{(*)}{=}\frac{n!a(a+b-n)!}{(a+b)!}\binom{a-1+b}{n-1}$$

$$=\frac{n!a(a+b-n)!}{(a+b)!}\frac{(a-1+b)!}{(n-1)!(a-1+b-(n-1))!}$$

$$=\frac{n!a}{a+b}\frac{1}{(n-1)!}=\frac{an}{a+b}$$

כאשר אפשר לראות בקלות ש

$$(*)\qquad \sum_{j=0}^{n}\binom{a}{j}\binom{b}{n-j}=\binom{a+b}{n}$$

לסיכום, לא היינו רוצים להיתקל בתרגיל כזה במבחן.

פתרון לתרגיל 5.7

יש לחשב את התוחלת של X בכל אחד מהמקרים הבאים.

<u>סעיף א</u>

$$f_X(x)=2x, \qquad 0<x<1$$

החישוב:

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}\left[x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

<u>סעיף ב</u>

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1<x<2\end{cases}$$

זו צפיפות סימטרית סביב 1, ולכן $EX=1$. למי שלא מאמין:

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 2x-x^2dx=\tfrac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1+\left[x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right]_1^2=\tfrac{1}{3}+4-\tfrac{8}{3}-\left(1-\tfrac{1}{3}\right)=1$$

<u>סעיף ג</u>

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sqrt{x}, & 0<x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

החישוב:

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}\Rightarrow EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{1}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

אך יש שיעדיפו להשתמש בנוסחא עבור משתנה אקראי חיובי:

$$EX=\int_0^{\infty}1-F_X(x)dx=\int_0^1 1-\sqrt{x}dx=\left[x-\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=1-\tfrac{2}{3}=\tfrac{1}{3}$$

פתרון לתרגיל 5.11

ננסה למצוא את התוחלת של X:

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}2^k2^{-(2k+1)}=\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}$$

ננסה למצוא את התוחלת של Y:

$$EY=\sum_{k=1}^{\infty}2^k2^{-(2k+1)}-\sum_{k=1}^{\infty}2^k2^{-(2k+1)}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0$$

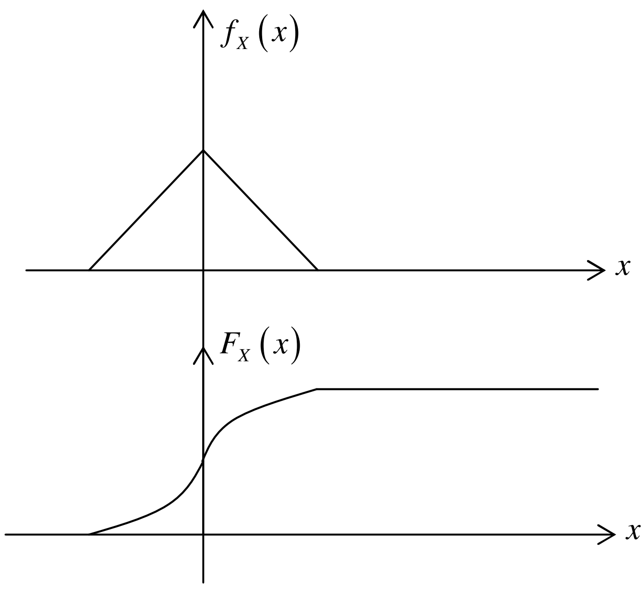
לא היינו חייבים לחשב, כי פונקצית ההסתברות של Y סימטרית לגבי 0.

פתרון לתרגיל 5.13

נחשב תחילה את $F_X(x)$:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \int_{-1}^{x}(1+s)ds, & -1<x<0\\ \int_{-1}^{0}(1+s)ds+\int_0^x(1-s)ds, & 0<x<1\\ \int_{-1}^{0}(1+s)ds+\int_0^1(1-s)ds, & x>1\end{cases}=\begin{cases}0, & x<-1\\ \tfrac{1}{2}(1+x)^2, & -1<x<0\\ 1-\tfrac{1}{2}(1-x)^2, & 0<x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

כלומר, קיבלנו



$$F_Y(y)=P(Y\le y)=\begin{cases}P\left(\sqrt{X}\le y\right), & y>0\\ 0, & y<0\end{cases}$$

נחשב ע"פ החלוקה למקרים הבאה:

$$y \le 1:\ F_Y(y) = P(Y \le y) = 0 \quad (because\ Y \in [-1,\infty])$$

$$y \in [-1,0]:\ F_Y(y) = P(Y \le y) = P(y=-1) + \underbrace{\cancel{P(y \in (-1,0))}}_{0} + \underbrace{\cancel{P(y=0)}}_{0} =$$

$$= P(x \in [-\infty,0]) = P(x \in [-1,0]) = \frac{1}{2}(x+1)\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

$$y \in [0,1](\Rightarrow *x \in [0,1]):\ F_Y(y) = P(Y \le y) \overset{*}{=} P(\sqrt{X} \le y) = P(X \le y^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^2$$

$$y \ge 1(\Rightarrow x \ge 1):\ F_Y(y) = P(Y \le y) = 1$$

פתרון לתרגיל 5.15

כדי שחיים יחזור לתמוך בהפועל, הוא צריך להצליח פעמיים בזריקה, אם מספר בלתי מוגבל של כישלונות בין שתי הצלחות אלו. לכן, כאשר X הוא מספר ההטלה שבה חיים חוזר לתמוך בהפועל, נקבל

$$p_X(X=k) = \begin{cases} q & k=1 \\ q^{k-2}p^2, & k=2,3,4... \end{cases}$$

ולכן

$$EX = q + \sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-2}p^2 = q + \frac{p^2}{q}\sum_{k=2}^{\infty} kq^{k-1} = q + \frac{p^2}{q}\sum_{k=2}^{\infty}(q^k)' = q + \frac{p^2}{q}\left(\sum_{k=2}^{\infty} q^k\right)'$$

$$= q + \frac{p^2}{q}\frac{d}{dq}\left[\frac{q^2}{1-q}\right] = q + \frac{p^2}{q}\frac{2q(1-q)+q^2}{(1-q)^2} = q + 2 - q = 2$$

פתרון לתרגיל 6.6

נחשב את פונקצית ההסתברות של X, כאשר X הוא מספר הפאות השונות המתקבלות בשלוש זריקות של קובייה הוגנת:

$$p_X(k) = \begin{cases} 6\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right), & k=1 \\ 6\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right), & k=2 \\ 6\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\right), & k=3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{36}, & k=1 \\ \frac{15}{36}, & k=2 \\ \frac{20}{36}, & k=3 \end{cases}$$

ולכן

$$EX = \sum_{k=1}^{3} kp_X(k) = \frac{1}{36} + 2\frac{15}{36} + 3\frac{20}{36} = \frac{91}{36}$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=1}^{3} k^2 p_X(k) - \frac{91}{36} = \frac{1}{36} + 4\frac{15}{36} + 9\frac{20}{36} - \frac{91^2}{36^2} = \frac{395}{1296}$$

פתרון לתרגיל 6.10

ע"פ אי-שוויון צ'בישב, הרי ש

$$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = P(|X-\mu| \le 2\sigma) = 1 - P(|X-\mu| > 2\sigma) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = 0.75$$

ולכן לא קיים משתנה מקרי שכזה.

פתרון לתרגיל 6.14

נשתמש בעובדה ש

$$\left.\frac{d}{ds}M_X(s)\right|_{s=0} = EX$$

$$\left.\frac{d^2}{ds^2}M_X(s)\right|_{s=0} = EX^2$$

ובאופן כללי,

$$\left.\frac{d^n}{ds^n}M_X(s)\right|_{s=0} = m_n$$

<u>סעיף א</u>

$$EX = \left.\frac{d}{ds}\frac{1}{1-s}\right|_{s=0} = \left.\frac{1}{(1-s)^2}\right|_{s=0} = 1$$

$$EX^2 = \left.\frac{d^2}{ds^2}\frac{1}{1-s}\right|_{s=0} = \left.\frac{2}{(1-s)^3}\right|_{s=0} = 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = 2-1=1$$

<u>סעיף ב</u>

$$EX = \left.\frac{d}{ds}e^{6s+s^2}\right|_{s=0} = \left.(6+2s)e^{6s+s^2}\right|_{s=0} = 6$$

$$EX^2 = \left.\frac{d^2}{ds^2}e^{6s+s^2}\right|_{s=0} = \left.2e^{6s+s^2} + (6+2s)^2 e^{6s+s^2}\right|_{s=0} = 38$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = 38-36=2$$

<u>סעיף ג</u>

ראשית, מהגדרת $M_X(s)$, צריך להתקיים

$$M_X(0)=1$$

ולכן

$$M_X(0)=\frac{C}{8}=1 \;\Rightarrow\; C=8$$

ואז

$$EX = \left.\frac{d}{ds}\frac{8}{(2-s)^3}\right|_{s=0} = \left.\frac{24}{(2-s)^4}\right|_{s=0} = \frac{24}{16}=\frac{3}{2}$$

$$EX^2 = \left.\frac{d^2}{ds^2}\frac{8}{(2-s)^3}\right|_{s=0} = \left.\frac{96}{(2-s)^5}\right|_{s=0} = \frac{96}{32}=3$$

$$\Rightarrow \operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$$

פתרון לתרגיל 6.15

<u>סעיף א</u>

השיפוע הוא $Y=\tan\Theta$, ולכן התוחלת של Y היא

$$EY = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan\theta \frac{1}{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}d\theta = \frac{6}{\pi}\left[-\ln\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{6}{\pi}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{6}{\pi}\ln\sqrt{3} = \frac{3}{\pi}\ln 3 \cong 1.05$$

<u>סעיף ב</u>

אם הפילוג של Θ סימטרי סביב $\frac{\pi}{4}$, אזי $E\Theta=\frac{\pi}{4}$. מכיוון ש $\tan\Theta$ קמורה ב $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$, נקבל מאי-שוויון ינסן ש

$$E\tan\Theta \ge \tan E\Theta = \tan\tfrac{\pi}{4} = 1$$

פתרון לתרגיל 7.3

לא יתכן שנבחר את הטרנזיסטור השני לפני הטרנזיסטור הראשון.
נבנה את פונקצית ההסתברות המשותפת:

$N_2 \backslash N_1$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	$\frac{2}{5}\frac{1}{4}$	0	0	0	0
3	$\frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}$	0	0	0
4	$\frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	0	0
5	$\frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}$	0

או במילים אחרות,

$N_2 \backslash N_1$	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	$\frac{1}{10}$	0	0	0	0
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0
5	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0

ולכן, פונקציות ההסתברות השוליות הן

$$P_{N_1}(k)=\begin{cases}\frac{4}{10}, & k=1\\ \frac{3}{10}, & k=2\\ \frac{2}{10}, & k=3\\ \frac{1}{10}, & k=4\end{cases}, \qquad P_{N_2}(k)=\begin{cases}\frac{1}{10}, & k=2\\ \frac{2}{10}, & k=3\\ \frac{3}{10}, & k=4\\ \frac{4}{10}, & k=5\end{cases}$$

פתרון לתרגיל 7.5

נתונה פונקצית ההסתברות

$$p_{X,Y}(m,n)=\frac{e^{-7}4^m3^{n-m}}{m!(n-m)!}, \qquad n=0,1,2,\ldots; \quad m=0,1,\ldots,n$$

<u>סעיף א</u>

נחשב את פונקציות ההסתברות השוליות של כל אחד מהמשתנים:

$$p_X(m)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{X,Y}(m,n)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{e^{-7}4^m3^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-7}4^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{3^{n-m}}{(n-m)!}\underset{j=n-m}{=}\frac{e^{-7}4^m}{m!}\sum_{j==}^{\infty}\frac{3^j}{j!}=\frac{e^{-7}4^me^3}{m!}=e^{-4}\frac{4^m}{m!}$$

$$p_Y(n)=\sum_{m=0}^{n}p_{X,Y}(m,n)=\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-7}4^m3^{n-m}}{m!(n-m)!}=\frac{e^{-7}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}4^m3^{n-m}=e^{-7}\frac{7^n}{n!}$$

וכמובן ש

$$p_X(m)\,p_Y(n)=\frac{e^{-7}4^m e^3}{m!}=e^{-4}\frac{4^m}{m!}e^{-7}\frac{7^n}{n!}\neq\frac{e^{-7}4^m3^{n-m}}{m!(n-m)!}=p(X=m\cap Y=n)=p_{X,Y}(m,n)$$

ובפרט, עבור $m>n$, נקבל $p_{X,Y}(m,n)=0$, אבל $p_X(m)\,p_Y(n)\neq 0$.

<u>סעיף ב</u>

$$p_{X,Y}(X=i,Y-X=j)=p_{X,Y}(X=i,Y=i+j)=\frac{e^{-7}4^i3^{i+j-i}}{i!(i+j-i)!}=\frac{e^{-7}4^i3^j}{i!\,j!}=e^{-4}\frac{4^i}{i!}e^{-3}\frac{3^j}{j!}$$

<u>סעיף ג</u>

נחשב את פונקציות ההסתברות השוליות של כל אחד מהמשתנים:

$$p_X(i)=e^{-4}\frac{4^i}{i!}$$

$$p_{Y-X}(Y=i+j)=e^{-7}\frac{7^{i+j}}{(i+j)!}$$

ולכן

$$p_X(i)\,p_{Y-X}(Y=i+j)=e^{-4}\frac{4^i}{i!}e^{-7}\frac{7^{i+j}}{(i+j)!}=$$

מכיוון ש $p_{X,Y-X}(i,j)\neq 0$ לכל i,j ומכיוון שניתן לפרקה למכפלת פונקציות ב i וב j , נקבל ש X ו $Y-X$ בת"ס.

פתרון לתרגיל 7.8

נתונה פונקצית צפיפות

$$f_{X,Y}(x,y)=Cxye^{-\left(2x^2+y^2\right)}$$

נחשב את הקבוע:

$$\int_{x=-\infty}^{\infty}\int_{y=-\infty}^{\infty}Cxye^{-\left(2x^2+y^2\right)}dydx=C\int_{x=0}^{\infty}xe^{-2x^2}dx\int_{y=0}^{\infty}ye^{-y^2}dy=C\left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^{\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^{\infty}=C\frac{1}{4}\frac{1}{2}=1$$

$$\Rightarrow\quad C=8$$

<u>סעיף א</u>

נחשב את $f_X(x)$:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=8xe^{-2x^2}\int_0^{\infty}ye^{-y^2}dy=8xe^{-2x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^{\infty}=4xe^{-2x^2},\quad x>0$$

ובשביל הסעיף הבא נחשב גם את $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)dy=8ye^{-y^2}\int_0^{\infty}xe^{-2x^2}dx=8ye^{-y^2}\left[-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\right]_0^{\infty}=2ye^{-y^2},\quad y>0$$

וכך למדנו ש X,Y בת"ס!

<u>סעיף ב</u>

$$P(X\le 1,Y\le 1)=\int_0^1\int_0^1 f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 8xye^{-\left(2x^2+y^2\right)}dxdy=\left[-e^{-2x^2}\right]_0^1\left[-e^{-y^2}\right]_0^1=\left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{-1}\right)$$

ומכיוון ש X,Y בת"ס, נקבל ש

$$P(X\le 1|Y\le 1)=P(X\le 1)=\int_0^1 4xe^{-2x^2}dx=\left[e^{-2x^2}\right]_0^1=\left(1-e^{-2}\right)$$

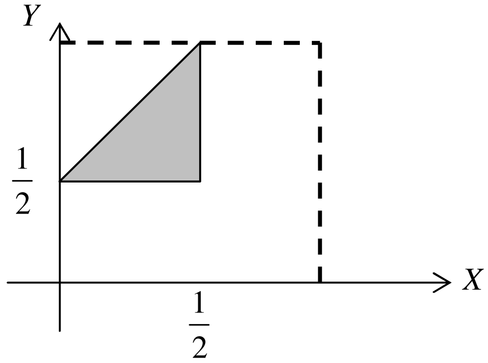
פתרון לתרגיל 7.9

נסמן שני משתנים אקראיים, $X\sim U[0,1]$ ו $Y\sim U[0,1]$.

כדי שיהיה אפשרי להרכיב משולש משלושת הקטעים שנוצרו, נחפש את ההסתברות, עבור שלושת הצלעות $X,Y-X,1-Y$,

הבאה:

$$P\left(\left(X+\left(Y-X\right)>1-Y\right)\cup\left(X+\left(1-Y\right)>Y-X\right)\cup\left(Y-X+\left(1-Y\right)>X\right)\right)=$$
$$=P\left(\left(2Y>1\right)\cup\left(2X-2Y+1>0\right)\cup\left(1>2X\right)\right)$$
$$=P\left(\left(Y>\tfrac{1}{2}\right)\cup\left(Y<X+\tfrac{1}{2}\right)\cup\left(X<\tfrac{1}{2}\right)\right)$$



שני המשתנים בת״ס, ולכן

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1, & \left(x,y\right)\in\left[0,1\right]^2\\ 0, & else\end{cases}$$

ולכן,

$$P\left(\left(Y>\tfrac{1}{2}\right)\cup\left(Y<X+\tfrac{1}{2}\right)\cup\left(X<\tfrac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{8}$$

וכאן הנחנו בחשאי ש $X<Y$. עבור המקרה הסימטרי שבו $Y<X$ נקבל הסתברות זהה, ולכן סה״כ ההסתברות שנוכל ליצור משולש ע״י בחירת שתי נקודות היא $\frac{1}{4}$.

פתרון לתרגיל 7.11

נביט בריבוע שאורך צלעו 1.

<u>סעיף א</u>

מכיוון שאנו בוחרים נקודה באקראי ובאופן בלתי תלוי, הרי ש

$$f_X\left(x\right)=U\left[0,1\right]=\begin{cases}1, & x\in\left[0,1\right]\\ 0, & x\notin\left[0,1\right]\end{cases},\quad f_Y\left(y\right)=U\left[0,1\right]=\begin{cases}1, & y\in\left[0,1\right]\\ 0, & y\notin\left[0,1\right]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ f_{X,Y}\left(x,y\right)=\begin{cases}1, & \left(x,y\right)\in\left[0,1\right]^2\\ 0, & \left(x,y\right)\notin\left[0,1\right]^2\end{cases}$$

כדי לקבל שטח משולש של $\frac{1}{8}$ לכל היותר, נחפש את המקרה בו $XY\le\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ S=\frac{1}{2}XY\le\frac{1}{8}$, ולכן נחשב את

$$P\left(S\le\frac{1}{8}\right)=P\left(X\le\frac{1}{4}\right)+P\left(\frac{1}{4}\le X\le1,Y\le\frac{1}{4X}\right)=\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{0}^{\frac{1}{4x}}1dxdy=\left[\frac{1}{4}\ln4x\right]_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}\ln4e$$

<u>סעיף ב</u>

משיקולי גיאומטריה, לא ניתן לקבל משולש ששטחו גדול מ $\frac{1}{2}$.

פתרון לתרגיל 7.14

<u>סעיף א</u>

מהגדרת $F_{X,Y}\left(x,y\right)$ רואים כי $F_{X,Y}\left(-2,3\right)=0$ ו $F_{X,Y}\left(2,3\right)=1$.

<u>סעיף ב</u>

$$F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y>1\end{cases}$$

<u>סעיף ג</u>

התפלגות אחידה בריבוע $[0,1]^2$, כאשר X,Y בלתי תלויים ואחידים ב $[0,1]$.

פתרון לתרגיל 7.18

נחפש את ההסתברות

$$P(Y\ge X+5)$$

מכיוון ש X,Y בת״ס, נקבל ש

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\lambda_X e^{-\lambda_X x}\lambda_Y e^{-\lambda_Y y}, & x,y>0\\ 0, & x,y<0\end{cases}$$

ונחשב:

$$P(Y\ge X+5)=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x+5}^{\infty}f_X(x)f_Y(y)dxdy=\lambda_X\lambda_Y\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x+5}^{\infty}e^{-\lambda_X x}e^{-\lambda_Y y}dxdy$$

$$=\lambda_X\lambda_Y\int_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda_X x}dx\int_{y=x+5}^{\infty}e^{-\lambda_Y y}dy=-\lambda_X\int_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda_X x}\left[e^{-\lambda_Y y}\right]_{x+5}^{\infty}dx$$

$$=\lambda_X e^{-5\lambda_Y}\int_{x=0}^{\infty}e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)x}dx=-\frac{\lambda_X e^{-5\lambda_Y}}{\lambda_X+\lambda_Y}\left[e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)x}\right]_0^{\infty}=\frac{\lambda_X e^{-5\lambda_Y}}{\lambda_X+\lambda_Y}\approx 0.52$$

פתרון לתרגיל 7.19

$$F_{X,Y}(2,2)=P(X\le 2,Y\le 2)=\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2}f_{X,Y}(x,y)dxdy=3\int_{x=1}^{2}xdx\int_{y=0}^{\frac{1}{x}}y^2dy=\int_{x=1}^{2}\frac{1}{x^2}dx=-\left[\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

$$F_{X,Y}(4,\tfrac{1}{2})=P(X\le 4,Y\le\tfrac{1}{2})=3\int_{x=1}^{2}xdx\int_{y=0}^{\frac{1}{2}}y^2dy+3\int_{x=2}^{4}xdx\int_{y=0}^{\frac{1}{x}}y^2dy=3\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\int_{x=2}^{4}\frac{1}{x^2}dx=\frac{3}{16}-\left[\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{7}{16}$$

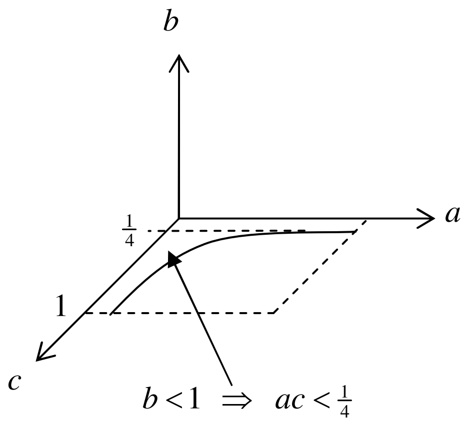
פתרון לתרגיל 7.20

כדי שלמשוואה ממעלה 2 יהיו שני פתרונות ממשיים, נדרוש $\Delta>0$, כלומר $B^2-4AC>0 \Rightarrow B^2>4AC$.

מכיוון ששלושת הגורמים בת״ס, נקבל כי

$$f_{A,B,C}(a,b,c)=\begin{cases}1, & (a,b,c)\in[0,1]^3\\ 0, & else\end{cases}$$

השטח במישור ac שיש לעבור עליו:



לכן, חישוב ההסתברות יהיה

$$P\left(B^2>4AC\right)=P\left(B>2\sqrt{AC}\right)=\int_{c=0}^{\frac{1}{4}}\int_{a=0}^{1}\int_{b=2\sqrt{ac}}^{1}dadbdc+\int_{c=\frac{1}{4}}^{1}\int_{a=0}^{\frac{1}{4c}}\int_{b=2\sqrt{ac}}^{1}dadbdc=$$

$$=\int_{c=0}^{\frac{1}{4}}\int_{a=0}^{1}\left(1-2\sqrt{ac}\right)dadc+\int_{c=\frac{1}{4}}^{1}\int_{a=0}^{\frac{1}{4c}}\left(1-2\sqrt{ac}\right)dadc=$$

$$=\int_{c=0}^{\frac{1}{4}}\left[a-2\sqrt{c}\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\right]_0^1dc+\int_{c=\frac{1}{4}}^{1}\left[a-2\sqrt{c}\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4c}}dc=$$

$$=\int_{c=0}^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{4}{3}\sqrt{c}\right)dc+\int_{c=\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{1}{4c}-2\sqrt{c}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4c}\right)^{\frac{3}{2}}\right)dc=$$

$$=\left[c-\frac{8}{9}c^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}+\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{4}}\right)\ln c\right]_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9\sqrt{4}}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3\sqrt{4}}\right)\ln\frac{1}{4}\approx 0.254$$

כדי שלמשוואה ממעלה 2 יהיה פתרון ממשי יחיד, נדרוש

$$B^2-4AC=0 \;\Rightarrow\; B^2=4AC.$$

ביטוי זה מגדיר משטח, ובמרחב תלת-מימדי אין לו נפח. לכן למאורע כזה סיכוי 0.

פתרון לתרגיל 9.2

<u>סעיף א</u>

נחשב ראשית את פונקצית הצפיפות של Y:

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(x,y\right)dx=\int_{x=\sqrt[3]{\frac{y}{2}}}^{1}2dx=\begin{cases}2\left(1-\sqrt[3]{\frac{y}{2}}\right), & 0<y<2\\ 0, & else\end{cases}$$

$$P\left(X>\tfrac{1}{2}\mid Y<1\right)=\frac{P\left(X>\frac{1}{2}\cap Y<1\right)}{P\left(Y<1\right)}=\frac{\int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\int_{y=0}^{2x^3}2dxdy+\int_{x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}^{1}\int_{y=0}^{1}2dxdy}{2\int_{y=0}^{1}1-\sqrt[3]{\frac{y}{2}}dy}=\frac{4\int_{x=\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}x^3dx+2\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)}{2\left[y-\frac{3}{4}\frac{y^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{2}}\right]_0^1}$$

$$=\frac{\left[x^4\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}+2\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)}{2-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}=\frac{\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}-\frac{1}{2^4}+2-2^{\frac{2}{3}}}{2-\frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}}\approx 0.923$$

<u>סעיף ב</u>

ראשית נחשב את פונקצית הצפיפות של X:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\int_{y=0}^{2x^3} 2dy=\begin{cases}4x^3, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

ולכן:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^3}, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

<u>סעיף ג</u>

מכיוון שפונקצית ההסתברות המשותפת $f_{XY}(x,y)$ אינה מוגדרת בתחום מלבני, X,Y אינם בלתי תלויים.

בנוסף, ניתן לראות בקלות ש:

$$f_{XY}(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$$

פתרון לתרגיל 9.9

<u>סעיף א</u>

בהינתן N, נקבל

$$E(Y\,|\,N)=E(X_1+...+X_N)=Na$$

$$E(Y\,|\,N)=E(X_1+...+X_N)^2=\operatorname{var}(X_1+...+X_N)+\left(E(X_1+...+X_N)\right)^2=Nb^2+N^2a^2$$

<u>סעיף ב</u>

$$EY=E\left(E(Y\,|\,N)\right)=E(Na)=ac$$

$$\operatorname{var}Y=EY^2-(EY)^2=E\left(Nb^2+N^2a^2\right)-a^2c^2=b^2EN+a^2EN^2-a^2c^2=b^2c+a^2\left(\operatorname{var}N+(EN)^2\right)-a^2c^2$$

$$=b^2c+a^2\left(d^2+c^2\right)-a^2c^2=b^2c+a^2d^2$$

פתרון לתרגיל 9.11

רק אם $X>10$, אז מספר התלונות שהוגשו הוא מספר הסטודנטים שהגיעו מהזמן $t=0$ עד הזמן $t=X-10$, כאשר

$$X\sim Exp(0.1),$$

אחרת לא יוגשו תלונות. ע"פ הנתון, מספר הסטודנטים N שיגיעו עד $t=X-10$ מפולג פואסונית עם פרמטר $\lambda=0.1X-1$, כלומר

$$p_{N|X}(n\,|\,x)=\begin{cases}0, & x<10\\ e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}, & x>10\end{cases}$$

התוחלת:

$$EN=E\left(E(N\,|\,X)\right)=E\left(\begin{cases}0, & X<10\\ \lambda, & X>10\end{cases}\right)=E\left(\begin{cases}0, & X<10\\ 0.1X-1, & X>10\end{cases}\right)$$

$$\underset{f(x)=\begin{cases}0, & x<10\\ 0.1x-1, & x>10\end{cases}}{=}\int_0^{\infty} f(x)\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_{10}^{\infty}(0.1x-1)\lambda e^{-\lambda x}dx=0.1\int_{10}^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx-\int_{10}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$\underset{y=x-10}{=}0.1\int_0^{\infty}(y+10)\lambda e^{-\lambda(y+10)}dy-\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda(y+10)}dy=$$

$$=0.1e^{-10\lambda}\int_0^{\infty}y\lambda e^{-\lambda y}dy+e^{-10\lambda}\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy-e^{-10\lambda}\int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy=$$

$$=0.1e^{-10\lambda}\int_0^{\infty}y\lambda e^{-\lambda y}dy=\frac{1}{e}$$

השונות:

$$EN^2=E\left(E\left(N^2\mid X\right)\right)=E\left(\sigma_{N\mid X}^2+\left(E\left(N\mid X\right)\right)^2\right)=\int_{10}^{\infty}\left(\left(0.1t-1\right)+\left(0.1t-1\right)^2\right)0.1e^{-0.1t}dt=\ldots=\frac{3}{e}$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_N^2=EN^2-\left(EN\right)^2=\frac{3}{e}-\frac{1}{e^2}$$

פתרון לתרגיל 9.12

סעיף א

הצפיפות של X_0 היא

$$f_{X_0}\left(x_0\right)=\begin{cases}1, & x_0\in\left[0,1\right]\\ 0, & x_0\notin\left[0,1\right]\end{cases}$$

והצפיפות המותנית של X_1 היא

$$f_{X_1\mid X_0}\left(x_1\mid x_0\right)=\begin{cases}\frac{1}{x_0}, & x_1\in\left[0,x_0\right]\\ 0, & x_1\notin\left[0,x_0\right]\end{cases}$$

ובאופן דומה,

$$f_{X_n\mid X_{n-1}}\left(x_n\mid x_{n-1}\right)=\begin{cases}\frac{1}{x_{n-1}}, & x_n\in\left[0,x_{n-1}\right]\\ 0, & x_n\notin\left[0,x_{n-1}\right]\end{cases}$$

ולכן,

$$f_{X_1\mid X_0}\left(x_1\mid x_0\right)=\frac{f_{X_0,X_1}\left(x_0,x_1\right)}{f_{X_0}\left(x_0\right)}\quad\Rightarrow\quad f_{X_0,X_1}\left(x_0,x_1\right)=f_{X_1\mid X_0}\left(x_1\mid x_0\right)f_{X_0}\left(x_0\right)=\begin{cases}\frac{1}{x_0}, & 0<x_1<x_0<1\\ 0, & else\end{cases}$$

בנוסף,

$$f_{X_1}\left(x_1\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_1\mid X_0}\left(x_1\mid x_0\right)f_{X_0}\left(x_0\right)dx_0=\int_0^1 f_{X_1\mid X_0}\left(x_0\mid x_1\right)dx_0=\int_{x_1}^1\frac{1}{x_0}dx_0=-\ln x_1,\qquad 0<x_1<1$$

$$f_{X_2}\left(x_2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_2\mid X_1}\left(x_2\mid x_1\right)f_{X_1}\left(x_1\right)dx_1=\int_0^1 f_{X_2\mid X_1}\left(x_2\mid x_1\right)\left(-\ln x_1\right)dx_1=-\int_{x_2}^1\frac{\ln x_1}{x_1}dx_1$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\ln^2 x_1\right]_{x_2}^1=\frac{1}{2}\ln^2 x_2,\qquad 0<x_2<1$$

$$f_{X_3}\left(x_3\right)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_3\mid X_2}\left(x_3\mid x_2\right)f_{X_2}\left(x_2\right)dx_2=\int_0^1 f_{X_2\mid X_1}\left(x_2\mid x_1\right)\frac{1}{2}\ln^2 x_2dx_2=\frac{1}{2}\int_{x_3}^1\frac{\ln^2 x_2}{x_2}dx_2$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}\left[\ln^3 x_1\right]_{x_3}^1=-\frac{1}{2\cdot 3}\ln^3 x_3,\qquad 0<x_3<1$$

סעיף ב

הניחוש יהיה כמובן

$$f_{X_n}\left(x_n\right)=\left(-1\right)^n\frac{1}{n!}\ln^n x_n,\qquad 0<x_n<1$$

סעיף ג

מהניחוש של סעיף ב:

$$EX_n=\int_0^1 x\frac{\left(-1\right)^n}{n!}\ln^n x_ndx_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{n!}\int_0^1 x_n\ln^n x_ndx_n=\left(-1\right)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}x_n^2\ln^n x_n\Big|_0^1-n\int_0^1\frac{1}{2}x_n^2\frac{\ln^{n-1}x_n}{x_n}dx_n\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{\left(n-1\right)!}\int_0^1 x_n\ln^{n-1}x_ndx_n=\int_0^1 x_n\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{\left(n-1\right)!}\ln^{n-1}x_ndx_n=\frac{1}{2}EX_{n-1}$$

וכאשר $EX_0=\frac{1}{2}$, נקבל

$$EX_1=\frac{1}{2}\frac{1}{2},\qquad EX_2=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2},\dots.\ \Rightarrow\ EX_n=\frac{1}{2^{n+1}}$$

ועי"פ משפט ההחלקה נקבל, כמובן, תוצאה זהה:

$$EX_n=E\left(E\left(X_n\mid X_{n-1}\right)\right)=E\left(\frac{1}{2}X_{n-1}\right)=\frac{1}{2}E\left(E\left(X_{n-1}\mid X_{n-2}\right)\right)=\dots=\frac{1}{2^{n+1}}$$

<u>סעיף ד</u>

מנוסחת בייס:

$$f_{X_{n-1}\mid X_n}\left(x_{n-1}\mid x_n\right)=\frac{f_{X_n\mid X_{n-1}}\left(x_n\mid x_{n-1}\right)f_{X_{n-1}}\left(x_{n-1}\right)}{f_{X_n}\left(x_n\right)}=\frac{\begin{cases}\frac{1}{x_{n-1}}, & x_n\in\left[0,x_{n-1}\right]\\ 0, & x_n\notin\left[0,x_{n-1}\right]\end{cases}\cdot(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\ln^{n-1}x_n}{(-1)^n\frac{1}{n!}\ln^n x_n}$$

$$=-\frac{n\ln^{n-1}x_{n-1}}{\ln^n x_n}\frac{1}{x_{n-1}},\qquad 0<x_n<x_{n-1}<1$$

פתרון לתרגיל 9.17

<u>סעיף א</u>

מגיאומטריה,

$$L=\frac{X}{\cos\Theta}=\frac{1}{\cos\Theta}$$
$$H=L\sin\Theta=\tan\Theta$$

ולכן, עבור L נקבל

$$F_L(\ell)=P(L<\ell)=P\left(\frac{1}{\cos\Theta}<\ell\right)=P\left(\cos\Theta>\frac{1}{\ell}\right)=P\left(\Theta>\arccos\frac{1}{\ell}\right)=\int_{\arccos\frac{1}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=1-\sin\arccos\tfrac{1}{\ell}$$

$$\Rightarrow\ f_L(\ell)=-\cos\arccos\tfrac{1}{\ell}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\ell^2}}}\right)\left(-\frac{1}{\ell^2}\right)=-\frac{1}{\ell^2\sqrt{\ell^2-1}},\qquad \ell>1$$

או עי"פ הנוסחה,

$$f_L(\ell)=\left|h^{-1}(\ell)'\right|f_\Theta\left(h^{-1}(\ell)\right)\underset{h^{-1}(x)=\arccos\frac{1}{x}}{=}\left|-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\ell^2}}}\left(-\frac{1}{\ell^2}\right)\right|\cos\arccos\tfrac{1}{\ell}=\frac{1}{\ell^2\sqrt{\ell^2-1}}$$

ועבור H נקבל

$$F_H(h)=P(H<h)=P(\tan\Theta<h)=P(\Theta<\arctan h)=\int_0^{\arctan h}\cos\theta d\theta=\sin\arctan h$$

$$\Rightarrow\ f_H(h)=\frac{\cos\arctan h}{h^2+1}$$

חישוב התוחלות:

$$EL=E\frac{1}{\cos\Theta}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta}\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$EH=E\tan\Theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=-\cos\tfrac{\pi}{2}+1=1$$

<u>סעיף ב</u>

נחשב את הקבוע:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,\Theta}(x,\theta)\,dxd\theta = C\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{x=0}^{\cos\theta}\frac{x^3}{\cos\theta}dxd\theta = \frac{C}{4}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x^4}{\cos\theta}\right]_0^{\cos\theta}d\theta = \frac{C}{4}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta = \frac{C}{4}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(1-\sin^2\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{C}{4}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta - \frac{C}{4}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos\theta d\theta = \frac{C}{4}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{C}{12}\left[\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{C}{6} = 1 \;\Rightarrow\; C = 6$$

אנו יודעים את הצפיפות של (X,Θ), ואת הטרנספורמציה והטרנספורמציה ההפוכה (בקלות מגאומטריה):

$$T:\begin{cases} H = X\tan\Theta \\ L = \dfrac{X}{\cos\Theta}\end{cases} \;\Rightarrow\; T^{-1}:\begin{cases}\Theta = \arcsin\dfrac{H}{L} \\ X = \sqrt{L^2-H^2}\end{cases}$$

ולכן, ע"פ הנוסחה למעבר בין צפיפויות של וקטורים:

$$f_{L,H}(\ell,h) = \left|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial h} & \dfrac{\partial x}{\partial \ell} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial h} & \dfrac{\partial\theta}{\partial\ell}\end{matrix}\right| f_{X,\Theta}\left(\sqrt{\ell^2-h^2},\arcsin\frac{h}{\ell}\right) = \left|\begin{matrix}-\dfrac{h}{\sqrt{\ell^2-h^2}} & \dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2-h^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{\ell^2-h^2}} & -\dfrac{h}{\ell}\dfrac{1}{\sqrt{\ell^2-h^2}}\end{matrix}\right|\cdot 6\frac{\left(\ell^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\cos\arcsin\frac{h}{\ell}}$$

$$= 6\left|\frac{h}{\ell^2-h^2}\frac{h}{\ell} - \frac{\ell}{\ell^2-h^2}\right|\frac{\left(\ell^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\cos\arcsin\frac{h}{\ell}} = 6\left|\frac{1}{\ell^2-h^2}\frac{h^2-\ell^2}{\ell}\right|\frac{\left(\ell^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\frac{h^2}{\ell^2}}} = 6\frac{1}{\ell}\frac{\left(\ell^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{\ell^2-h^2}{\ell^2}}}$$

$$= 6\frac{\left(\ell^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\ell^2-h^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 6\left(\ell^2-h^2\right),\qquad 0<h<\ell<1$$

חישוב $f_\Theta(\theta)$:

$$f_\Theta(\theta) = 6\int_0^{\cos\theta}\frac{x^3}{\cos\theta}dx = \frac{6}{4\cos\theta}\left[x^4\right]_0^{\cos\theta} = \frac{3}{2}\cos^3\theta$$

חישוב $E(H\mid L)$:

$$E(H\mid L) = E(L\sin\Theta\mid L) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ell\sin\theta\frac{3}{2}\cos^3\theta d\theta = -\frac{3}{2}\ell\left[\frac{\cos^4\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\ell$$

כעת נחשב את פונקצית הצפיפות של ℓ ושל h :

$$f_L(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty}f_{L,H}(\ell,h)dh = 6\int_0^{\ell}\left(\ell^2-h^2\right)dh = 6\left[\ell^2h-\frac{1}{3}h^3\right]_0^{\ell} = 4\ell^3,\qquad 0<\ell<1$$

$$f_H(h) = \int_{-\infty}^{\infty}f_{L,H}(\ell,h)d\ell = 6\int_h^1\left(\ell^2-h^2\right)d\ell = 6\left[\frac{\ell^3}{3}-h^2\ell\right]_h^1 = 6\left(\frac{1}{3}-h^2-\frac{h^3}{3}+h^3\right) = 2-6h^2+4h^3,\qquad 0<h<1$$

$$EL = \int_{-\infty}^{\infty}\ell f_L(\ell)d\ell = 4\int_0^1\ell^4d\ell = \frac{4}{5}\left[\ell^5\right]_0^1 = \frac{4}{5}$$

פתרון לתרגיל 9.21

<u>סעיף א</u>

נניח שהמשתתף הראשון השיג תוצאה X. לכן ההסתברות להשיג תוצאה טובה יותר היא

$$p = \int_X^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_X^{\infty} = e^{-\lambda X}$$

וההסתברות להשיג תוצאה נמוכה יותר היא

$$q = 1-e^{-\lambda X}$$

לכן, כדי שהמשתתף ה N ישיג תוצאה גבוהה יותר, שאר המשתתפים שלפניו צריכים להיכשל במשימה:

$$p_{N|X}(n|x)=\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-2}e^{-\lambda x},\ n\ge 2$$

ואז

$$EN=1+E\left(E\left(N|X\right)\right)=1+E\frac{1}{e^{-\lambda X}}=1+\int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{e^{-\lambda x}}\lambda e^{-\lambda x}dx=\infty$$

וכדי שהמשתתף ה N ישיג תוצאה נמוכה יותר, שאר המשתתפים שלפניו צריכים להיכשל במשימה:

$$p_{N|X}(n|x)=\left(e^{-\lambda x}\right)^{n-2}\left(1-e^{-\lambda x}\right),\qquad n\ge 2$$

ואז

$$EN=1+E\left(E\left(N|X\right)\right)=1+E\frac{1}{1-e^{-\lambda X}}=1+\int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{1-e^{-\lambda x}}\lambda e^{-\lambda x}dx=1+\lambda\int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}-1}dx=\infty$$

<u>סעיף ב</u>

באופן כללי, נקבל

$$EN=1+E\left(E\left(N|X\right)\right)=1+E\frac{1}{\int_X^{\infty}f_X(x)dx}=1+\int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{1-F_X(x)}f_X(x)dx\underset{\substack{u=F_X(x)\\du=f_X(x)dx}}{=}1+\int_{u=0}^{1}\frac{du}{1-u}=1-\ln(1-u)\Big|_0^1=\infty$$

$$EN=1+E\left(E\left(N|X\right)\right)=1+E\frac{1}{1-\int_X^{\infty}f_X(x)dx}=1+\int_{x=0}^{\infty}\frac{1}{F_X(x)}f_X(x)dx\underset{\substack{u=F_X(x)\\du=f_X(x)dx}}{=}1+\int_{u=0}^{1}\frac{du}{u}=1+\ln u\Big|_0^1=\infty$$

<u>סעיף ג</u>

כעת, בהינתן שהמתחרה הראשון קיבל תוצאה I, ההסתברות לנטול את ההובלה היא

$$p=\frac{4-I}{3}$$

ולכן, כאשר שוב מבוצעים כאן סדרת ניסויי ברנולי עם פרמטר p,

$$EN=1+E\left(E\left(N|X\right)\right)=1+E\frac{1}{p}=1+E\frac{3}{4-I}=1+3\left(\frac{1}{4-1}\frac{1}{3}+\frac{1}{4-2}\frac{1}{3}+\frac{1}{4-3}\frac{1}{3}\right)=1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\right)=\frac{17}{6}$$

שני הענפים (להשיג תוצאה נמוכה או גבוהה יותר) סימטריים, ולכן נקבל תוחלות זהות.

שאלה נוספת 1

יהי (X,Y,Z) ו"א בעל הצפיפות הבאה:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z)=Ce^{-0.5x^2-0.5y^2-z^2+yz-x-2y+4z}$$

<u>סעיף א</u>

חשב את הקבוע C.

<u>סעיף ב</u>

מהי פונקצית הצפיפות המשותפת של המשתנה $U=X-2Y$ ושל המשתנה $V=2X+Y-Z$?

<u>סעיף ג</u>

חשב את $P(Y+Z>2X+3)$

שאלה נוספת 2

יהי (X_1,X_2,X_3,X_4) ו"א גאוסי בעל תוחלת 0 ומטריצת הקוריאנס הבאה:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&0&0&2\end{pmatrix}$$

<u>סעיף א</u>

מהו החזאי האופטימאלי של X_1 ע"י X_4?

<u>סעיף ב</u>

מהו החזאי האופטימאלי של X_1 ע"י X_3, X_4 ?

<u>סעיף ג</u>

הוכח שהוקטור האקראי $\left(E\left(X_1 \mid X_4\right), E\left(X_2 \mid X_3\right)\right)$ הוא גאוסי וחשב את הפרמטרים שלו.

פתרון שאלה נוספת 1

<u>סעיף א</u>

נכתוב את הצפיפות של הוקטור הגאוסי בצורה נוחה יותר:

$$f_{X,Y,Z}\left(x,y,z\right) = Ce^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+2z^2-2yz+2x+4y-8z\right)}$$

ולכן נוכל "לנחש" את מטריצת הקו-ווריאנס ההפוכה:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן (שיטה מקוצרת להפוך מטריצה 3×3 מיוחדת כמו שלנו היא להפוך רק את המטריצה הקטנה הפנימית בגודל 2×2 ולחלק בדטרמיננטה של זו) נקבל:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נחשב את וקטור התוחלות ע"י מציאת המקסימום של הצפיפות (גזירה והשוואה ל 0):

$$\begin{cases} 2x+2=0 \\ 2y-2z+4=0 \\ 4z-2y-8=0 \end{cases}$$

ולכן

$$\vec{\mu} = \left(-1,0,2\right)$$

כעת נשתמש בנוסחה ונקבל:

$$C = \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^k \left|\Sigma\right|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{\mu}\Sigma^{-1}\vec{\mu}^T\right\}\Bigg|_{k=3} = \left(2\pi e^3\right)^{-\frac{3}{2}}$$

<u>סעיף ב</u>

מכיוון ש

$$U = X-2Y = \left(1,-2,0\right)\left(X,Y,Z\right) = \vec{u}\left(X,Y,Z\right)$$
$$V = 2X+Y-Z = \left(2,1,-1\right) = \vec{v}\left(X,Y,Z\right)$$

נקבל כי

$$\Sigma_{UV} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \Sigma_{XYZ}\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ובנוסף

$$\begin{cases} EU = \vec{u}\vec{\mu} = -1 \\ EV = \vec{v}\vec{\mu} = -4 \end{cases} \Rightarrow \vec{\mu} = \left(-1,-4\right)$$

ולכן

$$f_{U,V}\left(u,v\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\right)^2\left|\Sigma\right|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{\mu}\Sigma_{UV}^{-1}\vec{\mu}^T\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\left(u+1\right)^2}{9}+\frac{\left(v+4\right)^2}{5}\right)\right\}$$

<u>סעיף ג</u>

נגדיר ראשית משתנה חדש

$$W = Y + Z - 2X$$

שהוא ק"ל של משתנים גאוסים, ולכן משתנה גאוסי בעצמו. כעת נחשב את התוחלת והשונות שלו:

$$EW = EY + EZ - 2EX = 4$$

$$\begin{aligned}\sigma_W^2 &= \sigma_{Y+Z-2X}^2 = \sigma_{Y+Z}^2 + \sigma_{-2X}^2 + 2\operatorname{cov}(Y+Z,-2X)\\ &= \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2 + 2\operatorname{cov}(Y,Z) + 4\sigma_X^2 + 2\left(\operatorname{cov}(Y,-2X) - 2\operatorname{cov}(Z,X)\right)\\ &= 2+1+2\cdot 1+4\cdot 1+2(0-2\cdot 0) = 9\end{aligned}$$

כלומר

$$W \sim N(4,9)$$

ולכן, אם $Z \sim N(0,1)$:

$$\begin{aligned}P(Y+Z>2X+3) &= P(W>3) = P\left(\frac{W-4}{3} > \frac{3-4}{3}\right) = P\left(Z > -\frac{1}{3}\right)\\ &= 1 - P\left(Z \le -\frac{1}{3}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{1}{3}\right)\end{aligned}$$

פתרון שאלה נוספת 2

<u>סעיף א</u>

עבור וקטור גאוסי, חזאים אופטמלים אם תמיד לי ניארים, ולכן נוכל להשתמש בנוסחה לחזאי הליניארי:

$$E(X_1 \mid X_4) = EX_1 + \frac{\operatorname{cov}(X_1,X_4)}{\sigma_{X_4}^2}(X_4 - EX_4) = \frac{X_4}{4}$$

<u>סעיף ב</u>

מכיוון ש X_1 ו X_3 בלתי מתואמים ($\operatorname{cov}(X_1,X_4)=0$), ומכיוון שבוקטור גאוסי עסקינן, X_1 ו X_3 הם גם בלתי תלויים, ולכן

$$E(X_1 \mid X_3, X_4) = E(X_1 \mid X_4) = \frac{X_4}{4}$$

<u>סעיף ג</u>

נחשב:

$$E(X_1 \mid X_4) = \frac{X_4}{4}$$

$$E(X_2 \mid X_3) = EX_2 + \frac{\operatorname{cov}(X_2,X_3)}{\sigma_{X_3}^2}(X_3 - EX_3) = \frac{X_3}{2}$$

כלומר, הוקטור $\left(E(X_1 \mid X_4), E(X_2 \mid X_3)\right)$ הוא ק"ל של משתנים שהם רכיבי וקטור גאוסי, ולכן הוא בעצמו וקטור גאוסי.