סוכם על ידי עידו שמיר
יולי 2009

חדו"א 2ת' – סיכום למבחן

אלגברה של וקטורים

סקלר – מושג המוגדר ע"י מספר.

וקטור – מושג המוגדר ע"י גודל וכיוון וגם מגמה.

<u>הגדרה</u>: שני וקטורים יקראו שווים אם יש להם אותו גודל, אותו כיוון ואותה מגמה.

(לוקטור אין נקודת התחלה).

משפט: שני וקטורים הם מקבילים אם"ם הם פרופורציונאליים.

משפט: שני וקטורים תלויים לינארית אם"ם הם פרופורציונאליים (נקראים וקטורים קולינאריים).

-> שלושה וקטורים שונים מ 0 נמצאים במישור אחד אם"ם הם ת"ל.

משפט (נובע ממשפט פיתגורס):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

היטל: ההיטל של הוקטור b על הוקטור a זהו **וקטור** שכיוונו ככיוון a. גודלו:

$$|\vec{b}||\cos\theta|$$

ומגמתו כמגמת a אם הזווית חדה. ומנוגדת ממגמת a אם הזווית כהה.

נסמן:

$$\vec{P}_{\vec{a}}(\vec{b}) = |\vec{b}|\cos\theta \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

מכפלה סקלרית:

הגדרה: ערכו המוחלט הוא האורך של a כפול אורך ההיטל של b עליו. מכך נובע:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

משפט: מכפלה סקלרית שווה 0 אם"ם אחד מהם 0 או שהם ניצבים.

<u>אי שוויון קושי-שוורץ</u>

יהיו a,b וקטורים שונים מ0, אז:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$$

ושוויון מתקיים אם"ם a,b קולינאריים.

<u>מכפלה וקטורית במרחב</u>

גודל המכפלה הוקטורית הוא שטח המקבילית הנבנית על הוקטורים a,b.

הכיוון ניצב למישור שמכיל את a,b. המגמה היא שלישיה ימנית של a,b,axb.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

משפט:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

<u>מכפלה מעורבת במרחב התלת-ממדי</u>

סקלר.

הגודל שווה לנפח המקבילון הנבנה על הוקטורים a,b,c.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

גאומטריה אנליטית של ישרים ומשטחים במרחב

מישור

נקבע ע"י נקודה ווקטור ניצב. מישור העובר דרך 3 נקודות.
כל נקודה על המישור חייבת לקיים:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$
$$Ax+By+Cz+D=0$$

ווקטור הנורמל למישור מקיים:

$$\vec{N}=(A,B,C)$$

קו ישר

נקודה וכיוון.
הצגה פרמטרית של ישר, ואז הצגה קנונית:

$$x=x_1+at\,,y=y_1+bt\,,z=z_1+ct$$
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

מרחק מנקודה לישר

גובה המקבילית שבנויה מנקודה כלשהי על הישר לנקודה הנתונה.

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\vec{a}|}{|\vec{a}|}$$

מרחק נקודה ממישור

אורך ההיטל של (נקודה כלשהי במישור לנקודה הנתונה) על וקטור הנורמל.

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{N}|}{|\vec{N}|}=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

מרחק של מישור מהראשית:

$$d=\frac{|D|}{|\vec{N}|}=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

"כל משוואה מורידה מימד"
במימד התלת מימדי שתי משוואת בד"כ יגדירו ישר (שהוא חד ממדי).

מצבים הדדים בין מישורים וישרים

שני מישורים הם מקבילים או נחתכים.
שני מישורים הם מקבילים אם"ם הנורמלים שלהם מקבילים.
הזווית בין מישורים מוגדרת כזווית החדה שביניהם:

$$\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}|}{|\overrightarrow{N_1}||\overrightarrow{N_2}|}$$

מצבים הדדים בין ישרים

מקבילים, נחתכים או מצטלבים.
שני ישרים הם מקבילים אם"ם הכיוונים שלהם מקבילים.
אם המכפלה המעורבת של הישרים עם (וקטור של שתי נקודות כלשהן) (=נפח מקבילון) הוא 0 אז הם נחתכים. אחרת מצטלבים.
אם מצטלבים - מהו המרחק ביניהם? גובה המקבילון:

$$d=\frac{\left|(\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2})\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\right|}{\left|\overrightarrow{(\overrightarrow{a_1}\times\overrightarrow{a_2})}\right|}$$

סוכם על ידי עידו שמיר
יולי 2009

משטחים ריבועיים + עקומים ריבועיים

$ax^2+by^2+cz^2=d$

צורת המשטח	a	b	c	d
אליפסואיד אם a=b=c ספרה	+	+	+	+
היפרבלואיד חד יריעתי	+	+	-	+
חרוט דו צדדי	+	+	-	0
היפרבלואיד דו יריעתי	+	+	-	-

$ax^2+by^2=cz$

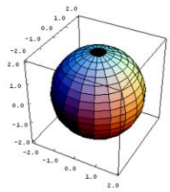
צורת המשטח	a	b	c
פרבולואיד אליפטי	+	+	+
פרבולואיד היפרבולי	+	-	+

$ax^2+by^2=c$

צורת העקום	a	b	c
אליפסה	+	+	+
אם a=b מעגל	-	-	-
היפרבולה על ציר X	+	-	+
	-	+	-
היפרבולה על ציר Y	-	+	+
	+	-	-
קבוצה ריקה	+	+	-
	-	-	+
נקודה בודדת	+	+	0
	-	-	0
שני קווים ישרים	-	+	0
	+	-	0
שני קווים ישרים	0	+	+
מקבילים	0	-	-
קבוצה ריקה	0	+	-
	0	-	+
ציר X	0	+	0
	0	-	0

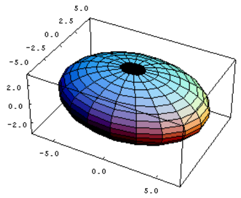
ספירה (פני כדור)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$



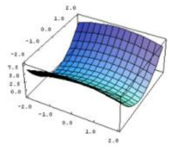
אליפסואיד

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$



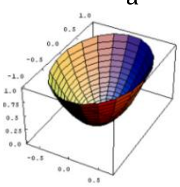
פרבולואיד היפרבולי

$$\pm(z-z_0)=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$



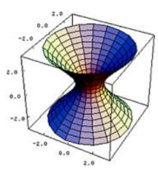
פרבולואיד

$$z-z_0=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$



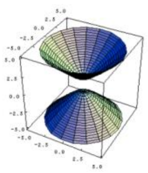
היפרבולואיד חד יריעתי

$$x^2+y^2-z^2=1$$



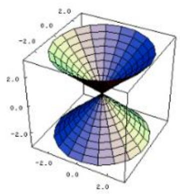
היפרבולואיד דו יריעתי

$$x^2+y^2-z^2=-1$$



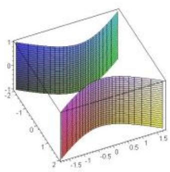
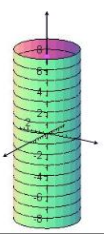
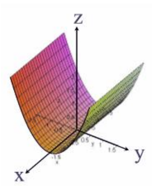
חרוט

$$x^2+y^2=z^2$$



משטחים גליליים

- אחד המשתנים לא משתתף במשוואה.

<u>גבולות</u>
הגדרת הגבול:
נאמר כי:

$$\lim_{n\to\infty} \overrightarrow{x_n} = \vec{L}$$

אם לכל

$$\varepsilon > 0$$

קיים N כך שלכל n>N:

$$\left|\overrightarrow{X_n} - \vec{L}\right| < \varepsilon$$

משפט:
אם r(t) פרמטריזציה גזירה של עקום. נניח ש r'(t0) שונה מ0. אזי הוקטור r'(t0) מקביל לישר המשיק לעקום בנק' r(t0).
(תנאי מספיק ולא הכרחי).
אם מתקיים לכל t אזי העקום נקרא עקום **חלק** (לפרמטריזציה הזאת).

<u>מטריקות</u>
E – האוקלידית:

$$d(A,B) = \left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

מטריקת הערך המוחלט:

$$d(A,B) = \left|\vec{A} - \vec{B}\right| = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

מטריקת המקסימום:

$$d(A,B) = \left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

<u>נקודה פנימית</u>
אומרים שנקודה היא נקודה פנימית של A אם **קיימת** סביבה שלה שכולה מוכלת ב A.
<u>קבוצה פתוחה</u>
אומרים שקבוצה היא פתוחה אם כל הנקודות שבה הן פנימיות.
<u>נקודת שפה</u>
אומרים שנקודה היא נקודת שפה של A אם **בכל** סביבה שלה יש נקודות ששייכות ל A ונקודות שלא שייכות ל A (השפה לא חייבת להיות חלק מהקבוצה).
<u>נקודת הצטברות</u>
אומרים שנקודה היא נקודת הצטברות של A אם **בכל** סביבה שלה **קיימת** נקודה אחת פרט לנקודה הנ"ל, השייכת ל A.

<u>קבוצה סגורה</u>
זוהי קבוצה שמכילה את כל נקודות השפה שלה.

משפט: קבוצה היא סגורה אם"ם המשלים שלה פתוח.

<u>משפט בולצאנו-ווירשטראס</u>
לכל קבוצת נקודות אינסופית וחסומה יש **נקודת הצטברות**.

משפט: קבוצה היא סגורה אם"ם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.
הגדרה: קבוצה שבה לכל סדרת קושי יש גבול (סופי, ששייך לקבוצה) נקראת קבוצה קומפקטית.
משפט: קבוצה היא קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.
משפט: תהי {Mk} סדרת נקודות ב R2. נסמן Mk=(Xk,Yk). אזי:

$$\lim_{k\to\infty} M_k = L(d_x, d_y)$$

אם"ם:

$$x_k \to d_x$$
$$y_k \to d_y$$

<u>הגדרת הגבול לכמה משתנים (דוגמה עבור 2)</u>

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$$\forall\varepsilon > 0\ , \exists\delta(\varepsilon) > 0, 0 < d\big((x,y),(x_0,y_0)\big) < \delta$$

$$\to |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

"אם הנקודה (x,y) קרובה לנק' (x0,y0) עד כדי דלתה אז ערך הפונקציה f(x,y) קרוב ל L עד כדי אפסילון".

משפט: אם קיים הגבול:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

אז לאורך כל מסלול (x(t),y(t)) בתחום ההגדרה של f המקיים:

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0$$

וגם:

$$\forall t \neq t_0: x(t) \neq x_0\ , y(t) \neq y_0$$

אזי:

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t),y(t)) = L$$

מסקנה: אם נמצא שני מסלולים שלאורכם מתקבלים גבולות שונים אז לפונקציה אין גבול.

משפט:

אם ניתן לרשום:

$$f(x,y) = g(x,y)\cdot h(x,y)$$

כך ש g(x,y) חסומה בסביבת (x0,y0) ומתקיים:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} h(x,y) = 0$$

אזי:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = 0$$

<u>כלל הסנדוויץ'</u>. שימוש ב:

$$\left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right| < \frac{1}{2}$$

<u>רציפות</u>

f(x,y) רציפה ב (x0,y0) אם"ם:

1. f(x0,y0) קיימת.
2. קיים:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

3.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

<u>הגדרה:</u> f רציפה בקבוצה A אם"ם f רציפה בכל נקודה ב A.

<u>תכונות בסיסיות של פונקציות רציפות:</u>

1. אריתמטיקה של פונקציות רציפות.
2. אם f רציפה ב (x0,y0) וגם f(x0,y0)>0 אז קיימת סביבה של (x0,y0) שבתוכה f(x,y)>0.
3. הרכבה של פונקציות רציפות.

<u>הגדרה:</u> תהי D קבוצה, אומרים ש D קשירה אם **לכל** 2 נקודות A,B ב D **ניתן למצוא** עקום r(t) שמקיים: r(a)=A,r(b)=B, וכך ש r(t) מוכל ב D לכל a<=t<=b.
שם של קבוצה פתוחה וקשירה – תחום.

<u>משפט ערך הביניים</u>

תהי D קבוצה **קשירה** ב Rn ותהי f **רציפה** ב D. תהיינה A,B שתי נקודות ב D.
יהי m מספר בין f(A) ל f(B), אזי קיימת נק' אחת לפחות, c, בתחום D כך ש f(c)=m
המשפט איננו נכון אם התחום איננו קשיר.

<u>ווירשטראס</u>

תהי D קבוצה קומפקטית (=סגורה וחסומה ב Rn) ותהי f:D->R רציפה ב D. אזי:
I f חסומה ב D.
II f מקבלת ב D את ערכיה האקסטרמליים.

נגזרות

הגדרה – נגזרות חלקיות

תהי f:D->R ותהי (x0,y0) פנימית ל D.

אם קיים הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=f_1(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

אז אנו נקרא לו: **הנגזרת החלקית של f לפי המשתנה הראשון שלה**.

"זהו שיפוע הישר המשיק לעקום החיתוך של המשטח z=f(x,y) עם המישור y=y0, בנקודה (x0,y0)".

משפט

אם לגרף z=f(x,y) יש מישור משיק בנק' (x0,y0,f(x0,y0)) אז נוסחתו היא:

$$z=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

הגדרה – גזירות (דיפרנציאביליות)

f(x,y) גזירה בנק' (x0,y0) אם קיימים קבועים A,B ופונקציה:

$$\varepsilon(x,y)$$

שמקיימת:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\varepsilon(x,y)=0$$

כך ש:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=(A\ B)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}=\nabla f(x,y)\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$$

<u>משפט:</u> למשטח z=f(x,y) יש מישור משיק (הנגזרת) בנק' (x0,y0,f(x0,y0)) אם"ם:
f גזירה ב (x0,y0).

אם F גזירה ב (x0,y0) אז:

1. F רציפה ב (x0,y0).
2. F בעלת נ"ח ב (x0,y0).

אם F בעלת נ"ח **רציפות** ב (x0,y0) אז F גזירה!

כלל השרשרת

תהי f(x,y) גזירה ב (x0,y0) ותהיינה x(t),y(t) גזירות ב t0 וכך ש:

x(t0)=x0

y(t0)=y0

תהי F(t) הפונקציה המורכבת:

$$F(t)=f\big(x(t),y(t)\big)$$

אזי:

1. F(t) גזירה ב t0.
2. מתקיים:

$$F'(t_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\frac{fx}{dt}(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\frac{fy}{dt}(t_0)$$

<u>נגזרת מכוונת</u>

<u>הגדרה</u>

תהי f(x,y) מוגדרת בנקודה (x0,y0) וסביבתה ויהי:

$$\hat{n} = (n_1, n_2) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

וקטור יחידה.

אם קיים הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hn_1, y_0+hn_2) - f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial n}(x_0,y_0)$$

אז נקרא לו **הנגזרת המכוונת** של הפונקציה f בנק' (x0,y0) בכיוון n.

(הנגזרות החלקיות הן מקרה פרטי של הנגזרת המכוונת).

- חשוב לנרמל את ווקטור הכיוון

<u>משפט</u>

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x_0,y_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0+tn_1, y_0+tn_2)]$$

בתנאי שאגף ימין קיים.

<u>משפט</u> תהי f(x,y) גזירה ב (x0,y0) **אזי** ל f קיימת נגזרת מכוונת בכל כיוון n, ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial n}(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0)\cdot\hat{n}$$

"הנגזרת המכוונת של פונקציה גזירה, היא קומבינציה ליניארית של הנגזרות החלקיות."

<u>משפט</u> אם f(x,y,z) גזירה ב (x0,y0,z0), אז הערך המקסימאלי שיכולה לקבל נגזרת המכוונת שלה בנק' (x0,y0,z0) מתקבל בכיוון הגרדיאנט שלה.

"בכיוון הגרדיאנט הפונקציה גדלה בקצב המרבי, בכיוון המנוגד יורדת בקצב המירבי".

<u>נגזרת מסדר גבוה</u>

<u>משפט אויילר-שוורץ</u>

תהי f(x,y) מוגדרת ב (x0,y0) וסביבתה, וכך ש:

fx,fy,fxy,fyx כולן רציפות ב (x0,y0) וסביבתה. אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

<u>כלל לייבניץ לגזירה תחת סימן האינטגרל</u>

אם

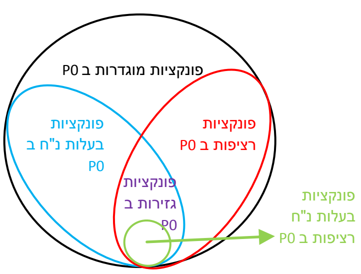
$$f(x,y)\,,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

רציפות במלבן. ואם u(y),v(y) פונקציות גזירות שערכיהן נמצאים בתחום [a,b]. אזי הפונקציה:

$$F(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$

גזירה במלבן, ונגזרתה:

$$F'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y)$$



<u>משפט הפונקציות הסתומות</u>

ניסוח עבור **חילוץ של z** מתוך F(x,y,z)=0:

תהי F(x,y,z) מוגדרת בנק' (x0,y0,z0) ובסביבתה, ונניח:

1. F(x0,y0,z0)=0
2. F שייכת ל C1 בנק' (x0,y0,z0) ובסביבתה.
3. $$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

אזי:

קיימת סביבה של (x0,y0,z0) שבה המשוואה F(x,y,z)=0 מגדירה פונקציה יחידה z=f(x,y) שמקיימת:

א. לכל (x,y) בסביבת (x0,y0):
$$F\big(x, y, f(x,y)\big) \equiv 0$$
ב. f(x0,y0)=z0
ג. f רציפה ב (x0,y0) ובסביבתה.
ד. f גזירה ברציפות ב (x0,y0) ובסביבתה, ומתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

<u>משפט</u>

תהי F שייכת ל C1 בנק' (x0,y0,z0) ובסביבתה ונניח:

1. F(x0,y0,z0)=0
2. $$\vec{\nabla} F(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$$

אזי למשטח F(x,y,z)=0 יש מישור משיק בנק' (x0,y0,z0) והוא נתון ע"י:
$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$
וגם הגרדיאנט בנקודה ניצב למשטח F(x,y,z)=0 בנקודה. הגרדיאנט בנקודה ניצב למשטח הרמה של F שעובר בנקודה.

תהי F(x,y,z) פונקציה שייכת ל C1 ב (x0,y0,z0) ובסביבתה. והגרדיאנט בנקודה שונה מ 0.
ויהי L עקום חלק שמוכל כולו במשטח F(x,y,z)=0 שעובר בנקודה (x0,y0,z0).
אזי הישר המשיק לעקום L בנקודה מוכל במישור המשיק למשטח בנק' זו.

<u>בעיות קיצון של פונקציות במספר משתנים</u>

<u>הגדרה</u> - אומרים שלפונקציה f(x,y) יש ערך מקסימאלי בנק' (x0,y0) אם קיימת סביבה של (x0,y0) שבתוכה:

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$$

הנקודה נקראת נקודת אקסטרמום (מינימום או מקסימום).

<u>משפט</u>

נניח כי לפונקציה f(x,y) קיימות כל הנגזרות החלקיות בנק' (x0,y0).
ונניח שידוע ש f מקבלת ערך אקסטרמלי ב (x0,y0).
אזי בהכרח כל הנגזרות החלקיות הללו מתאפסות.

<u>הגדרה – נקודות חשודות</u>

אומרים ש (x0,y0) נקודה **חשודה לאקסטרמום** של f(x,y) אם:

א. כל הנ"ח קיימות ומתאפסות שם (=נקודה קריטית).
ב. נ"ח אחת (לפחות) לא קיימת.

<u>שיטת כופלי לגרנז'</u>

"בנקודה הכי גבוהה על השביל הגרדיאנטים של f (ההר) ו g (השביל) מקבילים".

<u>משפט כופלי לגרנז'</u>

ניסוח עבור f(x,y,z) ואילוץ אחד.

תהיינה f(x,y,z) , g(x,y,z) שייכות ל C1 ומוגדרות בנקודה (x0,y0,z0) ובסביבתה, ונניח שמתקיים:

1. g(x0,y0,z0)=0
2. $$\vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0) \neq \vec{0}$$

אם לפונקציה f(x,y,z) יש ערך אקסטרמלי בנק' (x0,y0,z0) בכפוף לאילוץ g(x,y,z)=0 אז **בהכרח** קיים קבוע כך ש:

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0,z_0) + \beta \vec{\nabla} g(x_0,y_0,z_0) = \vec{0}$$

<u>מציאת נק' קריטיות</u>

1. מוצאים נק' קריטיות של f (בלי קשר לתחום).
2. מוצאים נק' קריטיות של f **על** השפה (=אילוץ).
3. מוסיפים לרשימה נקודות קצה + נקודות חשודות.

<u>מיון נק' קריטיות</u>

$$fxx > 0, \Delta > 0 \rightarrow min$$
$$fxx < 0, \Delta > 0 \rightarrow max$$
$$\Delta < 0 \rightarrow saddle$$
$$\Delta = 0 \; test \; failed$$

<u>משפט טיילור במספר משתנים</u>

תהי f(x,y) בעלת נגזרות חלקיות רציפות עד לסדר n+1 בנקודה (x0,y0) ובסביבתה, אזי:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$$
$$= f(x_0,y_0) +$$
$$+\frac{1}{1!}\left[f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y\right] +$$
$$+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2\right] + \cdots +$$
$$+\frac{1}{n!}\left[f_{x^n}(x_0,y_0)\Delta x^n + \binom{n}{1} f_{x^{n-1}y}(x_0,y_0)\Delta x^{n-1}\Delta y + \cdots\right] + R_n$$
$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)|_{t=\tau}$$

בכתיבה מקוצרת:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta \mathrm{y}) = f(x_0,y_0) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(x_0,y_0) + R_n$$

- פולינום טיילור של פונקציה הוא **יחיד**.

<u>אינטגרלים במספר משתנים</u>

<u>אינטגרל כפול</u>

משמעויות:

1. נפח.
2. מסה של טבלה (פלטה).

<u>הגדרה</u> – אומרים ש f(x,y) רציפה **כמעט בכל מקום** בתחום D אם לקבוצת נקודות אי רציפות של F יש שטח 0.

<u>משפט</u> – אם F רציפה כמעט בכל מקום וחסומה ב D אזי F אינטגרבילית ב D.

<u>שינוי משתנים באינטגרל כפול</u>

<u>משפט</u> – נניח שהעתקה

$$\vec{T}(u,v)=\left(x(u,v),y(u,v)\right)$$

מקיימת:

1. T העתקה C1 בתחום D במישור uv.
2. T העתקה **חח"ע** מ 'D ל D (במישור xy).
3. בכל 'D מתקיים:

$$J=det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\neq 0$$

וכן נניח כי f(x,y) רציפה ב D.

אזי:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\cdot\left|det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|dudv$$

אם יודעים דווקא את u(x,y),v(x,y) אז נשתמש ב:

$$\frac{1}{J}=det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)$$

<u>הגדרה</u>

D יקרא תחום **פשוט ביחס לציר y**, אם ניתן לכתוב אותו בצורה:

$$D=\{(x,y):a\leq x\leq b,g_1(x)\leq y\leq g_2(x)\}$$

כאשר g1,g2 רציפות בקטע [a,b].

במקרה זה (משפט):

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\boldsymbol{dy}$$

ובאופן דומה אפשר להגדיר תחום פשוט ביחס לציר x.

המשמעות – חישוב אינטגרל כפול ע"י **אינטגרל נשנה**.

<u>משפט פוביני</u>

אם f(x,y) **רציפה** במלבן [a,b]x[c,d] אז:

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$$

בפרט אם f(x,y)=g(x)h(y):

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\int_a^b g(x)dx\cdot\int_c^d h(y)dy$$

מעבר לקורדינטות מעגליות – טריוויאלי.

<u>אינטגרל משולש</u>

משמעויות:

1. נפח גוף.
2. מסה (M) של גוף תלת-מימדי בעלת צפיפות נתונה (מסה ליח' נפח):

$$M = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

3. מרכז מסה – של גוף תלת מימדי בעל צפיפות f (דוגמה לקורדינטת x):

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\iiint_V x \cdot f(x,y,z)dxdydz$$

<u>שיטת הפרוסות</u>

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

Dz – פרוסה שבה z=z0.

<u>שיטת המלבנים</u>

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)dz$$

D – ההיטל של V על מישור xy.

קורדינטות גליליות – טריוויאלי.

<u>קורדינטות כדוריות:</u>

$$x = r \cdot cos(\theta) \, sin(\varphi)$$
$$y = r \cdot sin(\theta) \, sin(\varphi)$$
$$z = r \cdot cos(\varphi)$$
$$\rightarrow J = r^2 \cdot sin(\varphi)$$

r – המרחק מן הראשית (תמיד אי-שלילי).

טטא – הזווית במישור xy הנמדדת מציר x החיובי. מוגבלת לתחום שאורכו 2 פאי.

פי – הזווית הנמדדת מציר z החיובי. בין 0 ל פאי לכל היותר.

<u>אינטגרל קווי</u>

<u>משפט</u>

יהי C עקום שנתון ע"י פרמטריזציה **גזירה ברציפות** (x(t),y(t),z(t)) גזירות ברציפות).

אזי C בעל אורך ואורכו נתון ע"י:

$$L = \int_C dr = \int_a^b |\vec{r}'(t)|dt$$
$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(y), z(t)\big)$$

<u>אינטגרל קווי מסוג I</u>

"מחשבים את השטח שנוצר בין העקום וגרף הפונקציה"

בהינתן:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

ועקום C עם פרמטריזציה:

$$\vec{r}(t), t \in [a,b]$$

$$\int_C f dr = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \cdot |\vec{r}'(t)|dt$$

<u>אינטגרל קווי מסוג II</u> - "**העבודה** בהעברת חלקיק בתוך השדה F לאורך העקום C"
בהינתן:

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ועקום C **חלק** עם פרמטריזציה:

$$\vec{r}(t), t \in [a,b]$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$$

$$d\vec{r} = (dx,dy,dz)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$$

<u>הגדרה</u> - אוריינטציה על עקום שפה של תחום.
יהי D תחום ונסמן ב C את העקום השפה של D.
נאמר של C **אוריינטציה חיובית**, אם התחום D נמצא משמאל לכיוון ההתקדמות.
<u>משפט גרין</u> (הקשר בין אינטגרל קווי II לאינטגרל כפול)

1. D תחום **פשוט קשר** (כלומר אין בו חורים).
2. C עקום סגור, חלק למקוטעין, שהוא שפת D, עם אוריינטציה חיובית.
3. תהיינה

$$P, Q, P_y, Q_x: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

מוגדרות ורציפות בתחום פתוח המכיל את D ושפתו C.
אזי:

$$\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D [Q_x - P_y]dxdy$$

עבור שדה F=(P,Q) נקבל שאגף שמאל שווה:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

מקרה פרטי: עבור Qx-Py=1 נקבל שתוצאת האינטגרל תיתן את השטח של D. למשל:

$$\vec{F} = \left(-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x\right)$$

<u>אינטגרל משטחי</u>
<u>הגדרה</u>
שטח של משטח S שנתון על ידי פרמטריזציה:

$$\vec{R}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \ \ (u,v) \in D$$

נתון על ידי הנוסחא:

$$\iint_S dS = \iint_D |\vec{R}_u \times \vec{R}_v| dudv$$

<u>אינטגרל משטחי מן הסוג ה I</u>

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\iint_S fdS = \iint_D f\left(\vec{R}(u,v)\right) \cdot |\vec{R}_u \times \vec{R}_v| dudv$$

עבור f=1 נקבל את שטח המשטח.
משמעות: זוהי מסה של משטח S, בעל צפיפות (מסה ליח' שטח) f.

- היפוך כיוון הנורמל אינו משפיע על ערכו של האינטגרל המשטחי ה I

מקרה פרטי עבור משטח שהוא גרף:

$$\boldsymbol{\iint_S f(x,y,z(x,z))dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \cdot \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy}$$

<u>אינטגרל משטחי מן הסוג ה II</u>

$$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}\left(\vec{R}(u,v)\right) \cdot (\vec{R}_u \times \vec{R}_v) du dv$$

משמעות פיסיקלית: **שטף** של השדה F דרך המשטח S.

עבור גרף:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iint_D \vec{F}(x,y,z(x,y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dx dy$$

<u>אופרטור nabla</u>

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

תהי f גזירה (לשורה השנייה, פעמיים), אזי:

$$Grad\ f = \vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$Lapl\ f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f = \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

תהי F=(P,Q,R):

$$\mathrm{Div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = P_x + Q_y + R_z$$

$$\mathrm{Rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$$

<u>שמות:</u>

שדה חסר מקורות:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv 0$$

שדה חסר מערבולות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \vec{0}$$

<u>משפט ה Div של **גאוס**</u> (קשר בין משטחי II למשולש)

1. V תחום סגור וחסום, שהוא איחוד של מספר סופי של **תחומים פשוטים**.
2. S משטח השפה של V כך שהנורמל למשטח פונה כלפי חוץ.
3. F(x,y,z)=(P,Q,R) גזירה ברציפות (P,Q,R גזירות ברציפות) בתחום V וב S.

אזי:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dx dy dz$$

<u>משפט **סטוקס** (קשר בין קווי II למשטחי II)</u>

1. S משטח חלק למקוטעין.
2. C עקום חלק למקוטעין וסגור, שהוא שפת S.
3. נניח שנורמל למשטח n והמשיק לעקום C מהווים מע' ימנית.
4. F שדה גזיר ברציפות בתחום פתוח המכיל את S ושפתו C.

אזי:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS$$

- אם F גזירה ברציפות פעמיים:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

- אם f גזירה ברציפות פעמיים:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

<u>שדות משמרים</u>

<u>הגדרות</u>

<u>תחום פשוט קשר</u> – תחום **שכל** מסלול סגור C בתוכו ניתן **לכווץ בצורה רציפה** לנקודה.
במישור – תחום שאין בו חורים.

<u>שדה משמר</u>

יהי F=(P,Q) שדה **רציף** בתחום D. אומרים ש F **משמר בתחום D** אם **לכל** 2 נקודות ב D, האינטגרל של המסלול C המחבר את שתי הנקודות וכולו מוכל בתוך D, אינו תלוי בצורתו של המסלול C אלא רק בנק' הקצה.

<u>משפט 3 הטענות השקולות</u>

יהי F=(P,Q,R) שדה וקטורי גזיר ברציפות בתחום V אזי 3 הטענות הבאות שקולות:

א. לכל מסלול סגור ב V:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

ב. אינו תלוי במסלול אלא רק בנק' ההתחלה והסיום:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ג. קיימת פונקצית פוטנציאל סקלרית U כך ש:

$$\vec{\nabla} U = \vec{F}$$

ומתקיים (A נקודת ההתחלה, B נקודת הסיום):

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(B) - U(A)$$

ד. **אם V תחום פשוט קשר:**

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$$

- עבור השדה הבא:

$$\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

לכל מסלול שלא מקיף את הראשית (השדה משמר!):

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

למסלול המקיף את הראשית פעם אחת נגד כיוון השעון מתקיים:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 2\pi$$

בהינתן שדה F גזיר ברציפות. נבדוק האם השדה משמר בתחום V כך:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}$$

לא – **השדה בטוח לא משמר!**

כן: האם V פשוט קשר?

כן – **השדה משמר!**

לא: האם קיימת פונקצית פוטנציאל U?

-או-

מחשבים אינטגרל קווי II <u>סביב</u> החור ובדקים האם =0?

לא: **השדה לא משמר!**

כן: **השדה משמר!**