הפתק הסגול

www.technion.co.il

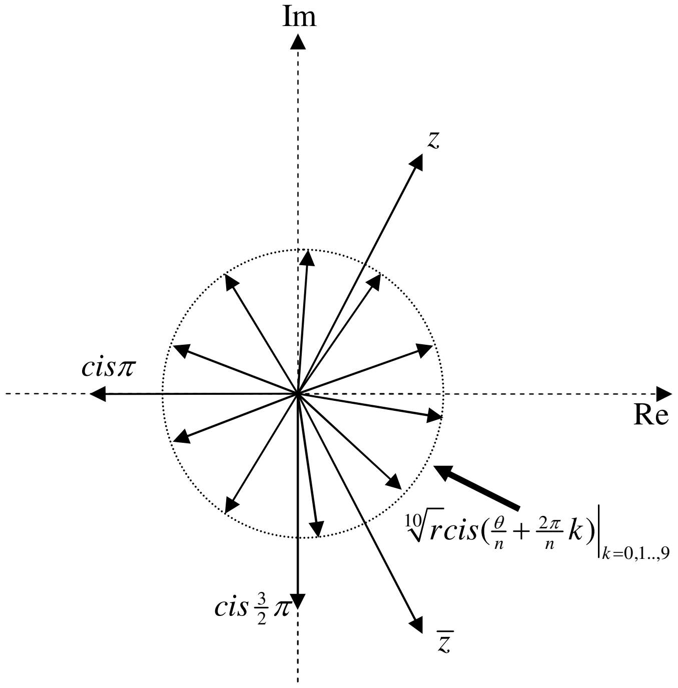
אלגברה 1מ'

104016

סיכום הקורס

תוכן עניינים

מספרים מרוכבים



תוצאות חשובות :

1. $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$
2. $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$
3. $\overline{z\pm w}=\overline{z}\pm\overline{w}$
4. $z\cdot\overline{z}=|z|^2$
5. $\overline{z\cdot w}=\overline{z}\cdot\overline{w}$
6. $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
7. $z\in\mathbb{R}\leftrightarrow z=\overline{z}$
8. $\operatorname{Re}(z)=0\leftrightarrow -z=\overline{z}$ (מדומה טהור)

מכפלה וחילוק בהצגה טריגונומטרית :

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

מסקנות :

1. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $\arg(z_1\cdot z_1)=\arg(z_1)+\arg(z_2)$
4. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

משפטים/סתם דברים נחמדים :

1. דה-מואבר : $z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)=r^n cis(n\theta)$
2. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right]_{k=0,1,\ldots,n-1}$
3. לפולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים.
4. אם לפולינום שמקדמיו ממשיים יש שורש מרוכב z_0 אז גם $\overline{z_0}$ שורש שלו.
5. נוסחאות וייטה :

סכום שורשי פולינום ממעלה n : $\sum_{i=1}^{n}z_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ בפרבולה : $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

מכפלת שורשי פולינום ממעלה n : $\prod_{i=1}^{n}z_i=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ בפרבולה : $x_1x_2=\frac{c}{a}$

6. סכום סדרה הנדסית, עבור $q\neq 1$: $S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$
7. סכום סדרה חשבונית : $S_n=\frac{n}{2}\left(a_1+a_n\right)=\frac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$
8. $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
9. אם $|z|=1$ אז $z=\frac{1}{\overline{z}}$, כי הרי $z\overline{z}=|z|^2$ וגם $z\neq 0$.
10. למשוואה עם מספר מרוכב והצמוד שלו אין בהכרח n שורשים, כי z ו $\overline{z}$ שני משתנים שונים!
לדוגמה: $z^3+2z^2+\overline{z}+3=0$ - לא חייבים להיות כאן בדיוק 3 שורשים.

מטריצות

1. מטריצה עם m שורות ו n עמודות: $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$
2. האיבר בשורה i בעמודה j במטריצה A : $(A)_{ij}=a_{ij}$
3. סכום/הפרש מטריצות: $A_{m\times n}\pm B_{m\times n}=C_{m\times n}$: $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$

תכונות: א. $A+B\in F^{m\times n}$

ב. $A+B=B+A$

ג. $A+(B+C)=(A+B)+C$

ד. קיימת $0_{m\times n}\in F^{m\times n}$ כך ש $A+0=A$

ה. קיימת מטריצה נגדית ל A, נסמנה $-A$, כך ש $A+(-A)=0$

4. כפל מטריצה בסקלר: $A_{m\times n},\ \alpha\in F$: $(\alpha A)_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$

תכונות: א. $\alpha A\in F^{m\times n}$

ב. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

ג. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

ד. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

ה. $1A=A$

5. מטריצה מוחלפת A^t של A : מטריצה המקיימת $(A)_{ij}=(A^t)_{ji}$
6. כפל מטריצות: $C_{m\times r}=A_{m\times n}\cdot B_{n\times r}$: $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. חשוב – בכפל מטריצות אין קומוטטיביות.

תכונות כפל מטריצות: א. $A(BC)=(AB)C$

ב. $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

ג. $0A=A0=0$ (עם גדלי 0 מתאימים)

ד. $AI=IA=A$ (עם גדלי I מתאימים)

ה. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$ (ניידות הסקלר)

7. כפל מטריצות – שיטת עליזה מלק:

בכפל AB, נאמר ש B פועלת על עמודות A : דוגמה: $AB=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

סדר התוצאה הוא $(3\times3)(3\times1)=(3\times1)$. תתקבל עמודה אחת, שתהיה בנויה מהקומבינציה הליניארית של עמודות A, כאשר עמודת B היא המקדמים. בדוגמה שלנו, העמודה שתתקבל תהיה פעם אחת עמודה ראשונה של A ועוד פעמיים עמודה שנייה של A פחות עמודה שלישית של A.
באותו אופן מכלילים אם B מכילה יותר מעמודה בודדת – כל עמודה של התוצאה מתקבלת ע"י קומבינציה ליניארית של עמודות A ע"פ ה"מתכון" של העמודה המתאימה ב B.

בכפל AB, נאמר גם ש A פועלת על שורות B - הסבר דומה למקרה הקודם, רק שהכול עם שורות.

8. לכל $A_{n\times n}$: $A^0=I_n,\ A^1=A,\ A^2=A\cdot A,\ A^3=A\cdot A\cdot A,\dots$
9. $A_{n\times n}$ סימטרית $\Leftrightarrow a_{ij}=a_{ji}\Leftrightarrow A^t=A$
10. $A_{n\times n}$ אנטי סימטרית $\Leftrightarrow a_{ij}=-a_{ji}\Leftrightarrow A^t=-A$. נובע מההגדרה ש $a_{ii}=0$.
11. מטריצה $A_{n\times n}$ אלכסונית אם כל איבריה מחוץ לאלכסון אפסים.
12. מטריצה $A_{n\times n}$ סקלרית אם היא אלכסונית ו $a_{ii}=\alpha,\ \ \alpha\in F$.
13. מטריצה $A_{n\times n}$ נקראת מטריצת יחידה אם היא סקלרית ו $\alpha=1$. סימונה I_n.
14. מטריצה $A_{n\times n}$ משולשת עליונה (תחתונה) אם יש לה איברים שונים מאפס רק מעל (מתחת) האלכסון.
15. עקבת המטריצה: $trace(A_{n\times n})=tr(A_{n\times n})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

16. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
17. $tr(A+B)=tr(B+A)$
18. $tr(AB)=tr(BA)$
19. $tr(\alpha A)=\alpha\cdot tr(A)$
20. מטריצה תקרא מדורגת אם היא תקיים את שני התנאים הבאים:
    א. אם יש לא שורות אפסים, אז הן בתחתיתה.
    ב. מספר האפסים לפני האיבר הראשון ששונה מאפס בכל שורה שאינה אפסים (האיבר הנבחר, האיבר המצוין) גדל ממש משורה לשורה.
21. מטריצה מדורגת תקרא קנונית (מצומצמת שורה) אם היא תקיים את שני התנאים הבאים:
    א. כל האיברים הנבחרים (המצוינים) שווים ל-1.
    ב. כל שאר האיברים בעמודות בהם מופיע איבר נבחר שווים ל-0.
22. $B_{m\times n}$ שקולת שורות (עמודות) ל $A_{m\times n}$ אם ניתן לקבל את שורות B לאחר הפעלת מספר סופי של פעולות אלמנטאריות על שורות (עמודות) A.
23. הפעולות האלמנטאריות על שורות (עמודות) במטריצה:
    א. החלפת שתי שורות (עמודות) ביניהן: $r_i\leftrightarrow r_j$ ($c_i\leftrightarrow c_j$)
    ב. הכפלת שורה (עמודה) i בסקלר α: $r_i\to\alpha r_i$ ($c_i\to\alpha c_i$)
    ג. הוספת כפולה ב α של שורה (עמודה) i לשורה (עמודה) j: $r_i\to r_i+\alpha r_j$ ($c_i\to c_i+\alpha c_j$)
24. דרגת מטריצה A תסומן $rank(A)=r(A)$ והיא מספר השורות הבלתי תלויות המכסימלי שבה.

<u>מטריצות - תוצאות/טענות:</u>

1. אם $A_{n\times n}$ אלכסונית אז היא בפרט סימטרית ולכן $A^t=A$
2. מטריצות מוחלפות: $\left(A^t\right)^t=A$, $(A\pm B)^t=A^t\pm B^t$, $(AB)^t=B^tA^t$, $\left(A^k\right)^t=\left(A^t\right)^k$
3. $AB=0$ לא גורר $A=0$ או $B=0$; לדוגמה: $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$
4. מטריצה סקלרית מתחלפת בכפל עם כל מטריצה ריבועית מאותו סדר: $\alpha I_n\cdot A_{n\times n}=A_{n\times n}\cdot\alpha I_n$
5. לכל $A_{n\times n}$, $\left(A-A^t\right)$ היא אנטי סימטרית.
6. לכל $A_{n\times n}$, $\left(A+A^t\right)$ היא סימטרית.
7. סכום מטריצות (אנטי) סימטריות הוא מטריצה (אנטי) סימטרית.
8. לכל A אנטי סימטרית, $\left((A)^{2k}\right)^t=A^{2k}$ (A בחזקה זוגית סימטרית)
9. לכל A אנטי סימטרית, $\left((A)^{2k-1}\right)^t=-A^{2k-1}$ (A בחזקה אי-זוגית אנטי סימטרית)
10. מרחב שורה של $A\in F^{m\times n}$ הוא המרחב הנפרש ע"י שורותיה, הוקטורים $v_i\in F^n,\quad 1\le i\le m$
11. מרחב עמודה של $A\in F^{m\times n}$ הוא המרחב הנפרש ע"י עמודותיה, הוקטורים $v_i\in F^m,\quad 1\le i\le n$
12. מרחב השורה ומרחב העמודה בד"כ לא שווים! גם לא במטריצות ריבועיות!
13. לכל פעולה אלמנטארית יש פעולה הפוכה לה.
14. כל מטריצה שקולת שורות למטריצה מדורגת. כל מטריצה שקולת שורה למטריצה קנונית אחת ויחידה.
15. לשתי מטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורה.
16. במטריצה מדורגת, מספר השורות שאינן אפסים היא דרגת המטריצה ($r(A)$).
17. למטריצות שקולות שורה דרגות זהות.
18. בכל מטריצה, דרגת השורות = דרגת העמודות, ולכן <u>מימד</u> מרחב השורה = <u>מימד</u> מרחב העמודה.
19. במטריצה סימטרית ואנטי-סימטרית, מרחב השורה שווה למרחב העמודה, אך:
20. מרחבי שורה ועמודה שווים לא גורר מטריצה סימטרית/אנטי סימטרית.
21. כל מטריצה $A_{n\times n}$ ניתן לכתוב כסכום סימטרית ואנטי סימטרית: $A=\frac{B+B^t}{2}+\frac{B-B^t}{2}$
    כי $\frac{B+B^t}{2}$ סימטרית ו $\frac{B-B^t}{2}$ אנטי סימטרית.
22. מכפלת מטריצות משולשות עליונות (תחתונות) היא משולשת עליונה (תחתונה)
23. $r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$

מרחבים וקטוריים ותת-מרחבים וקטוריים

יהיו U,W תתי מרחבים של מרחב וקטורי V:

1. $U\cap W$ תמיד תת מרחב של V.
2. מלבד המקרה הטריביאלי ש $W\subseteq U$ או $U\subseteq W$, $W\cup U$ לעולם אינו תת-מרחב.
3. המרחבים הטריביאלי: המרחב $\{0\}$ הוא תת מרחב של כל מרחב וקטורי. V תת מרחב של V.
4. הגדרת סכום של תת-מרחבים: $S=U+W=\{u+w\,|\,u\in U, w\in W\}$
5. $U+W$ תמיד תת מרחב של V.
6. $U\subseteq U+W$ וגם $W\subseteq U+W$.
7. הגדרת סכום ישר: אם כל $v\in V$ ניתן לכתיבה כסכום של $u\in U$ ו $w\in W$, והצגה זו יחידה אזי V הוא סכום ישר של U,W ומסמנים $V=U\oplus W$.
8. משפט: $V=U\oplus W$ $\Leftrightarrow$ כל $v\in V$ ניתן לכתיבה כ $v=u+w,\ u\in W, w\in W$ וגם $U\cap W=\{0\}$.
9. אם W מרחב המטריצות הסימטריות ו U מרחב המטריצות האנטי סימטריות, $U\oplus W=\mathbb{R}^{n\times n}$.
10. $V=U\oplus W=U\oplus Z$ לא גורר $Z=W$.
11. מציאת וקטור האפס במרחב עם פעולות שונות ע"י הכלל $0\cdot v=\vec{0}$.

<u>הגדרה – קומבינציה ליניארית</u>:

יהי V מרחב וקטורי מעל K ויהיו $v_1,v_2,\ldots v_m\in V$, אזי וקטור שצורתו $v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_mv_m$ כאשר $1\le i\le m$, $\alpha_i\in K$ הוא קומבינציה (צירוף) ליניארי של $v_1,v_2,\ldots v_m$.

<u>הגדרה – פרישה ליניארית</u>:

אוסף כל הקומבינציות הליניאריות של $v_1,v_2,\ldots v_m\in V$ נקרא הפרישה הליניארית של $v_1,v_2,\ldots v_m$, ומסומן: $Sp\{v_1,v_2,\ldots v_m\}$, מלשון $Span$.

מסקנה: בהינתן קבוצה פורשת $\{v_1,v_2,\ldots v_m\}\subset V$, אם נוסיף לה וקטורים מ V, היא עדיין תפרוש.

<u>המשפט על פרישה ליניארית</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל K ותהי $Y=\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ תת-קבוצה לא ריקה של V, ותהי $Sp(Y)=Sp\{v_1,v_2,\ldots v_m\}=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_mv_m\,|\,\alpha_i\in K\}$, אזי $Sp(Y)$ הוא תת-מרחב של V המכיל את Y, וגם אם U ת"מ של V המקיים $Y\subseteq U$ אז $Sp(Y)\subseteq U$.

<u>הגדרה – תלות ליניארית</u>:

יהי V מרחב וקטורי מעל K ותהי $S=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}\subset V$. S תקרא תלויה ליניארית מעל השדה K אם יש מקדמים $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K$ <u>שלא כולם שווים אפס</u> כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n=0$.

<u>משפטים/מסקנות</u>:

1. כל תת קבוצה של קבוצה בלתי תלויה היא בלתי תלויה.
2. קבוצה שמכילה תת קבוצה תלויה היא עצמה תלויה.
3. קבוצה של שני וקטורים תלויה אס"ם הוקטורים פרופורציוניים
4. $S=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$ תלויה אס"ם קיים וקטור שהוא:
   א. קומבינציה ליניארית של קודמיו (כאן חשוב ש $0\notin S$).
   ב. קומבינציה ליניארית של הוקטורים הבאים אחריו (כאן חשוב ש $0\notin S$).
   ג. קומבינציה ליניארית של הוקטורים האחרים.
5. כל קבוצת פולינומים שמעלותיהם שונות זו מזו היא בלתי תלויה.
6. כל קבוצה שמכילה את וקטור האפס תלויה.
7. $S=\{v_1,v_2,\ldots v_n\}$ תלויה אם לאחר דירוג המטריצה A שהוקטורים הם שורותיה תתקבל לפחות שורת אפסים אחת, כלומר $r(A)<n$

מערכות משוואות

תרגום למטריצות:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

המשפט על פתרון מערכת משוואות ליניאריות:

נתונה המערכת $Ax=b$, כש $A_{m\times n}$. n - מספר המשתנים; m - מספר המשוואות.

נבנה את $A^*=\left(A\,|\,b\right)$ (מטריצת מקדמים מורחבת). אזי:

א. למערכת יש פתרון אס"ם $r=r(A)=r(A^*)$.

ב. אם יש פתרון אז יש $n-r$ דרגות חופש

ג. אם $n=r$ אז יש 0 דרגות חופש, כלומר פתרון יחיד

עבור מערכת הומוגנית, פתרונותיה מהווים תמיד מרחב וקטורי, ולכן תמיד יש אינסוף פתרונות (כש $r(A)<n$) או הפתרון הטריביאלי, $x=0$, כאשר $r(A)=n$. עובדה זו מדגימה את המשפט:

למערכת $Ax=b$ יש פתרון אס"ם b קומבינציה ליניארית של עמודות A.

בעצם $Ax=0$ שקול לק"ל של עמודות A ומציאת תלות ליניארית: $A^1x_1+A^2x_2+\ldots+A^nx_n=0$, כאשר A^j מסמן עמודה j של A, ו $\vec{x}=x_1,\ldots,x_n$.

שלבים בפתרון מערכת משוואות:

1. בניית מטריצת המקדמים המורחבת $(A\,|\,b)$
2. דירוג $(A\,|\,b)$ (רצוי לקנונית אם צריך ממש למצוא פתרונות)
3. קובעים אם המערכת פתירה:
   א. אם יש שורה מצורה $(0\ldots0\,|\,a)$, $a\neq0$, זוהי סתירה ולכן אין פתרון. אחרת:
   ב. קובעים מספר דרגות חופש F ע"פ הביטוי: $F=n-r(A)$
4. פותרים.

שלבים בפתרון מערכת משוואות עם פרמטר λ:

1. האם מספר השורות ששונות מאפס שווה למספר הנעלמים?
   א. אם כן, כדי למצוא פתרון יחיד, צריכים לדרוש שכל האיברים המובילים $\neq 0$, כמובן לאחר דירוג
   ב. אם לא, אין פתרון יחיד – נחפש מקרים שמובילים לסתירה בנתונים ולחוסר פתרון
2. לאחר (1) נשאר עם מספר מקרים קטן, ואותם יש לבדוק אינדיבידואלית.
3. לוודא לבסוף שטיפלנו בכל מקרה אפשרי עבור λ.

הגדרה – בסיס ומימד:

יהי V מרחב וקטורי מעל K ותהי $e=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}\subset V$. נקרא ל e בסיס של V אם:

א. e פורשת את V

ב. e בלתי תלויה

מספר האיברים בבסיס הוא מימד המרחב ומסומן: $\dim V=n$.

תוספת: אם $W=Sp(\varnothing)$ אז $W=\{0\}$, $\dim W=0$.

משפטים/מסקנות

1. יהי V מרחב וקטורי מעל K. יהיו $S=\{v_1,v_2,...v_n\}$ קבוצה פורשת את V ו $W=\{w_1,w_2,...,w_m\}$ בלתי תלויה. אזי $m\le n$. כמוכן, V נפרס ע"י קבוצה מהצורה $\{w_1,w_2,...,w_n,v_{i_1},v_{i_2},...v_{i_{m-n}}\}$
2. מימד של מרחב וקטורי מוגדר היטב. כלומר, המימד לא תלוי באיזה בסיס נבחר.
3. יהי V מרחב וקטורי מעל K. נניח $\dim V=n$, אזי:
   א. כל $n+1$ וקטורים ב V תלויים.
   ב. לכל קבוצה בלתי תלויה ב V ניתן להוסיף איברים עד שתהיה בסיס.
   ג. כל n וקטורים בלתי תלויים מהווים בסיס ל V.
   ד. כל n וקטורים פורשים מהווים בסיס ל V.
4. קבוצה פורשת מינימאלית מהווה בסיס למרחב.
5. קבוצה בלתי תלויה מכסימלית מהווה בסיס למרחב.
6. אם W תת-מרחב של V אז $\dim W\le\dim V$. בפרט, אם $\dim W=\dim V$ אז $W=V$.
7. מימד מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית $A_{m\times n}x=0$ הוא מספר דרגות החופש, כלומר $n-r(A)$.
8. אם U, W תתי מרחבים של V אז:
   $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$
   ובפרט, $\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W$

הגדרה – קואורדינאטות:

יהי V מרחב וקטורי מעל K ויהי $e=\{e_1,e_2,...,e_n\}\subset V$ בסיס כלשהו של V.

אם $v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+...+\alpha_ne_n$, אז נגדיר את וקטור הקואורדינאטות של v לפי e כך: $[v]_e=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$.

הערה: הבסיס סדור ולכן יש חשיבות גם לסדר הקואורדינאטות.

הגדרה – מטריצה הפיכה:

תהי $A_{n\times n}$. נאמר ש A הפיכה אם קיימת מטריצה $B_{n\times n}$ כך ש $AB=BA=I_n$. B תקרא ההפוכה של A ותסומן $B=A^{-1}$.

משפט: תהיינה A ו B הפיכות. אזי:

1. ההופכית של A אחת ויחידה.
2. AB גם הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.
   הכללה: תהיינה $A_1,A_2,...,A_k$ הפיכות, אזי: $(A_1A_2\cdot...\cdot A_k)^{-1}=A_k^{-1}\cdot A_{k-1}^{-1}\cdot...\cdot A_1^{-1}$
3. $A+B$ לא בהכרח הפיכה.
4. A^t גם הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

הגדרה – מטריצה אלמנטארית:

מטריצה אלמנטארית היא זו שמתקבלת מ I_n, לאחר שהופעלה עליה פעולה אלמנטארית אחת בשורותיה. נסמנה $E=e(I_n)$.

טענת עזר: כל מטריצה אלמנטארית $E=e(I_n)$ הפיכה וההופכית שלה $E^{-1}=e^{-1}(I_n)$ כש e^{-1} היא הפעולה ההפוכה של e.

טענה: לבצע פעולה אלמנטארית על A שקול להכפלת A במטריצה אלמנטארית מתאימה: $e(A)=EA$.

ומכאן שיטה למציאת A^{-1}: דרג את $(A\,|\,I_n)$ עד שתגיע ל $(I_n\,|\,A^{-1})$.

סיכום: תהי $A_{n\times n}$ אזי הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה (רגולארית, או לא סינגולארית)
2. $r(A)=n$
3. A שקולות שורות ל I_n
4. שורות A בת"ל
5. עמודות A בת"ל
6. למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד
7. למערת $Ax=0$ יש פתרון יחיד – הפתרון הטריביאלי
8. A ניתנת לכתיבה כמכפלת מטריצות אלמנטאריות

9. $|A| \neq 0$

10. $\lambda = 0$ אינו ע"ע של A

הגדרה – מינור:

המינור ה - i, j של מטריצה הוא הדטרמיננטה המתקבלת מ A לאחר מחיקת שורה i ועמודה j ומסומן M_{ij}.

משפטים:

1. משפט לפלס:
ניתן לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה או עמודה.
2. כשמחליפים שתי שורות או עמודות ביניהן, ערך הדטרמיננטה משתנה פי (-1)
3. כפל שורה או עמודה במספר k משנה את ערך הדטרמיננטה פי k
4. הוספת כפולה במספר של שורה i לשורה j (או עמודה i לעמודה j) לא משנה את ערך הדטרמיננטה
5. דטרמיננטה בעלת שורת אפסים שווה אפס
6. דטרמיננטה בעלת שתי שורות (או עמודות) פרופורציוניות שווה אפס
7. דטרמיננטה של מטריצה משולשת היא מכפלת אברי האלכסון
8. ניתן לפצל דטרמיננטה מסדר כלשהו, עבור סכום בשורה או עמודה. לדוגמה:
$$\begin{vmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}$$
9. $|\alpha A| = \alpha^n |A|$
10. $|A^t| = |A|$
11. $|AB| = |A||B|$
12. $|AB| = |BA|$
13. $|A^k| = |A|^k$
14. אם A הפיכה אז $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

הגדרה – adjoint:

עבור $A_{n\times n}$, נגדיר מטריצת $adj(A)$ כך: $\left(adj(A)_{ij}\right) = (-1)^{i+j} \cdot M_{ji}$.

תוצאה מפיתוח דטרמיננטות: $(-1)^{j+1}a_{i1}M_{j1} + (-1)^{j+2}a_{i2}M_{j2} + \ldots + (-1)^{j+n}a_{in}M_{jn}$

תוצאות מהגדרת $adj(A)$:

1. $A \cdot adj(A) = |A| I$ ואז $A \cdot \frac{adj(A)}{|A|} = I$. כלומר $A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$.
2. $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}{ad-bc}$$

שימוש בדטרמיננטות בפתרון משוואות – שיטות קרמר:

כאשר $Ax = b$, רלוונטי רק כאשר A הפיכה, כלומר $|A| \neq 0$. נסמן $|A| = \Delta$.

אזי, לכל $x_i \in \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq n$, $x_i = \frac{\Delta i}{\Delta}$, כש Δi מתקבל מהחלפת b עם עמודה i.

העתקות ליניאריות

הגדרה - העתקה ליניארית:

יהיו V,U מרחבים וקטוריים מעל K ונניח ש $T:V\to U$ טרנספורמציה שמקיימת:

1. $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2) \quad \forall v_1,v_2\in V:$
2. $T(kv)=kT(v) \quad \forall k\in K,\ \forall v\in V:$

אזי T נקראת טרנספורמציה ליניארית.

שני התנאים שקולים לתנאי הבודד: $T(\alpha v_1+\beta v_2)=\alpha T(v_1)+\beta T(v_2) \quad \forall\alpha,\beta\in K,\ \forall v_1,v_2\in V:$.

משפט: אם $T:V\to U$ ט"ל שמוגדרת על אברי בסיס V, אז T מוגדרת היטב.

כלומר: אם $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V ואם $u_1,\dots u_n\in U$ כלשהם (בפרט תלויים או זהים), אז יש ט"ל אחת ויחידה כך ש:

$$T(v_1)=u_1\ ,\ T(v_2)=u_2\ ,\ \dots\ ,\ T(v_n)=u_n$$

הגדרות נוספות:

1. $F:X\to Y$, F תקרא חד-חד ערכית אם $F(x_1)\neq F(x_2) \Rightarrow x_1\neq x_2$, לכל $x_1,x_2\in X$.
   תוצאה: אם $F(x_1)=F(x_2)$ ו F חח"ע אז $x_1=x_2$.
2. $F:X\to Y$ נקראת על אם $\mathrm{Im}(F)=Y$
3. $\dim(\mathrm{Im}\,T)=r(T)$ דרגת הטרנספורמציה.
4. $\dim(\ker T)$ נקרא האפסות של הטרנספורמציה (nullity).
5. ט"ל כזו: $T:V\to V$ (ממרחב לעצמו) נקראת אופרטור ליניארי.
6. $T,S:V\to V$ ט"ל. נגדיר:
   $(T+S):V\to V$ כך: $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$
   $(\alpha T):V\to V$ כך: $(\alpha T)(v)=\alpha T(v)$
   $(ST):V\to V$ כך: $(ST)(v)=S(T(v))$
7. אם A מטריצה או אופרטור ליניארי, אז:
   אם A הפיכה היא נקראת רגולארית, או לא סינגולארית
   אם A לא הפיכה היא נקראת סינגולארית, או לא רגולארית
8. $T:V\to U$ חח"ע ועל, אז T נקראת איזומורפיזם (דמיון צורה). V,U נקראים מרחבים איזומורפיים.
   מסמנים $U\approx V$, כלומר V איזומורפי ל U.

משפטים/טענות: $T:V\to U$ ט"ל. אזי:

1. T חח"ע אס"ם $\ker T=\{0\}$
2. $T(0)=0$, כלומר $0\in\ker T$.
3. כפל במטריצה הוא טרנספורמציה ליניארית.
4. משפט המימדים: $\dim V=\dim(\ker T)+\dim(\mathrm{Im}\,T)$
5. התמונה של $T:V\to U$: $\mathrm{Im}(T)=\{u\in U\,|\,T(v)=u, v\in V\}$ הוא ת"מ של U.
6. הגרעין של $T:V\to U$: $\ker(T)=\{v\in V\,|\,T(v)=0\}$ הוא ת"מ של V.
7. תמונות של קבוצה פורשת V, פורשת את $\mathrm{Im}(T)$
8. F שדה, $A_{m\times n}$. נגדיר $T:F^n\to F^m$ ע"י $T(v)=Av$. אזי $r(A)=r(T)=\dim(\mathrm{Im}\,T)$.
   $T\in\ker T$ אס"ם $T(v)=0$ כלומר $Av=0$. כלומר $\ker T$ הוא אוסף הפתרונות של מע' הומוגנית $Ax=0$
   וכך נקבל את המשפט שדרגות החופש $=\dim(F^n)-\dim(\mathrm{Im}\,T)=n-r(T)=n-r(A)$
9. $T:V\to V$ ט"ל (אופרטור ליניארי), אזי T חח"ע אס"ם T על.
10. $T_1,T_2,T_3:V\to V$, אזי:
    א. $T_1(T_2+T_3)=T_1T_2+T_1T_3$
    ב. $T_1(T_2T_3)=(T_1T_2)T_3$
    ג. $(T_1+T_2)T_3=T_1T_3+T_2T_3$
    ד. $\alpha(T_1T_2)=(\alpha T_1)T_2=T_1(\alpha T_2)$ (ניידות הסקלר)
11. $T:V\to V$ ט"ל חח"ע, ולכן גם על. לכן T^{-1} קיימת, וגם היא ט"ל. ואז $T^{-1}T=TT^{-1}=I$ (טרנספורמציית הזהות).

מטריצה מייצגת של אופרטור ליניארי

<u>הגדרה – מטריצה מייצגת:</u>

תהי $T:V\to V$ ט"ל, ו $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס ל V, וגם:

$$T(v_1)=a_{11}v_1+a_{12}v_2+...+a_{1n}v_n$$
$$T(v_2)=a_{21}v_1+a_{22}v_2+...+a_{2n}v_n$$
$$\vdots$$
$$T(v_n)=a_{n1}v_1+a_{n2}v_2+...+a_{nn}v_n$$

אזי: $$[T]_B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

היא המטריצה המייצגת של T לפי B

משפטים: $T,S:V\to V$ ט"ל, B בסיס ל V. אזי:

1. $[T(v)]_B=[T]_B[v]_B$
2. λ סקלר:

   א. $[T+S]_B=[T]_B+[S]_B$

   ב. $[\lambda T]_B=\lambda[T]_B$

   ג. $[ST]_B=[S]_B[T]_B$

www.technion.co.il © 2005 אבי בנדל

מטריצת מעבר בין בסיסים

<u>הגדרה – מטריצת מעבר:</u>

יהא V מרחב וקטורי. ניקח שני בסיסים: $e=\{e_1,e_2,...,e_n\}$ ו $f=\{f_1,f_2,..,f_n\}$.

נבצע את החישוב:

$$f_1=a_{11}e_1+a_{12}e_2+...+a_{1n}e_n$$
$$f_2=a_{21}e_1+a_{22}e_2+...+a_{2n}e_n$$
$$\vdots$$
$$f_n=a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+...+a_{nn}e_n$$

אזי: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T = P_{e\to f}$ היא מטריצת המעבר מבסיס e לבסיס f.

משפטים: V מ"ו, e,f בסיסים, ו $P_{e\to f}$ מטריצת המעבר מ e ל f:

1. $[v]_e=P_{e\to f}[v]_f$
2. $P_{e\to f}$ הפיכה, ו $(P_{e\to f})^{-1}=P_{f\to e}$
   ולכן $(P_{e\to f})^{-1}[v]_e=P_{f\to e}[v]_e=[v]_f$
3. $T:V\to V$ ט"ל, אז $[T]_f=P_{f\to e}[T]_e P_{e\to f}$
4. $r(T)=r\left([T]_f\right)$

דמיון מטריצות

הגדרה – מטריצות דומות:

A,B שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

אז A,B נקראות דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש: $A=P^{-1}BP$.

משפטים: A,B שתי מטרצות דומות. אזי:

1. מתקיימות שמורות הדמיון ביניהן:
   א. $r(A)=r(B)$
   ב. $tr(A)=tr(B)$
   ג. $|A|=|B|$
2. שתי מטריצות ריבועיות מייצגות אותו אופרטור ליניארי אס"ם הן דומות

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים

הגדרה – לכסינות:

עבור אופרטורים ליניאריים:

$T:V\to V$ לכסינה (ניתנת ללכסון) אם יש ל V בסיס B כך ש $[T]_B$ אלכסונית.

עבור מטריצות:

מטריצה ריבועית מעל השדה F נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית, כלומר אם קיימת P הפיכה כך ש $D=P^{-1}AP$, ו D אלכסונית.

הגדרה – ערך עצמי, וקטור עצמי:

$T:V\to V$, λ סקלר. λ נקרא ערך עצמי של T אם קיים $0\neq v\in V$ כך ש $T(v)=\lambda v$.

v נקרא וקטור עצמי ששייך ל λ.

מסקנה:

עבור אופרטורים ליניאריים:

$T:V\to V$ לכסינה אס"ם יש ל V בסיס שמורכב כולו מוקטורים עצמיים של T.

המטריצה המייצגת האלכסונית תהיה אז: $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$

עבור מטריצה ריבועית A:

λ נקרא ערך עצמי של A אם קיים $0\neq v\in V$ כך ש $Av=\lambda v$. אז v וקטור עצמי ששייך ל λ.

מטריצה ריבועית לכסינה אס"ם יש לה n ו"ע בת"ל, והם יהיו כמובן בסיס ל F^n.

הגדרות נוספות:

$T:V\to V$ ט"ל:

1. $f(\lambda)=|T-\lambda I|$ נקרא הפולינום האופייני של λ, כאשר דטרמיננטה של ט"ל היא הדטרמיננטה של אחת המטריצות המייצגות אותה.
2. אוסף כל הו"ע של ע"ע λ, בתוספת וקטור האפס יסומן V_λ. V_λ נקרא המרחב העצמי ששייך ל λ.
3. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא מספר הו"ע הבת"ל ששייכים ל λ.
4. הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

משפטים:

$T:V\to V$ ט"ל.

1. λ הוא ע"ע אס"ם λ הוא שורש של הפולינום האופייני. כלומר $|T-\lambda I|=0$.
2. λ הוא ע"ע אס"ם $(T-\lambda I)$ אינה הפיכה.
3. $v\neq 0$ הוא ו"ע ששייך ל λ אס"ם $(T-\lambda I)(v)=0$, כלומר $V_\lambda=\ker(T-\lambda I)$.
4. ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל.
5. ר"א $\leq$ ר"ג, לכל λ ע"ע.
6. אם A לכסינה, $v_1,v_2,\dots,v_n$ ו"ע בת"ל ו $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ ע"ע מתאימים, אז $P=\begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ מטריצה שעמודותיה הוקטורים העצמיים v_i, ו $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}$.
7. A לכסינה אס"ם הריבוי האלגברי של כל ע"ע שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.
8. מכפלת הערכים העצמיים של מטריצה $=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|=(-1)^n a_0$

   סכום הערכים העצמיים של מטריצה $=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)=-a_{n-1}$

   (כאשר $|A-\lambda I|=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0$ הוא פ"א של A, וגם $a_n=1$ תמיד בפ"א)
9. אם סכום כל שורה במטריצה הוא α, אז α ע"ע שלה.
10. ריבוי גיאומטרי של ע"ע λ שווה ל $n-r(A-\lambda I)$.
11. $\lambda=0$ ע"ע של מטריצה A אס"ם A לא הפיכה (סינגולארית).
12. אם A הפיכה ו λ ע"ע שלה, אז $\frac{1}{\lambda}$ ע"ע של A^{-1}.
13. A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר, אז ל AB ול- BA אותם ע"ע.
14. למטריצות דומות אותו פולינום אופייני, ולכן אותם ע"ע.
15. משפט קיילי-המילטון:

    תהי A מטריצה ריבועית, ו $f(\lambda)$ פ"א שלה. אזי $f(A)=0$. (A מאפסת את $f(\lambda)$)
16. מטריצה A מדרגה 1 לכסינה אס"ם $tr(A)\neq 0$.
17. כל המטריצות מאותו סדר, מדרגה 1, בעלות אותה עקבה $\neq 0$, דומות.
18. אם $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ ע"ע של $A_{n\times n}$, עם ו"ע מתאימים $v_1,v_2,\dots,v_n$, אז $P(\lambda_1),P(\lambda_2),\dots,P(\lambda_n)$ הם הע"ע של המטריצה $P(A)$, עם אותם ו"ע, כאשר $P(x)$ פולינום כלשהוא.

מרחבי מכפלה פנימית

<u>הגדרה – מרחב מכפלה פנימית:</u>

יהא V מ"ו מעל $\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. V יקרא מרחב מכפלה פנימית אם לכל זוג איברים $u,v\in V$ מתאים סקלר שיסומן $\langle u,v\rangle$ כך שמתקיים:

1. $\langle u_1+u_2,v\rangle=\langle u_1,v\rangle+\langle u_2,v\rangle$
2. $\langle \alpha u,v\rangle=\alpha\langle u,v\rangle$
3. $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$
4. $\langle v,v\rangle$ מספר ממשי אי-שלילי
5. $\langle v,v\rangle=0$ אם"ם $v=0$

ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ נקרא מרחב אוקלידי.
ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ נקרא מרחב אוניטרי.

<u>הגדרה – נורמה:</u>

V ממ"פ, $v\in V$. הנורמה של v מוגדרת ומסומנת כך: $\|v\|\equiv\sqrt{\langle v,v\rangle}$

מרחבי מכפלה פנימית סטנדרטיים:

1. $V=\mathbb{R}^n$:
$$a=(a_1,a_2,..,a_n),\qquad b=(b_1,b_2,..,b_n)$$
$$\langle a,b\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$
2. $V=\mathbb{C}^n$:
$$a=(a_1,a_2,..,a_n),\qquad b=(b_1,b_2,..,b_n)$$
$$\langle a,b\rangle=a_1\overline{b_1}+a_2\overline{b_2}+\ldots+a_n\overline{b_n}$$
3. $V=\mathbb{R}^{n\times m}$: $\langle A,B\rangle=tr\left(B^tA\right)$
4. $V=\mathbb{C}^{n\times m}$: $\langle A,B\rangle=tr\left(\left(\overline{B}\right)^tA\right)$
5. V מ"ו של פונקציות ממשיות רציפות ב $[a,b]$: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$

<u>משפטים:</u>

1. $\langle u,v_1+v_2\rangle=\langle u,v_1\rangle+\langle u,v_2\rangle$
2. $\langle u,\alpha v\rangle=\overline{\alpha}\langle u,v\rangle$
3. $\|v\|$ ממשי אי-שלילי.
4. $\|v\|=0$ אם"ם $v=0$
5. $v\in V\ ,\ \alpha\in F\ \Rightarrow \|\alpha v\|=|a|\cdot\|v\|$
6. אי שוויון קושי-שוורץ: $|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$
7. אי שוויון המשולש: $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

אורתוגונאליות

הגדרה – אורתוגונאליות:

V ממ"פ, $v,u \in V$. u,v נקראים אורתוגונאליים אם $\langle u,v\rangle = 0$. סימון: $u \perp v$.

הגדרה – תת מרחב ניצב:

V ממ"פ, W ת"מ של V, $W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v,w\rangle = 0 \quad \forall w \in W\}$

$W^{\perp}$ נקרא ת"מ הניצב ל W.

הגדרות נוספות

1. וקטור נורמאלי (מנורמל) ב V הוא איבר שהנורמה שלו היא 1.
2. קבוצה של איברים ב V $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ נקראת קבוצה אורתוגונאלית אם $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$
3. קבוצה אורתונורמאלית היא קבוצה אורתוגונאלית שבה כל איבר הוא נורמאלי.

משפטים: V ממ"פ, W ת"מ. אזי:

1. $W^{\perp}$ גם ת"מ של V.
2. $V = W \oplus W^{\perp}$
3. כל קבוצה סופית אורתוגונאלית שלא מכילה את איבר האפס היא בת"ל.
4. ניקח $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ קבוצה אורתונורמאלית. ניקח $v \in V$ ונגדיר $w = v - \langle v,u_1\rangle u_1 - \langle v,u_2\rangle u_2 - ... - \langle v,u_n\rangle u_n$, אז w ניצב לכל u_i, $1 \le i \le n$.

הגדרה – היטל אורתוגונאלי

מכיוון ש $V = W \oplus W^{\perp}$, כל $v \in V$ ניתן לכתיבה בצורה יחידה $v = w + w'$ כאשר $w \in W,\ w' \in W^{\perp}$

ההיטל האורתוגונאלי של v על W הוא w

ההיטל האורתוגונאלי של v על $W^{\perp}$ הוא w'

תהליך גרהם-שמידט:

V ממ"פ, $B = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ בסיס ל V.

נגדיר:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1\|}$$

$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2\|}$$

$$\vdots$$

$$u_n = \frac{v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \langle v_n, u_2\rangle u_2 - ... - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}}{\|v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \langle v_n, u_2\rangle u_2 - ... - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1}\|}$$

אזי:

1. $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ בסיס אורתונורמאלי ל V.
2. מטריצת המעבר מהבסיס החדש U לבסיס הישן B משולשת.
3. אם $v_1, v_2, ..., v_k$ הם כבר אורתונורמאלים, אז $u_1 = v_1,\ u_2 = v_2, ...,\ u_k = v_k$.

מסקנה: כל קבוצה אורתונורמאלית ניתנת להשלמה לבסיס אורתונורמאלי.

לכסון אורתוגונאלי

<u>הגדרה – מטריצה אורתוגונאלית :</u>

מטריצה A תקרא אורתוגונאלית אם $AA^t = A^tA = I$, כלומר $A^t = A^{-1}$

<u>משפטים :</u>

1. הבאים שקולים :
   א. A אורתוגונאלית
   ב. שורות A אורתו-נורמאלים
   ג. עמודות A אורתו-נורמאלים
2. אם מטריצה A סימטרית ממשית, אזי ו״ע המתאימים לע״ע שונים הם אורתוגונאליים.
3. לכל מטריצה A סימטרית ממשית יש לכסון אורתוגונאלי מעל $\mathbb{R}$.

   כלומר : קיימת P אורתוגונאלית ו D אלכסונית ממשית כך ש $P^{-1}AP = P^tAP = D$